

## Критический ток неоднородного джозефсоновского перехода на межзеренной границе со случайным распределением дислокаций

© Е.З. Мейлихов, Р.М. Фарзетдинова

Российский научный центр "Курчатовский институт",  
123182 Москва, Россия

(Поступила в Редакцию 16 сентября 1997 г.)

Рассчитывается зависимость критического тока  $J_c(\theta)$  межзеренной границы от угла разориентации  $\theta$  контактирующих гранул. Предполагается, что параметр порядка подавляется в приграничных областях с повышенным механическим напряжением, индуцируемым случайно распределенными граничными дислокациями. В рамках теоретико-вероятностного подхода определяется функция распределения напряжений. В предположении о джозефсоновской природе слабой связи на границе найдено аналитическое выражение для угловой зависимости  $J_c(\theta)$  (для границ наклона и кручения). Оценена величина остаточного критического тока границы в сильном магнитном поле.

Низкое значение критического тока высокотемпературных сверхпроводящих керамик, как известно, определяется множеством межзеренных слабых связей на границах между соседними сверхпроводящими гранулами. Слабые связи возникают вследствие понижения величины сверхпроводящего параметра порядка вблизи таких границ. Причины этого могут быть различными, однако на чистых границах, не содержащих примесей и структурных нарушений, понижение параметра порядка чаще всего связывают с полем механических напряжений  $\sigma_{ik}$  ( $i, k = x, y, z$ ), генерируемых дислокациями, возникающими на границах зерен [1–3].

Не рассматривая конкретного механизма подавления сверхпроводящего параметра порядка в областях, подверженных сильным механическим напряжениям, отметим, что он связан с возникновением электрического потенциала при деформации решетки — так называемого деформационного потенциала  $\varphi \sim \Xi \varepsilon$ , где  $\Xi \sim 10$  eV — константа деформационного потенциала,  $\varepsilon \sim \sigma/\sigma_0$  — деформация решетки. Когда смещение энергетических электронных уровней  $\sim \varepsilon \varphi$  становится сравнимым с энергией Ферми  $\varepsilon_F \sim 0.1$  eV (для ВТСП), электронный спектр радикально перестраивается, что и приводит к подавлению сверхпроводящего состояния. Таким образом, "сильным" можно считать напряжение  $\sigma_c \sim (\varepsilon_F/\Xi)\sigma_0 \sim 0.01\sigma_0$ , при котором относительная деформация решетки составляет  $\sim 1\%$ .

В то же время эксперименты показывают, что пространственное распределение концентрации кислорода в  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ -пленках имеет минимум вблизи межзеренной границы [4]. Вдали от границы  $\delta \approx 0.05$ , а на границе  $\delta \sim 0.3$  и  $\sim 0.5$ – $0.6$  для  $\theta = 7$  и  $= 31^\circ$  соответственно.<sup>1</sup> Восстановление концентрации кислорода до объемного значения происходит на расстоянии всего лишь  $\sim 20$  nm от границы. Таким образом, ширина обедненного кислородом слоя близка (см. далее) к ширине приграничной области, "испорченной" дислокациями. Поэтому вполне

<sup>1</sup> Напомним, что температура сверхпроводящего перехода в  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  сильно зависит от величины  $\delta$ :  $T_c \approx 92$  K при  $\delta = 0.05$ ,  $T_c \approx 60$  K при  $\delta = 0.4$  и  $T_c = 0$  при  $\delta \geq 0.6$  [5].

вероятно, что такое понижение концентрации кислорода связано с дислокационными напряжениями, концентрирующимися вблизи межзеренной границы.

Поле напряжений на границе полностью определяется системой граничных дислокаций. В теории дислокаций межзеренные границы обычно ассоциируются с периодической системой краевых (для границы наклона) или винтовых (для границы кручения) дислокаций [6], плотность которых тем выше, чем больше угол  $\theta$  разориентации соседних зерен. Плотность дислокаций принято характеризовать расстоянием  $D$  между ними, которое связано с углом  $\theta$  простым соотношением  $D = b/[2 \sin(\theta/2)]$ , в котором  $b$  — величина вектора Бюргерса, не сильно отличающаяся от постоянной  $a$  кристаллической решетки в направлении этого вектора (в простейших случаях  $b$  просто совпадает с  $a$ ).<sup>2</sup>

При сближении дислокаций (т.е. при увеличении угла разориентации соседних зерен) создаваемые ими напряжения взаимно компенсируются, а ширина приграничной области "сильных" напряжений уменьшается [3]. Согласно рассматриваемой модели, межзеренная связь должна при этом становиться все менее слабой, а межзеренный критический ток увеличиваться. Этот вывод полностью противоречит многочисленным экспериментам, которые демонстрируют быстрый спад межзеренного критического тока с ростом угла разориентации  $\theta$  для всех типов границ (наклона, кручения и смешанных) в высокотемпературных сверхпроводящих пленках [7,8] и кристаллах [9].

Мы полагаем, что отмеченное несоответствие теории и эксперимента связано не с ущербностью модели, а с неправильным предположением о периодичности системы граничных дислокаций. Действительно, существуют различные причины, нарушающие такую периодичность. Достаточно упомянуть тепловые флуктуации, смещающие дислокации на расстояние порядка постоянной

<sup>2</sup> В случае границы наклона приведенное соотношение справедливо лишь для границы, которая симметрична по отношению к соответствующим кристаллографическим плоскостям контактирующих зерен (так называемая симметричная граница наклона). Общее соотношение для асимметричной границы см. в [6].

решетки, а также неизбежную в общем случае несоизмеримость периода  $D$  дислокационной структуры с постоянной решетки. Поэтому физически более правильно считать систему различных дислокаций случайной, полагая, что каждая из них может быть случайным образом смещена относительно своего "регулярного" положения на расстояние порядка  $a$ . Таким образом, задача в значительной мере сводится к расчету поля напряжений системы случайных дислокаций вблизи межзеренной границы. Численные расчеты такого рода, предпринятые в работе [3], демонстрируют качественное согласие с экспериментом и подтверждают плодотворность подобной "случайной" модели. В настоящей работе развивается аналитический метод решения сформулированной проблемы. Поскольку, как уже отмечалось, точная зависимость сверхпроводящего параметра порядка от напряжения неизвестна, при расчете межзеренного критического тока использовалось простое приближение, согласно которому параметр порядка обращается в нуль в тех областях, где  $\sigma_{ik} \geq \sigma_c$ , и не изменяется там, где  $\sigma_{ik} < \sigma_c$ .

## 1. Теоретико-вероятностная модель случайного поля напряжений на границе

Далее будем исходить из известных выражений [6] для компонент тензора напряжений, которые создаются одиночной краевой дислокацией, расположенной в начале координат и характеризуемой вектором Бюргерса  $\mathbf{b}$ , направленным вдоль оси  $x$  (поскольку такой дислокации соответствует "лишняя" полуплоскость, параллельная оси  $y$ , будем называть ее  $Y$ -дислокацией):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^Y &= -b\sigma_0 \frac{y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & \sigma_{yy}^Y &= +b\sigma_0 \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_{xy}^Y &= +b\sigma_0 \frac{x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_0 = G/[2\pi(1 - \mu)]$ ,  $G$  — модуль сдвига,  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Это — так называемая формула Вольтерра, которая получена в модели сплошной среды. Она игнорирует атомарную структуру кристалла и, в частности, деталей "устройства" ядра дислокации. Последнее можно было бы учесть, применяя физически более правильную формулу Пайерлса [6], однако появляющиеся при этом поправки к напряжению существенны только на расстояниях порядка постоянной решетки  $a$ . Они не влияют сколько-нибудь заметно на сверхпроводящие свойства приграничной области, поскольку ширина последней определяется длиной когерентности  $\xi_N$  электронов в нормальном металле, которая существенно превышает  $a$ . Отметим также, что в соотношениях (1)  $b \approx a$ .

Простую (симметричную) межзеренную границу наклона, совпадающую с плоскостью  $yz$ , можно представить как совокупность  $Y$ -дислокаций, расположенных на одинаковых расстояниях  $D_y = a/[2 \sin(\theta/2)]$ , друг от друга, где  $\theta$  — угол разориентации соседних кристаллитов (зерен). Суммарные напряжения, создаваемые "линейкой" таких дислокаций, можно рассчитать с помощью известных выражений [6]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}/\sigma_0 &= - \left( \frac{\pi b}{D_y} \right) \times \frac{\sin 2\pi Y (\operatorname{ch} 2\pi X - \cos 2\pi Y + 2\pi X \operatorname{sh} 2\pi X)}{(\operatorname{ch} 2\pi X - \cos 2\pi Y)^2}, \\ \sigma_{yy}/\sigma_0 &= - \left( \frac{\pi b}{D_y} \right) \times \frac{\sin 2\pi Y (\operatorname{ch} 2\pi X - \cos 2\pi Y - 2\pi X \operatorname{sh} 2\pi X)}{(\operatorname{ch} 2\pi X - \cos 2\pi Y)^2}, \\ \sigma_{xy}/\sigma_0 &= + \left( \frac{\pi b}{D_y} \right) \frac{2\pi X (\operatorname{ch} 2\pi X \cos 2\pi Y - 1)}{(\operatorname{ch} 2\pi X - \cos 2\pi Y)^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

в которых  $X = x/D_y$ ,  $Y = y/D_y$ .

Рассмотрим некоторую прямую линию (будем называть ее  $x$ -линией), параллельную границе и расположенную на расстоянии  $x$  от нее. При движении вдоль  $x$ -линии напряжение  $\sigma_{ik}$  не остается постоянным и может быть описано с помощью функции распределения  $f_x(\sigma_{ik})$ , индекс которой означает, что введенная функция относится к  $x$ -линии. В некоторых точках  $x$ -линии  $|\sigma_{ik}| > \sigma_c$ , а в других точках —  $|\sigma_{ik}| < \sigma_c$ . Вероятность  $w_x$  того, что произвольная точка  $x$ -линии является "хорошей" (т.е. в этой точке  $|\sigma_{ik}| < \sigma_c$ ) определяется относительной долей ее "хороших" участков и равна

$$w_x = \int_{-\sigma_c}^{\sigma_c} f_x(\sigma_{ik}) d\sigma_{ik}, \quad (3)$$

а вероятность того, что некоторая точка  $x$ -линии — "плохая" (т.е. в этой точке  $|\sigma_{ik}| > \sigma_c$ ) равна, естественно,  $(1 - w_x)$ .

Рассмотрим теперь  $x$ -полосу — область, ограниченную межзеренной границей и  $x$ -линией. Вероятность того, что некоторая часть этой полосы — "плохая", а соответствующая область вне ее — "хорошая", пропорциональна произведению двух вероятностей: вероятности того, что даже наиболее удаленные от границы внутренние точки этой части  $x$ -полосы — еще "плохие", и вероятности того, что все точки, примыкающие к этой части  $x$ -полосы "снаружи", — уже "хорошие". Ясно, что эти две вероятности совпадают с  $w_x$  и  $(1 - w_x)$  соответственно. Таким образом, вероятность  $p(x)$  того, что ширина "плохого" слоя на рассматриваемой части границы равна  $x$ , определяется простым соотношением

$$p(x) = p_0 w_x (1 - w_x), \quad (4)$$

где  $p_0$  — нормировочный множитель, определяемый условием  $\int_0^\infty p(x) dx = 1$ . По существу,  $p(x)$  — веро-

ятность того, что ширина "плохой" полосы, измеренная при перемещении вдоль случайно выбранной нормали к границе, равна  $x$ .

Теперь мы можем легко найти среднее (усредненное по границе с неоднородным напряжением  $\sigma_{ik}$ ) значение любой физической величины, зависящей от ширины "плохой" полосы. В частности, наиболее вероятная ширина такой полосы равна  $\langle x \rangle = \int_0^\infty xp(x)dx$ .

Таким образом, задача об определении критического тока межзеренной границы, рассматриваемой как джозефсоновский переход, неоднородность свойств которого связана с граничными дислокациями, сводится к отысканию введенной выше функции распределения  $p(x)$  для того или иного распределения дислокаций вдоль границы.

Рассмотрим сначала периодическую систему дислокаций, когда напряжение  $\sigma_{ik}(x, y)$  является периодической функцией координаты  $y$  с периодом  $D_y$ . Ясно, что при малой плотности дислокаций, поля напряжений которых практически не перекрываются (этому соответствуют большие значения  $D_y$  и малые углы разориентации  $\theta \propto 1/D_y$ ), доля "плохих" участников границы пропорциональна плотности дислокаций, т.е.  $1/D_y$ . Это приводит к линейному по углу разориентации спаду критического тока границы:  $(i_0 - i_c) \propto (1/D_y) \propto \theta$ . Этот простой результат, содержащийся в работе [1], распространяется (и, как показано далее, неправомерно) ее авторами и на случай больших ( $\sim 10^\circ$ ) углов  $\theta$ .

Для периодической системы дислокаций функция распределения  $f_x(\sigma_{ik})$  простым образом выражается через координатную зависимость напряжения

$$f_x(\sigma_{ik}) = \left( \frac{2}{D_y} \right) \left| \frac{\partial y(\sigma_{ik}, x)}{\partial \sigma_{ik}} \right|. \quad (5)$$

Фигурирующая в (5) функция  $y(\sigma_{ik}, x)$  является обратной по отношению к функции  $\sigma_{ik}(x, y)$ , которая определяет пространственное распределение напряжения в системе дислокаций (см. (2)).

Далее для определенности будем иметь дело с диагональной компонентой напряжения  $\sigma_{xx}$ , которая, как показано ранее, наиболее существенна для нашей задачи [3]. В качестве простого приближения, допускающего обращение функции  $\sigma_{ik}(x, y)$  в явном виде, рассмотрим ситуацию, когда ширина "плохой" полосы еще достаточно велика, а именно  $2\pi X \gtrsim 1$ . В этом случае выражение (2) для  $\sigma_{xx}$  и обратную функцию  $y(\sigma_{xx}, x)$  можно приближенно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) &= -\sigma_{\max} \sin \left( \frac{2\pi y}{D_y} \right), \\ y &= - \left( \frac{D_y}{2\pi} \right) \arcsin \left( \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{\max}} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\sigma_{\max} = \sigma_{\max}(x) = \pi\sigma_0(b/D_y)[(2\pi x/D_y) \operatorname{sh}(2\pi x/D_y) + \operatorname{ch}(2\pi x/D_y)] / \operatorname{ch}^2(2\pi x/D_y)$ . Согласно (5), функция

распределения в этом случае определяется соотношением

$$f_x(\sigma_{xx}) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{\sigma_{\max}^2 - \sigma_{xx}^2}}, & |\sigma_{xx}| < \sigma_{\max}, \\ 0, & |\sigma_{xx}| > \sigma_{\max}, \end{cases} \quad (7)$$

подставляя которое в (3), находим<sup>3</sup>

$$p(x) = \begin{cases} p_0 \arcsin \left( \frac{\sigma_c}{\sigma_{\max}} \right) \\ \quad \times \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left( \frac{\sigma_c}{\sigma_{\max}} \right) \right], & |\sigma_c| < \sigma_{\max}, \\ 0, & |\sigma_c| > \sigma_{\max}. \end{cases} \quad (8)$$

Поскольку  $xx$ -компонента напряжения отдельной  $y$ -дислокации, расположенной в начале координат, является нечетной функцией  $y$  (см. (1)), с ростом плотности дислокаций (выше некоторого значения) их перекрывающиеся поля напряжений начинают компенсировать друг друга, приводя к уменьшению эффективной ширины "плохой" полосы. Соответственно средняя ширина  $\langle x \rangle = \int_0^\infty xp(x)dx$  "плохого" приграничного слоя должна падать с ростом плотности дислокаций (т.е. с уменьшением величины  $D_y$ ). Таким образом, зависимость критического тока межзеренного контакта с периодической системой дислокаций должна быть немонотонной: по мере уменьшения периода  $D_y$  критический ток сначала падает, а затем растет. Хотя этот вывод находится в явном противоречии с бытующими представлениями (см., например, уже цитированную работу [1]), он подтверждается результатами непосредственного расчета (см. далее).

Критический ток джозефсоновского перехода на однородной границе можно записать в виде

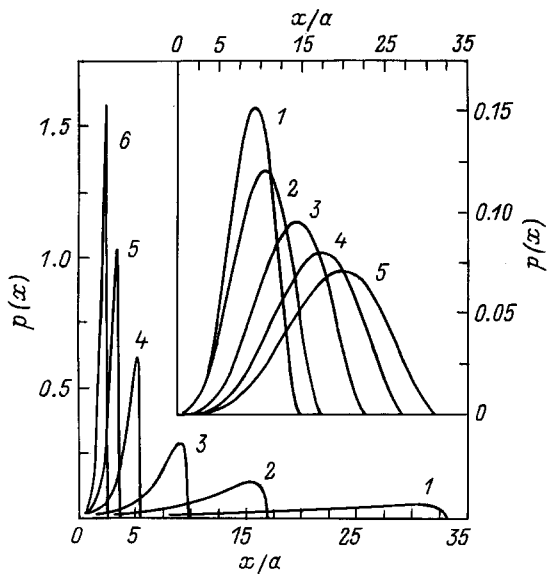
$$i_c = i_0 \exp \left( -\frac{d}{\xi_N} \right), \quad (9)$$

где  $i_0$  — критический ток в объеме,  $d$  — толщина "плохого" (являющегося не сверхпроводником, а, например, нормальным металлом) слоя на границе,  $\xi_N$  — электронная корреляционная длина в нормальном металле. Обобщение этого выражения на неоднородный случай имеет вид

$$\langle i_c \rangle = i_0 \int_0^\infty \exp(-2x/\xi_N) p(x) dx, \quad (10)$$

где функция  $p(x)$  предполагается нормированной на единицу, а фактор 2 учитывает наличие "плохой" полосы по обе стороны от границы.

<sup>3</sup> Выражение (8) для  $p(x)$  можно было бы получить и без вычисления функции распределения  $f_x(\sigma_{xx})$ . Действительно, из (3) и (5) следует  $w_x = (2/D_y)[y(\sigma_c) - y(-\sigma_c)]$ , что с учетом второго из соотношений (6) сразу же приводит к (8). Более "вычурный" прием использован в тексте только для того, чтобы проиллюстрировать последовательность действий для случая, когда обратная функции  $y(\sigma_{xx})$  не известна, но известен (или предположен) вид функции распределения  $f_x(\sigma_{xx})$ . Именно эта ситуация будет рассматриваться далее в настоящей работе.



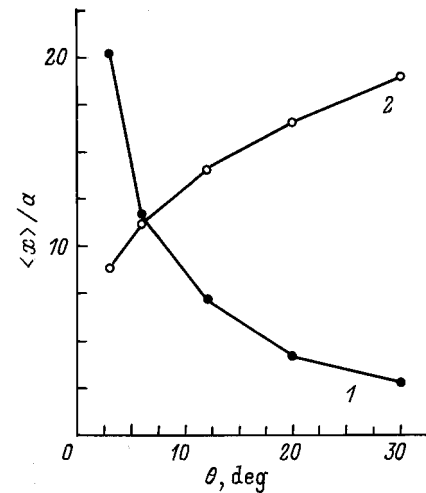
**Рис. 1.** Вероятность  $p(x)$  того, что ширина "плохого" слоя вблизи межзеренной границы равна  $x$ . Кривые приведены лишь в той области, где условие применимости расчетных формул ( $2\pi X \geq 1$ ) не нарушается. Периодическая система дислокаций: расстояние  $D_y$  (в единицах  $b$ ) между дислокациями (угол разориентации  $\theta$ , deg): 1 — 50 (1.1), 2 — 20 (3), 3 — 10 (5.7), 4 — 5 (11.7), 5 — 3 (19), 6 — 2 (29). На вставке — система случайных дислокаций:  $\Delta/a = 1$ , угол разориентации  $\theta$  (deg): 1 — 3, 2 — 6, 3 — 12, 4 — 20, 5 — 30.

На рис. 1 представлены рассчитанные по (8) функции распределения  $p(x)$  для случая, когда "критическое" напряжение  $\sigma_c$  составляет 1% от  $\sigma_0$  (т.е.  $\sigma_c/\sigma_0 = 0.01$ ). Видно, что с уменьшением периода дислокационной структуры  $D_y$  (когда угол разориентации  $\theta$  растет) максимум вероятности  $p(x)$  смещается в область малых значений  $x$ . В соответствии с этим рис. 2 демонстрирует уменьшение средней ширины  $\langle x \rangle$  "плохой" полосы, а рис. 3 — рост межзеренного критического тока (рассчитанного на основании соотношения (10)) с увеличением угла разориентации  $\theta$ .

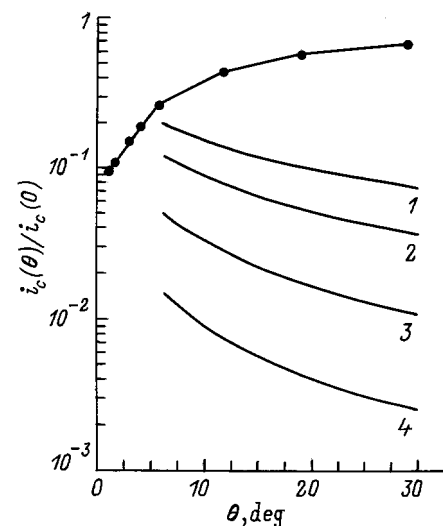
Полученный результат, как и следовало ожидать, полностью противоречит выводам работы [1]. Гораздо более существенно, что он совершенно не согласуется с экспериментом [7–9], показывающим рост критического тока с увеличением угла разориентации. В свете сказанного выше ясно, что дефект рассмотренной "наивной" модели состоит в традиционном допущении о периодичности дислокационной структуры вблизи межзеренной границы. Более реалистичская модель должна, как уже указывалось, учитывать нарушение строгой периодичности расположения дислокаций на межзеренной границе за счет их небольшого (на расстояние порядка кристаллической решетки) случайного смещения вдоль границы.

В этом случае полное напряжение, создаваемое в произвольной точке кристалла, представляет собой сум-

му случайных величин — напряжений от отдельных дислокаций — и также является случайной величиной. Ясно, что это напряжение не может быть рассчитано с помощью соотношений типа (1), и естественным способом описания напряжений в кристалле становится введенная выше функция распределения  $f_x(\sigma_{xx})$ . Если бы эта функция была известна, то описанным выше методом можно было бы рассчитать межзеренный критический ток и для случайной системы дислокаций.



**Рис. 2.** Зависимость средней ширины "плохой" полосы вблизи межзеренной границы от угла разориентации  $\theta$ . 1 — периодическая система дислокаций, 2 — система случайных дислокаций ( $\Delta/a = 1$ ).



**Рис. 3.** Зависимость джозефсоновского критического тока  $i_c$  межзеренной границы от угла разориентации  $\theta$ . Верхняя кривая — периодическая система дислокаций. Средняя ширина  $\langle x \rangle$  "плохого" слоя вблизи границы удовлетворяет условию  $2\pi\langle x \rangle/D_y \geq 1$ , при обратном неравенстве ( $\theta \rightarrow 0$ ) критический ток растет с уменьшением угла  $\theta$  и  $i_c/i_0 \rightarrow 1$ . Нижние кривые (1–4) — система случайных дислокаций. Параметр  $\mu_0$ : 1 — 8, 2 — 10, 3 — 16, 4 — 24.

В принципе существует метод, позволяющий найти функцию распределения суммы случайных величин, распределенных по известному закону, — это метод Маркова [10]. Однако использование его в рассматриваемом случае не позволяет получить достаточно простого аналитического выражения для этой функции. Поэтому мы избрали другой, более простой, подход, основанный на использовании приближительного вида функции распределения  $f_x(\sigma_{xx})$ .

Известно, что функция распределения полностью определяется полным набором своих моментов  $M_n = \int (\sigma_{xx})^n f_x(\sigma_{xx}) d\sigma_{xx}$  [11]. Функции, все моменты которых совпадают, тождественны, а функции, у которых совпадает лишь конечное число первых моментов, "похожи" друг на друга, причем их "сходство" тем больше, чем больше число совпадающих моментов. Для приближенных расчетов достаточно ограничиться совпадением первых двух-трех моментов.<sup>4</sup>

Конечно, первых двух-трех моментов еще недостаточно, чтобы написать выражение для функции распределения. Поэтому для того чтобы получить представление о ее форме, мы воспользуемся результатами численного расчета напряжений для некоторой реализации случайного распределения дислокаций (см. [3]). На рис. 4 представлены функции распределения напряжения  $f_x(\sigma_{xx})$  на расстоянии  $x = 5a$  от границы с углом разориентации  $\theta = 10^\circ$  при различных значениях параметра  $\Delta$ , являющегося мерой случайности в расположении дислокаций ( $\Delta$  совпадает со среднеквадратичным отклонением дислокаций от их "регулярных" положений).<sup>5</sup> Схожие результаты получены и для других значений  $\theta \gtrsim 1^\circ$ ,  $x \gtrsim a$  и  $\Delta \gtrsim 0.02$ . Видно, что с хорошей точностью отношение  $f_x(\sigma_{xx})/\sigma_{xx}$  является линейной функцией напряжения. Это означает, что функцию распределения можно записать в виде

$$f_x(\sigma_{xx}) \propto |\sigma_{xx}[\sigma_1(x, \Delta, \theta) - \sigma_{xx}]|, \quad (11)$$

где  $\sigma_1(x, \Delta, \theta)$  — единственный параметр распределения, определяющий все его свойства и, в частности, дисперсию  $D(x, \Delta, \theta)$ . Легко показать, что для параболического распределения вида (11)  $D = (3/10)\sigma_1^2$ . Таким образом, для полного описания распределения  $f_x(\sigma_{xx})$  достаточно знать его дисперсию.

<sup>4</sup> Первые три момента имеют простой "геометрический" смысл. Среднее значение напряжения  $\langle \sigma_{xx} \rangle$  и его дисперсия  $D$  определяют соответственно центр тяжести распределения и его эффективную ширину. Задание двух первых моментов распределения  $M_1$  и  $M_2$  эквивалентно заданию среднего значения напряжения  $\langle \sigma_{xx} \rangle$  и его дисперсии  $D$ . Действительно,  $\langle \sigma_{xx}(x) \rangle = \int \sigma_{xx} f_x(\sigma_{xx}) dx = M_1$ , а дисперсия выражается через  $M_1$  и  $M_2$ :  $D = \langle (\sigma_{xx})^2 \rangle - (\langle \sigma_{xx} \rangle)^2 = M_2 - M_1^2$ . Третий момент  $M_3$  связан со степенью отклонения формы функции распределения от симметричной (относительно среднего значения). Эта асимметрия обычно характеризуется параметром  $\gamma_1 = \langle (\sigma_{xx} - \langle \sigma_{xx} \rangle)^3 \rangle / D^{3/2} = (M_3 - 3M_1M_2) / D^{3/2}$ .

<sup>5</sup> Функция распределения четна относительно  $\sigma_{xx}$ ; на рисунке показана только та ее часть, которая соответствует значениям  $\sigma_{xx} > 0$ .

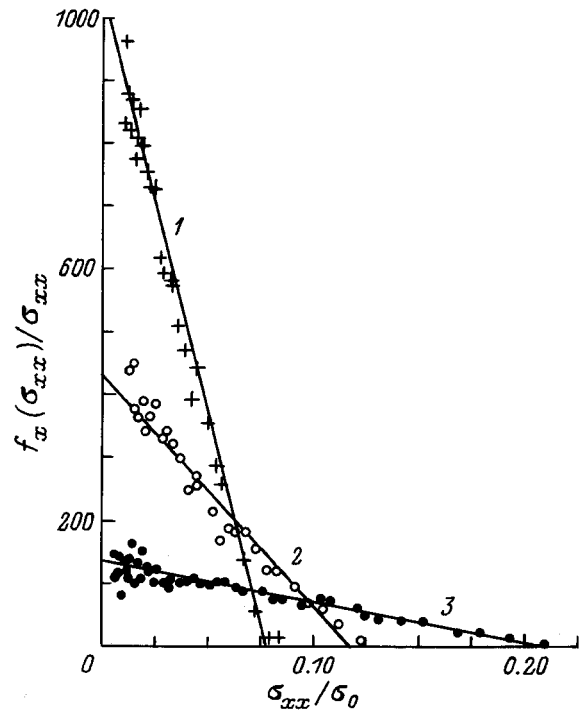


Рис. 4. Результаты численного расчета функции распределения напряжения  $f_x(\sigma_{xx})$  на расстоянии  $x = 5a$  от межзеренной границы с углом разориентации  $\theta = 10^\circ$  при различных значениях параметра  $\Delta$ : 1 — 2, 2 — 1, 3 — 0.05. Координаты выбраны таким образом, чтобы выявить вид функциональной зависимости  $f_x(\sigma_{xx})$ . Прямые линии — соответствующие линейные приближения.

Для определения дисперсии напряжения вблизи границы, являющегося результатом сложения напряжений от отдельных случайно расположенных дислокаций, воспользуемся известной теоремой, согласно которой дисперсия суммы случайных величин (при весьма общих предположениях) равна сумме их дисперсий [11]. В нашем случае дисперсия  $D_n$  напряжения  $\sigma_{xx}^{(n)}$ , создаваемого отдельной ( $n$ -й) дислокацией, определяется функцией распределения  $f_n(y_n)$  случайной координаты  $y_n$  этой дислокации с регулярным положением  $y_n^0 = y + nD_y$ . Дисперсия может быть найдена с помощью соотношения (1), в котором следует произвести замену  $y \rightarrow y_n = y_n^0 + \Delta_n$ , где  $\Delta_n$  — случайное смещение  $n$ -й дислокации, а именно

$$D_n = \int (\sigma_{xx}^{(n)} - \langle \sigma_{xx}^{(n)} \rangle)^2 f_n(y_n) dy_n, \quad (12)$$

где

$$\langle \sigma_{xx}^{(n)} \rangle = \int \sigma_{xx}^{(n)}(y_n) f_n(y_n) dy_n. \quad (13)$$

Для простоты сделаем (совершенно непринципиальное) предположение, что случайные координаты  $y_n$  дислокаций равномерно распределены в одинаковых интервалах  $y_n^0 - \Delta < y_n < y_n^0 + \Delta$  шириной  $2\Delta$ . Тогда можно

воспользоваться приближенными соотношениями<sup>6</sup>

$$\langle \sigma_{xx}^{(n)} \rangle = \frac{1}{2\Delta} \int_{y_n^0 - \Delta}^{y_n^0 + \Delta} \sigma_{xx}^{(n)} dy_n \approx \sigma_{xx}^{(n)}(y_n^0) + \frac{\Delta^2}{6} \left( \partial^2 \sigma_{xx}^{(n)} / \partial y_n^2 \right) \Big|_{y_n=y_n^0} + \dots, \quad (14)$$

$$\langle \langle \sigma_{xx}^{(n)} \rangle \rangle = \frac{1}{2\Delta} \int_{y_n^0 - \Delta}^{y_n^0 + \Delta} \left( \sigma_{xx}^{(n)} \right)^2 dy_n \approx \left[ \sigma_{xx}^{(n)}(y_n^0) \right]^2 + \frac{\Delta^2}{6} \left( \partial^2 \left[ \sigma_{xx}^{(n)} \right]^2 / \partial y_n^2 \right) \Big|_{y_n=y_n^0} + \dots, \quad (15)$$

из которых следует, что

$$D_n = \langle \left( \sigma_{xx}^{(n)} \right)^2 \rangle - \left( \langle \sigma_{xx}^{(n)} \rangle \right)^2 \approx \frac{\Delta^2}{3} \left( \partial \sigma_{xx}^{(n)} / \partial y_n \right)^2 \Big|_{y_n=y_n^0}. \quad (16)$$

Согласно (1), входящая в (16) производная равна

$$\partial \sigma_{xx}^{(n)} / \partial y_n \Big|_{y_n=y_n^0} = b\sigma_0 \left[ \frac{4(y + nD_y)^2 [3x^2 + (y + nD_y)^2]}{[x^2 + (y + nD_y)^2]^3} - \frac{3}{x^2 + (y + nD_y)^2} \right]. \quad (17)$$

Наконец, дисперсия полного напряжения  $\sigma_{xx}$  находится как сумма дисперсий  $D_n$  напряжений отдельных дислокаций

$$D = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \approx \frac{\sigma_0^2 b^2 \Delta^2}{3D_y^4} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{4(n+Y)^2 [3X^2 + (n+Y)^2]}{[X^2 + (n+Y)^2]^3} - \frac{3}{X^2 + (n+Y)^2} \right]^2, \quad (18)$$

где  $X = x/D_y$ ,  $Y = y/D_y$ .

Путем тождественных алгебраических преобразований выражение (18) можно представить в виде

$$D \approx \frac{\sigma_0^2 b^2 \Delta^2}{3D_y^4} \left( \Sigma_2 + 8X^2 \Sigma_3 - 64X^6 \Sigma_5 + 64X^8 \Sigma_6 \right), \quad (19)$$

где  $\Sigma_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [X^2 + (n+Y)^2]^{-k}$ .

Входящие в (19) суммы  $\Sigma_k$  легко вычисляются, если воспользоваться рекуррентной формулой

<sup>6</sup> Аналогичные соотношения получаются и в случае, когда координаты  $y_n$  распределены по Гауссу с дисперсией  $\Delta^2$ .

$\Sigma_{k+1} = -(1/2kX)[\partial \Sigma_k / \partial X]$  и использовать известное соотношение [6]

$$\Sigma_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{X^2 + (n+Y)^2} = \left( \frac{\pi}{X} \right) \frac{\text{sh } 2\pi X}{\text{ch } 2\pi X - \cos 2\pi Y}. \quad (20)$$

В дальнейшем ограничимся случаем, когда  $2\pi X \gtrsim 1$ . При этом  $\Sigma_1 \approx \pi/X$  и соответственно

$$\Sigma_2 = \frac{\pi}{2X^3}, \quad \Sigma_3 = \frac{3\pi}{8X^5}, \quad \Sigma_4 = \frac{5\pi}{16X^7}, \quad \Sigma_5 = \frac{35\pi}{128X^9}, \quad \Sigma_6 = \frac{63\pi}{256X^{11}}. \quad (21)$$

Окончательно получаем

$$D \approx \frac{7\pi}{12} \sigma_0^2 \left( \frac{b^2 \Delta^2}{x^3 D_y} \right). \quad (22)$$

Сравнивая полученное выражение для  $D$  с дисперсией распределения (11), можно найти параметр  $\sigma_1$ , определяющий все свойства этого распределения,

$$\sigma_1 = \sigma_1(x, \Delta, \theta) = \left( \frac{35\pi}{18} \right)^{1/2} \left( \frac{b\Delta}{x^{3/2} D_y^{1/2}} \right) \sigma_0 \approx 3.5\sigma_0 \sqrt{\sin \frac{\theta}{2}} \left( \frac{a^{1/2} \Delta}{x^{3/2}} \right), \quad (23)$$

где самое правое выражение получено в предположении  $b = a$  и учтена связь между углом разориентации  $\theta$  и периодом  $D_y$  системы краевых дислокаций  $D_y = a/[2 \sin(\theta/2)]$ .

Теперь, наконец, мы можем записать явное выражение для функции  $f_x(\sigma_{xx})$  распределения напряжений вблизи границы и (в соответствии с описанной выше схемой) рассчитать с ее помощью критический ток межзеренного джозефсоновского контакта. Нормированная (на отрезке  $-\sigma_1 < \sigma < \sigma_1$ ) функция распределения имеет вид<sup>7</sup>

$$f_x(\sigma) = \frac{3}{\sigma_1^3} \sigma (\sigma_1 - \sigma), \quad (24)$$

что позволяет записать введенную выше вероятность  $p(x)$  следующим образом:

$$p(x) = p_0 \int_{-\sigma_c}^{\sigma_c} f_x(\sigma) d\sigma \left[ 1 - \int_{-\sigma_c}^{\sigma_c} f_x(\sigma) d\sigma \right] = 3p_0 \left( \frac{\sigma_c}{\sigma_1} \right)^2 \times \left( 1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_1} \right)^2 \left[ 1 + \frac{4}{3} \left( \frac{\sigma_c}{\sigma_1} \right) \left( 1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_1} \right) \right]. \quad (25)$$

<sup>7</sup> Можно показать, что функция распределения (24) описывается простым скейлинговым соотношением. Введем обозначение  $\sigma_{11} = \sigma(x = \Delta = D_y = a)$ . Тогда при  $x/a = \Delta/a = D_y/a = 1$  нормированную функцию распределения (11) можно записать в виде  $f_{11}(\sigma) = (3/\sigma_{11}^3) \sigma (\sigma_{11} - \sigma)$ . Теперь нетрудно видеть, что нормированная функция распределения для произвольных значений  $x$ ,  $\Delta$  и  $D_y$  может быть следующим образом выражена через функцию  $f_{11}$ :  $f(\sigma) = k f_{11}(k\sigma)$ . Здесь  $k$  — параметр скейлинга, который в соответствии с (22) равен  $k = (x^3 D_y)^{1/2} / (b\Delta)$ .

Согласно (25), ширина "плохой" полосы не может превышать некоторого значения  $x_1$ , определяемого условием  $\sigma_1 = \sigma_c$ :  $x_1 \approx 2.3a(\sigma_0/\sigma_c)^{2/3}(\Delta/a)^{2/3}[\sin(\theta/2)]^{1/3}$  (так, при  $\Delta = a$ ,  $\sigma_c = 0.01\sigma_0$ ,  $\theta = 5^\circ$  имеем  $x_1 \approx 40a$ ). Нормировочный множитель  $p_0$  может быть найден из условия нормировки вероятности  $\int_0^{x_1} p(x)dx = 1$  и оказывается равным

$$p_0 \approx (3.9/a)(\sigma_c/\sigma_0)^{2/3}(\Delta/a)^{-2/3}[\sin(\theta/2)]^{-1/3}.$$

На рис. 1 (вставка) представлены рассчитанные по (24) функции распределения  $p(x)$  для случая, когда "критическое" напряжение  $\sigma_c$  составляет 1% от  $\sigma_0$  (т.е.  $\sigma_c/\sigma_0 = 0.01$ ). В отличие от ситуации с периодической системой дислокаций (рис. 1) увеличение угла разориентации  $\theta$  приводит к смещению максимума вероятности  $p(x)$  в область больших значений  $x$ , что соответствует увеличению наиболее вероятной ширины  $\langle x \rangle$  "плохой" полосы.

## 2. Критический ток границы со случайной системой дислокаций

Критический ток неоднородного джозефсоновского перехода определяется соотношением (10). Подставляя в него найденную выше функцию  $p(x)$ , находим, наконец, межзеренный критический ток на границе со случайной системой краевых дислокаций

$$\langle i_c \rangle / i_0 = 27 \left[ \tilde{\gamma}(4, \mu) - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}(11/2, \mu) - 3 \tilde{\gamma}(7, \mu) + 4 \tilde{\gamma}(17/2, \mu) - \frac{4}{3} \tilde{\gamma}(10, \mu) \right], \quad (26)$$

где

$$\tilde{\gamma}(\nu, \mu) = \int_0^1 x^{\nu-1} e^{-\mu x} dx, \quad \mu = \mu_0 [\sin(\theta/2)]^{1/3},$$

$$\mu_0 = \frac{4.6}{(\xi_N/a)} \left[ \frac{\Delta/a}{\sigma_c/\sigma_0} \right]^{2/3}.$$

При  $\theta \geq 5^\circ$  и разумном выборе параметра  $\mu_0$  (см. далее)  $\mu \geq 10$ . Тогда основной вклад в сумму (26) вносит первое слагаемое  $\tilde{\gamma}(4, \mu) \approx 6/\mu^4$ . Это позволяет записать (26) в следующем, хотя и приближенном, но простом виде:

$$\langle i_c \rangle / i_0 \approx \frac{160}{\mu^4} = \frac{160/\mu_0^4}{[\sin(\theta/2)]^{4/3}}. \quad (27)$$

Формула (26) определяет средний критический ток джозефсоновского перехода. Локальная же плотность критического тока случайным образом меняется вдоль перехода и характеризуется функцией распределения

$$F(j_c) = p[x(j_c)] \left| \frac{dx}{dj_c} \right|, \quad x(j_c) = -\frac{\xi_N}{2} \ln \left( \frac{j_c}{j_0} \right), \quad (28)$$

где  $j_0$  — плотность критического тока в объеме.

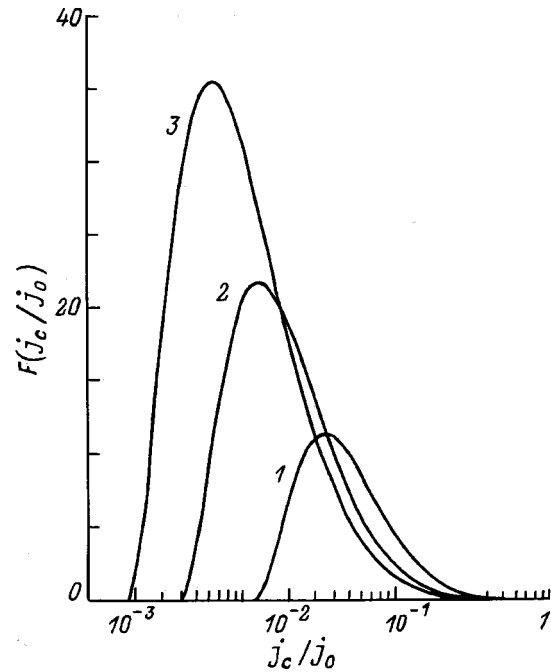
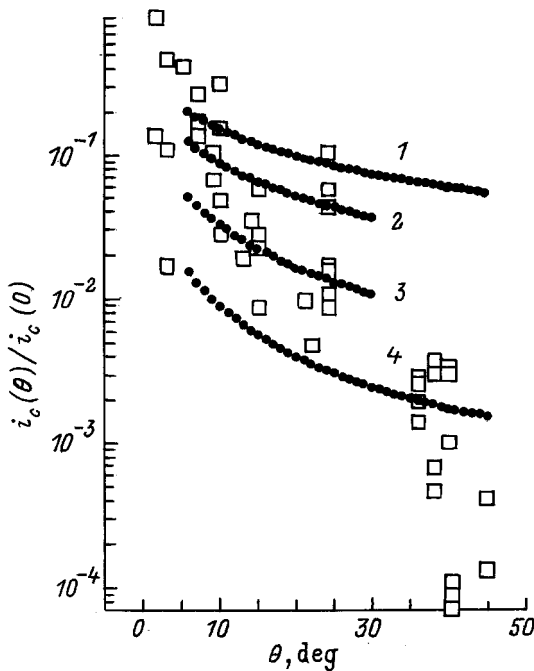


Рис. 5. Функция распределения локальной плотности критического тока на межзеренной границе со случайной системой дислокаций ( $\Delta/a = 2$ ,  $\xi_N/a = 10$ ). Угол разориентации  $\theta$  (deg): 1 — 10, 2 — 20, 3 — 30.

Как видно из рис. 5, с ростом угла разориентации  $\theta$  это распределение существенно сдвигается в сторону малых значений локальных плотностей критического тока, что и приводит к падению среднего критического тока перехода  $\langle i_c \rangle$  (рис. 3). Величина последнего определяется единственным (не считая, разумеется, угла  $\theta$ ) параметром  $\mu_0$  (см. (26)). Полагая  $\sigma_c/\sigma_0 = 0.01$ ,  $\xi_N/a = 10$  и  $\Delta/a = 1$  (доводы в пользу такого выбора см. в [3]), получаем  $\mu_0 \approx 10$ . В то же время из рис. 3 следует, что величина среднего критического тока перехода довольно сильно зависит от значения  $\mu_0$ : при увеличении  $\mu_0$  в 3 раза  $\langle i_c \rangle$  падает в 10–20 раз. Этим можно объяснить наблюдаемый в многочисленных экспериментах довольно сильный разброс данных. Действительно, характеризуемая параметром  $\Delta$  степень случайности системы дислокаций на границе может в какой-то мере определяться особенностями ее структуры, которые связаны с технологическим процессом ее образования, чистотой исходных материалов, свойствами подложки (для пленочных структур) и т.д.

О степени согласия предлагаемой модели с экспериментом можно судить по рис. 6, на котором наряду с расчетными угловыми зависимостями критического тока межзеренного джозефсоновского перехода представлены экспериментальные данные для джозефсоновских переходов в  $YBa_2Cu_3O_7$ -пленках на бикристаллических подложках [8]. Видно, что при углах разориентации  $\theta \lesssim 25^\circ$  сильно "разбросанные" экспериментальные данные попадают в полосу, которая ограничена теорети-



**Рис. 6.** Сравнение теоретических угловых зависимостей критического тока межзеренного джозефсоновского перехода (кружки) с экспериментальными данными (квадраты) для переходов в  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}$ -пленках на бикристаллических подложках [8].  $\mu_0$ : 1 — 8, 2 — 10, 3 — 16, 4 — 24.

ческими кривыми, отвечающими "разумным" значениям параметра  $\mu_0$ . При углах же  $\theta \gtrsim 40^\circ$  экспериментальные данные резко "уходят" вниз и, видимо, уже не могут быть описаны в рамках рассматриваемой модели. При таких углах взаимодействие сблизившихся дислокаций<sup>8</sup> становится уже, вероятно, настолько сильным, что приводит, с одной стороны, к перестройке ядер дислокаций (а значит, и создаваемых ими полей напряжений) и, с другой стороны, к появлению определенной корреляции в их расположении (что, конечно, не учитывалось выше, поскольку случайные положения дислокаций считались взаимно независимыми).

В заключение отметим, что описанная выше процедура расчета случайных напряжений пригодна не только для рассмотрения системы краевых дислокаций на границе наклона, но и при исследовании границы кручения. Последнюю представляют обычно как "сетку" (лежащих в плоскости  $uz$  границы) винтовых дислокаций, состоящих из двух периодических (с периодом  $D$ ) систем дислокаций: в одной из них дислокации параллельны оси  $z$ , а в другой — оси  $y$ . Используя известные выражения [6] для напряжений, создаваемых отдельными винтовыми дислокациями, и развитый выше метод расчета, можно

<sup>8</sup> Для угла разориентации  $\theta = 40^\circ$  расстояние между дислокациями, формально вычисляемое по формуле  $D_y = a/[2 \sin(\theta/2)]$ , равно  $1.3a$ , что сравнимо с размером дислокационных ядер. Конечно, говорить о применимости дислокационной модели в таких условиях уже не приходится.

найти дисперсию распределения напряжений случайной системы винтовых дислокаций на границе кручения

$$D(\sigma_{zy}) \approx \frac{\pi}{6}(1-\mu)^2\sigma_0^2 \left( \frac{b^2\Delta^2}{x^3D} \right),$$

$$D(\sigma_{xy}) = D(\sigma_{zx}) \approx \frac{\pi}{12}(1-\mu)^2\sigma_0^2 \left( \frac{b^2\Delta^2}{x^3D} \right). \quad (29)$$

Видно, что (при прочих равных условиях) напряжения вблизи границы кручения не сильно отличаются от напряжений на границе наклона (см. (22)), так что есть все основания ожидать, что токонесящие свойства этих границ будут близки. Эксперимент [8] подтверждает этот вывод.

### 3. Остаточный критический ток неоднородного джозефсоновского перехода в сильном магнитном поле

Для расчета многих физических свойств границы со случайной системой дислокаций необходимо знать не только функцию распределения напряжений  $f_x(\sigma_{ik})$ , но также и корреляционную функцию напряжений. Чтобы найти ее, разобьем функцию  $\sigma_n(y) = \sigma_{ik}(y + nD + \Delta_n)$  на две части: регулярную —  $\sigma_n^0(y) = \sigma_{ik}(y + nD)$ , соответствующую  $\Delta_n = 0$ , и случайную —  $\sigma_n^*(y) = \sigma_n(y) - \sigma_n^0(y)$ , которую можно представить в виде

$$\sigma_n^*(y) \approx \Delta_n \frac{\partial \sigma_{ik}(y)}{\partial y} \Big|_{y=y+nD}.$$

Полное напряжение равно  $\sigma_{ik}(y) = \sum_n \sigma_n(y)$ , а его корреляционная функция есть

$$\psi(\delta) = \langle\langle \sigma_{ik}(y)\sigma_{ik}(y+\delta) \rangle\rangle, \quad (30)$$

где символ двойного усреднения означает усреднение и по  $y$  (для регулярной и случайной частей), и по  $\Delta_n$  (для случайной части).

Далее

$$\begin{aligned} \psi(\delta) &= \langle\langle \sum_n \sigma_n(y) \cdot \sum_m \sigma_m(y+\delta) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \sum_n [\sigma_n^0(y) + \sigma_n^*(y)] \cdot \sum_m [\sigma_m^0(y+\delta) + \sigma_m^*(y+\delta)] \rangle\rangle = \langle \sum_n \sigma_n^0(y) \cdot \sum_m \sigma_m^0(y+\delta) \rangle \\ &+ \langle\langle \sum_n \sigma_n^0(y) \cdot \sum_m \sigma_m^*(y+\delta) \rangle\rangle \\ &+ \langle\langle \sum_n \sigma_n^*(y) \cdot \sum_m \sigma_m^0(y+\delta) \rangle\rangle \\ &+ \langle\langle \sum_n \sigma_n^*(y) \cdot \sum_m \sigma_m^*(y+\delta) \rangle\rangle. \end{aligned}$$



Второе и третье слагаемое последнего выражения для  $\psi(\delta)$  равны нулю, и последнее есть

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\langle \sum_n \sigma_n^*(y) \cdot \sum_m \sigma_m^*(y + \delta) \right\rangle \right\rangle \\ &= \left\langle \left\langle \sum_n \sigma_n^*(y) \sigma_n^*(y + \delta) \right\rangle \right\rangle + \left\langle \left\langle \sum_{m \neq n} \sigma_m^*(y) \sigma_n^*(y + \delta) \right\rangle \right\rangle, \end{aligned}$$

где второй член тоже равен нулю.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \psi(\delta) &= \left\langle \sum_n \sigma_n^0(y) \sum_m \sigma_m^0(y + \delta) \right\rangle \\ &+ \left\langle \left\langle \sum_n \sigma_n^*(y) \sigma_n^*(y + \delta) \right\rangle \right\rangle. \end{aligned} \quad (31)$$

Для винтовых дислокаций

$$\sigma_n^0(y) = \frac{\alpha y}{x^2 + y^2},$$

$$\Delta_n \frac{\partial \sigma(y)}{\partial y} \Big|_{y=y+nD} = \left( \frac{\alpha \Delta_n}{D^2} \right) \frac{X^2 - (Y + n)^2}{[X^2 + (Y + n)^2]^2},$$

где  $\alpha = b\sigma_0(1 - \mu)$ , и

$$\sum_n \sigma_n(y) = \left( \frac{\pi \alpha}{D} \right) \frac{\sin 2\pi Y}{\text{ch } 2\pi X - \cos 2\pi Y},$$

где  $X = x/D$ ,  $Y = y/D$ .

Поэтому первый член выражения (31) для  $\psi(\delta)$  равен

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_n \sigma_n^0 \cdot \sum_m \sigma_m^0(y + \delta) \right\rangle = \left( \frac{\pi \alpha}{D} \right)^2 \\ & \times \left\langle \frac{\sin 2\pi Y \sin[2\pi(Y + t)]}{[\text{ch } 2\pi X - \cos 2\pi Y][\text{ch } 2\pi X - \cos(2\pi(Y + t))]} \right\rangle \\ & \approx \left( \frac{\pi \alpha}{D} \right)^2 \frac{\cos 2\pi t}{2 \text{ch}^2 2\pi X} \approx \left( \frac{\pi \alpha}{D} \right)^2 \exp(-4\pi X) \cos 2\pi t, \end{aligned}$$

где  $t = \delta/D$ .

Далее

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\langle \sum_n \sigma_n^*(y) \sigma_n^*(y + \delta) \right\rangle \right\rangle = (\alpha/D^2)^2 \\ & \times \left\langle \left\langle \sum_n \frac{[X^2 - (Y + n)^2][X^2 - (Y + n + t)^2]}{[X^2 + (Y + n)^2]^2 [X^2 + (Y + n + t)^2]^2} \Delta_n^2 \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

Для случайного распределения  $\Delta_n$ , равномерного в интервале  $\Delta < \Delta_n < \Delta$ , усреднение по  $\Delta_n$  дает

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\langle \sum_n \sigma_n^*(y) \sigma_n^*(y + \delta) \right\rangle \right\rangle = \frac{1}{3} (\alpha \Delta / D^2)^2 \\ & \times \left\langle \left\langle \sum_n \frac{[X^2 - (Y + n)^2][X^2 - (Y + n + t)^2]}{[X^2 + (Y + n)^2]^2 [X^2 + (Y + n + t)^2]^2} \right\rangle \right\rangle, \end{aligned}$$

где еще нужно произвести усреднение по  $Y$ . Для этого необходимо вычислить (и усреднить по  $y$ ) соответствующую сумму.

Эту сумму можно найти описанным выше способом. При  $2\pi X \gg 1$  она равна

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\langle \sum_n \sigma_n^*(y) \sigma_n^*(y + \delta) \right\rangle \right\rangle \sim 2\pi (\alpha \Delta / D^2)^2 \frac{X(4X^2 - t^2)}{(4X^2 + t^2)^3} \\ & \sim \sigma_0^2 \left( \frac{b^2 \Delta^2}{x^3 D} \right) \frac{4 - (\delta/x)^2}{[4 + (\delta/x)^2]^3}, \end{aligned}$$

что согласуется с полученными выше выражениями (22), (29) для дисперсии случайной части напряжения  $\sigma^* = \sum_n \sigma_n^*(y)$ .

Следовательно, при  $2\pi X \gg 1$

$$\begin{aligned} \psi(\delta) &\approx \sigma_0^2 \left( \frac{\pi b}{D} \right)^2 \left[ \exp(-4\pi X) \cos 2\pi t \right. \\ &+ \text{const} \left( \frac{\Delta}{D} \right)^2 \frac{X(4X^2 - t^2)}{(4X^2 + t^2)^3} \left. \right], \end{aligned} \quad (32)$$

где  $\text{const} \sim 1$ . Полагая  $b$ ,  $\Delta \sim a$  и считая, что характерное значение  $x$  определяется шириной "плохой" полосы  $\langle x \rangle \sim 10a$ , легко показать, что первым слагаемым выражения для  $\psi(\delta)$  (соответствующим системе периодических дислокаций) можно пренебречь при  $\theta \geq 5^\circ$ .

Ширина  $\langle x \rangle$  "плохой" приграничной полосы сама по себе является случайной функцией координаты  $y$  вдоль границы. Наличие непосредственной связи между локальными возмущениями напряжения и значениями  $\langle x \rangle$  означает, что корреляционные свойства  $\langle x \rangle$  также могут быть приближенно описаны корреляционной функцией  $\psi(\delta)$ .

Можно полагать, что корреляционная функция  $\langle x \rangle$  близка к корреляционной функции напряжения при  $x = \langle x \rangle$  и относительно медленно (неэкспоненциально) спадает при  $\delta \geq \langle x \rangle$ . Это означает, что корреляционная функция локальной плотности критического тока  $j_c \propto \exp(-\langle x \rangle / \xi_n)$  (который экспоненциально зависит от  $\langle x \rangle$ ) может быть записана в виде

$$\langle j_c(y) j_c(y + \delta) \rangle \propto e^{-\delta / \langle x \rangle}. \quad (33)$$

Таким образом, ширина "плохой" полосы  $\langle x \rangle$  играет роль корреляционной длины локальной плотности критического тока, которая в модели Янсона [12] определяет так называемый остаточный критический ток  $i_{c,\text{res}}$ . Последний представляет собой критический ток бесконечного джозефсоновского перехода в сильном магнитном поле (при условии, что статистические свойства локальной плотности критического тока описываются экспоненциальной корреляционной функцией типа (31)). Для неоднородного перехода конечной длины остаточный ток определяет относительную высоту плато в магнитополовой зависимости его полного критического тока  $i_c(H)$  [12]

$$\frac{i_{c,\text{res}}}{i_c(H=0)} \sim \left( D_j \frac{\langle x \rangle}{L} \right)^{1/2}, \quad (34)$$

где  $L$  — длина границы,  $D_j = \langle (j_c - \langle j_c \rangle)^2 \rangle / \langle j_c \rangle^2$  — дисперсия функции распределения локальной плотности

критического тока при  $H = 0$ , а  $\langle j_c \rangle \propto i_c(H = 0)/L$  — средняя величина  $j_c$  при  $H = 0$ .

В работе [13] измерялся остаточный критический ток джозефсоновских переходов длиной  $L \sim 20 \mu\text{m}$  в  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ -пленках на бикристаллических подложках с углами разориентации  $\theta = 10\text{--}30^\circ$ . Величина остаточного критического тока составляла  $i_{c,\text{res}}/i_c(H = 0) = 0.1\text{--}0.01$ . Для того чтобы понять, соответствуют ли эти значения тем, которые предсказываются соотношением (34), используем данные, представленные на рис. 2, 5. С их помощью можно заключить, что  $i_{c,\text{res}}/i_c(H = 0) \sim 10(a/L)^{1/2}$ . Полагая  $a \approx 4 \cdot 10^{-8}$  см и  $L = 20 \mu\text{m}$ , получаем  $J_{c,\text{res}}/J_c(H = 0) \sim 0.1$ , что неплохо согласуется с экспериментальными данными [13].

Работа поддержана РФФИ (грант № 98-02-17412а).

## Список литературы

- [1] M.F. Chisholm, S.J. Pennycook. *Nature* **351**, 47 (1991).
- [2] S.E. Babcock, J.L. Vargas. *Annu. Rev. Mater. Sci.* **25**, 193 (1995).
- [3] Е.З. Мейлихов. *ЖЭТФ* **110**, 1453 (1996).
- [4] Yimei Zhu, J.M. Zuo, A.R. Moodenbaugh, M. Suenaga. *Phil. Mag.* **A70**, 6, 969 (1994).
- [5] R.G. Munro, H. Chen. *J. Am. Cer. Soc.* **79**, 603 (1996).
- [6] J.P. Hirth, J. Lothe. *Theory of Dislocations*. McGraw Hill, N. Y. (1968).
- [7] D. Dimos, P. Chaudhari, J. Mannhart, F.K. LeGoues. *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1653 (1988).
- [8] R. Gross. *Proc. Int. Conf. on Polycryst. Semicond. Saint Malo* (1993).
- [9] M.St. Louis-Weber, V.P. Dravid, V.R. Todt, X.F. Zhang, D.J. Miller, U. Balachandran. *Phys. Rev.* **B54**, 16 238 (1996).
- [10] S. Chandrasekhar. *Rev. Mod. Phys.* **15**, 1 (1943).
- [11] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. Wiley, N. Y. (1970). (В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Мир, М. (1970). Т. 1).
- [12] И.К. Янсон. *ЖЭТФ* **58**, 1497 (1970).
- [13] E. Sarnelli, P. Chaudhary, J. Lacey. *Appl. Phys. Lett.* **62**, 777 (1993).