

Структура и плавление дипольных кластеров

© Ю.Е. Лозовик, Е.А. Ракоц

Институт спектроскопии Российской академии наук,
142092 Троицк, Московская обл., Россия

(Поступила в Редакцию 26 января 1998 г.)

Рассматриваются двумерные микрокластеры из частиц, отталкивающихся по дипольному закону и удерживаемых внешним квадратичным потенциалом. Модель описывает ряд физических систем, в частности электроны в полупроводниковых структурах вблизи металлического электрода либо непрямые экситоны в связанных полупроводниковых точках и т.п. Обнаружены два вида упорядочения частиц в кластерах: образование треугольной решетки и образование оболочечной структуры, конкурирующие между собой. Рассчитаны равновесные конфигурации кластеров с $N = 1 - 40$ частицами. Исследованы температурные зависимости структуры, потенциальной энергии и среднеквадратичного радиального и углового смещения. С помощью этих характеристик исследовано плавление кластеров. Плавление происходит в одну или в две стадии в зависимости от N . Для микрокластера, состоящего из двух оболочек, плавление происходит в две стадии: при небольших температурах — из замороженной фазы в состояние с вращательной переориентацией "кристаллических" оболочек относительно друг друга; затем — переход с исчезновением радиального порядка. В кластере из большого числа оболочек полное плавление происходит в одну стадию. Это связано с тем, что потенциальный барьер относительно вращения оболочек существенно меньше барьера относительно перескока частицы из одной оболочки в другую для малого N и одного порядка для больших N . Предложен способ предсказания характера плавления в оболочечных кластерах с помощью сравнения потенциальных барьеров вращения оболочек и перескока частиц между оболочками.

В полупроводниках малых размеров в металлической матрице либо вблизи металлического электрода должны играть большую роль силы электростатического изображения. Их роль может стать кардинальной, например, для полупроводниковых структур с малой шириной запрещенной зоны 2Δ , для которых силы изображения вблизи границы с металлом могут инициировать переход полупроводник–металл [1]. Имеется и ряд иных эффектов перестройки спектра под действием сил изображения. Например, возникают экситонные состояния, локализованные вблизи границы полупроводник–металл [2]. Силы изображения приводят к увеличению их радиуса и к переходу Мотта — полупроводник–металл — в системе экситонов [2]. Еще один интересный физический эффект состоит во влиянии изображения на кристаллизацию в электронной системе [3–5]. При учете сил изображения на границе полупроводник–металл кулоновский закон взаимодействия заменяется на больших расстояниях дипольным, и это отражается на фазовой диаграмме системы, в частности приводит к квантовому плавлению при малых концентрациях (в отличие от кулоновских систем) [3–5]. По дипольному закону отталкиваются на больших расстояниях также и экситоны с пространственно разделенными электронами и дырками в связанных квантовых ямах, что должно сильно сказываться на фазовой диаграмме системы [6–11], а также частицы в слое магнитной жидкости, слое диэлектрических кластеров на поверхности электролита и т.п. (см. [12] и ссылки там).

Протяженные двумерные дипольные системы исследовались в ряде работ (см. [12–14] и ссылки там). Например, в [14] методом молекулярной динамики исследованы плавление и разнообразные характеристики

дипольных систем. В широкой области температуры и плотности были рассчитаны термодинамические функции, структурный фактор, диэлектрическая функция и другие характеристики системы. В дипольной системе (как и в леннард–джонсовской) в отличие от кулоновской системы [14] в точке плавления $\Gamma_d = \frac{D^2}{2a^3 k_B T} = 62$ имеются заметные скачки термодинамических величин, например скачок внутренней энергии на одну частицу (D — дипольный момент, a — среднее расстояние между соседними частицами, k_B — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура).

С другой стороны, в последние годы вызывает большой научный и прикладной интерес изучение микрокластеров — систем, состоящих из малого числа нейтральных или заряженных частиц. Эти системы интересны сильной структурной чувствительностью к числу частиц, необычными перестройками структуры с ростом температуры и т.п. (см., например, [15–21]). В случае отталкивательного потенциала взаимодействия между частицами кластер удерживается внешним полем. Ранее кулоновские кластеры были изучены в [17–20], логарифмические (кластеры из вихрей) — в [21]. Однако дипольные кластеры оставались неизученными. Данная работа посвящена изучению дипольных кластеров, анализу их структуры и характера их плавления в зависимости от числа частиц.

Работа построена следующим образом. В разделе 1 мы описываем физические реализации дипольных кластеров. В разделе 2 описаны конфигурации дипольных кластеров в глобальных и локальных минимумах потенциальной энергии и изучена конкуренция оболочечной и треугольной структур при росте числа частиц в дипольных микрокластерах. В разделе 3 приведены результаты рас-

четов плавления. Описана обнаруженная нами зависимость сценария плавления от числа частиц: для малых кластеров плавление происходит в два этапа (сначала ориентационное плавление оболочек, затем расплываются оболочки), а для больших кластеров — в один этап как переход первого рода. Проведено сравнение барьеров относительно вращения оболочек относительно друг друга с сохранением внутреннего кристаллического строения оболочек и относительно перескока частиц между оболочками.

1. Физическая модель

Электроны в тонком полупроводнике или в квантовой точке вблизи границы с металлом взаимодействуют друг с другом по закону $U(x) = \frac{e^2}{\epsilon x} - \frac{e^2}{\epsilon \sqrt{x^2 + 4d^2}}$, где второе слагаемое отвечает притяжению одного электрона к электростатическому изображению другого (x — расстояние между электронами вдоль поверхности, d — расстояние до металла, e — заряд электрона, ϵ — диэлектрическая проницаемость среды).

Если характерное расстояние между электронами существенно больше расстояния до границы ($x \gg d$), то $U(x) \approx \frac{2e^2 d^2}{\epsilon x^3}$, т.е. на больших расстояниях электроны в полупроводнике вблизи металла взаимодействуют по дипольному закону. Аналогичным образом взаимодействуют электроны над тонкой пленкой гелия, находящейся над металлическим электродом. Далее мы рассматриваем классический случай, т.е. полагаем, что дебройлевская длина волны электрона $\lambda_D \ll n^{-1/2}$, где n — концентрация электронов.

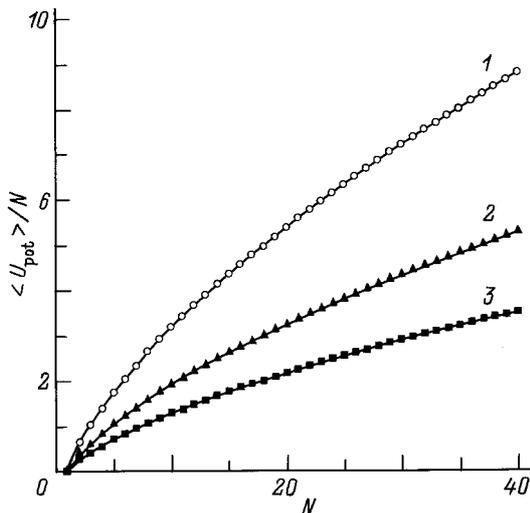


Рис. 1. Потенциальная энергия на одну частицу как функция числа частиц N для двумерных дипольных кластеров $\frac{\langle U_{pot} \rangle}{N}$. 1 — полная потенциальная энергия $\frac{\langle U_{pot} \rangle}{N}$, 2 — средняя потенциальная энергия всех взаимодействий между частицами $\frac{\langle U_{int} \rangle}{N} = \frac{1}{2N} \sum \langle U_{ij} \rangle = \frac{1}{2N} \sum \frac{1}{r_{ij}}$, 3 — внешняя потенциальная энергия $\frac{\langle U_{ext} \rangle}{N} = \frac{1}{N} \alpha \sum r_i^2$.

Таблица 1. Оболочечная структура и потенциальная энергия дипольных кластеров, удерживаемых гармоническим потенциалом

Число частиц	Числа заполнения оболочек	Потенциальная энергия
1	1	$0.0000000 \cdot 10^0$
2	2	$1.2932046 \cdot 10^0$
3	3	$3.0418217 \cdot 10^0$
4	4	$5.5208363 \cdot 10^0$
5	5	$8.7856477 \cdot 10^0$
6	1,5	$1.2289769 \cdot 10^1$
7	1,6	$1.6281382 \cdot 10^1$
8	1,7	$2.1083395 \cdot 10^1$
9	2,7	$2.6313547 \cdot 10^1$
10	3,7	$3.1901163 \cdot 10^1$
11	3,8	$3.7616955 \cdot 10^1$
12	3,9	$4.3999784 \cdot 10^1$
13	4,9	$5.0634105 \cdot 10^1$
14	4,10	$5.7895957 \cdot 10^1$
15	5,10	$6.5399893 \cdot 10^1$
16	1,5,10	$7.3049228 \cdot 10^1$
17	1,6,10	$8.1136231 \cdot 10^1$
18	1,6,11	$8.9506331 \cdot 10^1$
19	1,6,12	$9.8421773 \cdot 10^1$
20	1,7,12	$1.0776650 \cdot 10^2$
21	2,7,12	$1.1740007 \cdot 10^2$
22	2,8,12	$1.2715322 \cdot 10^2$
23	3,8,12	$1.3727919 \cdot 10^2$
24	3,8,13	$1.4753113 \cdot 10^2$
25	3,9,13	$1.5814029 \cdot 10^2$
26	4,9,13	$1.6921679 \cdot 10^2$
27	4,9,14	$1.8047079 \cdot 10^2$
28	4,10,14	$1.9198318 \cdot 10^2$
29	5,10,14	$2.0404328 \cdot 10^2$
30	5,10,15	$2.1616304 \cdot 10^2$
31	1,5,10,15	$2.2839087 \cdot 10^2$
32	1,6,12,13	$2.4093329 \cdot 10^2$
33	1,6,12,14	$2.5368468 \cdot 10^2$
34	1,6,12,15	$2.6669867 \cdot 10^2$
35	1,6,12,16	$2.8012640 \cdot 10^2$
36	1,6,12,17	$2.9407878 \cdot 10^2$
37	1,7,13,16	$3.0825097 \cdot 10^2$
38	2,8,13,15	$3.2244908 \cdot 10^2$
39	3,8,13,15	$3.3690883 \cdot 10^2$
40	3,9,14,14	$3.5144690 \cdot 10^2$

Мы рассматриваем двумерные кластеры с дипольным законом взаимодействия между частицами, удерживаемые внешним потенциалом $U_{ext}(r)$. Для электронов в полупроводниковой наноструктуре роль удерживающего потенциала играет граница наноструктуры. Для электронов над пленкой гелия роль бокового удерживающего потенциала может играть потенциал (небольшого) металлического электрода, погруженного в гелий. Удерживающий потенциал мы принимаем квадратичным: $U_{ext}(r_i) = \alpha r_i^2$, где α — положительная константа.

Таблица 2. Температуры плавления и потенциальные барьеры

	T_c	Γ_d	$U_{1,2}$
$N = 37$. Ориентационное плавление внешней оболочки относительно средней	–	–	$2.8 \cdot 10^{-1}$
$N = 37$. Ориентационное плавление средней оболочки относительно внутренней	–	–	$2.25 \cdot 10^{-1}$
$N = 37$. Полное плавление	$9.0 \cdot 10^{-3}$	59	$9.7 \cdot 10^{-2}$
$N = 10$. Ориентационное плавление внешней оболочки относительно внутренней	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$2.6 \cdot 10^4$	$3.5 \cdot 10^{-5}$
$N = 10$. Полное плавление	$7.0 \cdot 10^{-3}$	45	$5.6 \cdot 10^{-2}$

После масштабных преобразований

$$r \rightarrow \frac{\alpha^{1/5} \epsilon^{1/5}}{D^{2/5}} r, T \rightarrow \frac{k\epsilon^{2/5}}{\alpha^{3/5} D^{4/5}} T, U \rightarrow \frac{\epsilon^{2/5}}{\alpha^{3/5} D^{4/5}} U \quad (1)$$

гамильтониан принимает вид

$$H = \sum_{i>j} \frac{1}{r_{ij}^3} + \sum_i r_i^2. \quad (2)$$

Помимо вышеупомянутых физических реализаций гамильтониан описывает также кластер из экситонов с пространственно разделенными электронами и дырками в двухслойной структуре [6,11], удерживаемыми в "естественной" (обусловленной шероховатостью границ раздела) или искусственных связанных полупроводниковых точках, либо экситоны, поляризованные внешним электрическим полем. Этим гамильтонианом описывается и кластер из магнитных частиц в капле магнитной жидкости, кластер коллоидных частиц в плоской капле и т.д.

2. Равновесные конфигурации кластеров

Для нахождения равновесных конфигураций частиц использовался случайный поиск минимума потенциальной энергии системы с чередованием случайного движения оболочек в целом и случайного движения частиц. Максимальная величина шага уменьшалась (каждые 10^3 шагов примерно в 0.8–0.96 раз) от $5 \cdot 10^{-3}$ до $1 \cdot 10^{-6}$ в безразмерных единицах.

Были найдены а) локальные и б) глобальные минимумы потенциальной энергии. Оказалось, что малые дипольные кластеры (так же как кулоновские [17–20] и логарифмические [21]) имеют оболочечное строение при низких температурах.

Далее представлены результаты компьютерного моделирования.

Из рис. 1 можно сделать вывод о том, что внутренняя, внешняя и полная потенциальная энергии на одну частицу E/N растут почти линейно с увеличением числа частиц. Данный факт указывает на то, что при малом

числе частиц $N \leq 40$ система имеет свойства кластера и еще не приобретает свойств кристалла (для которого $E/N = \text{const}$).

В табл. 1 приведены числа заполнения оболочек и соответствующие потенциальные энергии для глобальных минимумов двумерных дипольных кластеров. Последовательное заполнение оболочек напоминает Периодическую систему элементов. Сначала (при малом N) все частицы располагаются по одной окружности вблизи центра системы (минимума удерживающего потенциала), составляя правильные многоугольники. Каждая оболочка может содержать не более определенного числа частиц. Когда все оболочки заполнены, т.е. содержат максимально возможное для них число частиц, появляется новая оболочка. При этом одна частица появляется в центре системы после добавления частицы к системе с конфигурацией (5, ...), две — после конфигурации (1, 7, ...), три — после конфигурации (2, 7, ...) или (2, 8, ...), четыре — после конфигурации (3, 9, ...), пять — после конфигурации (4, 10, ...). Похожие эффекты наблюдаются для кулоновских [17–20] и логарифмических [21] кластеров.

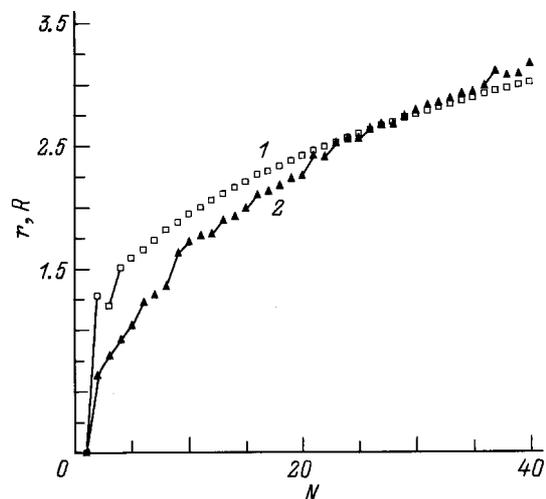


Рис. 2. Среднее расстояние между частицами r (1) и размер системы R (2) как функция числа частиц N для двумерных дипольных кластеров.

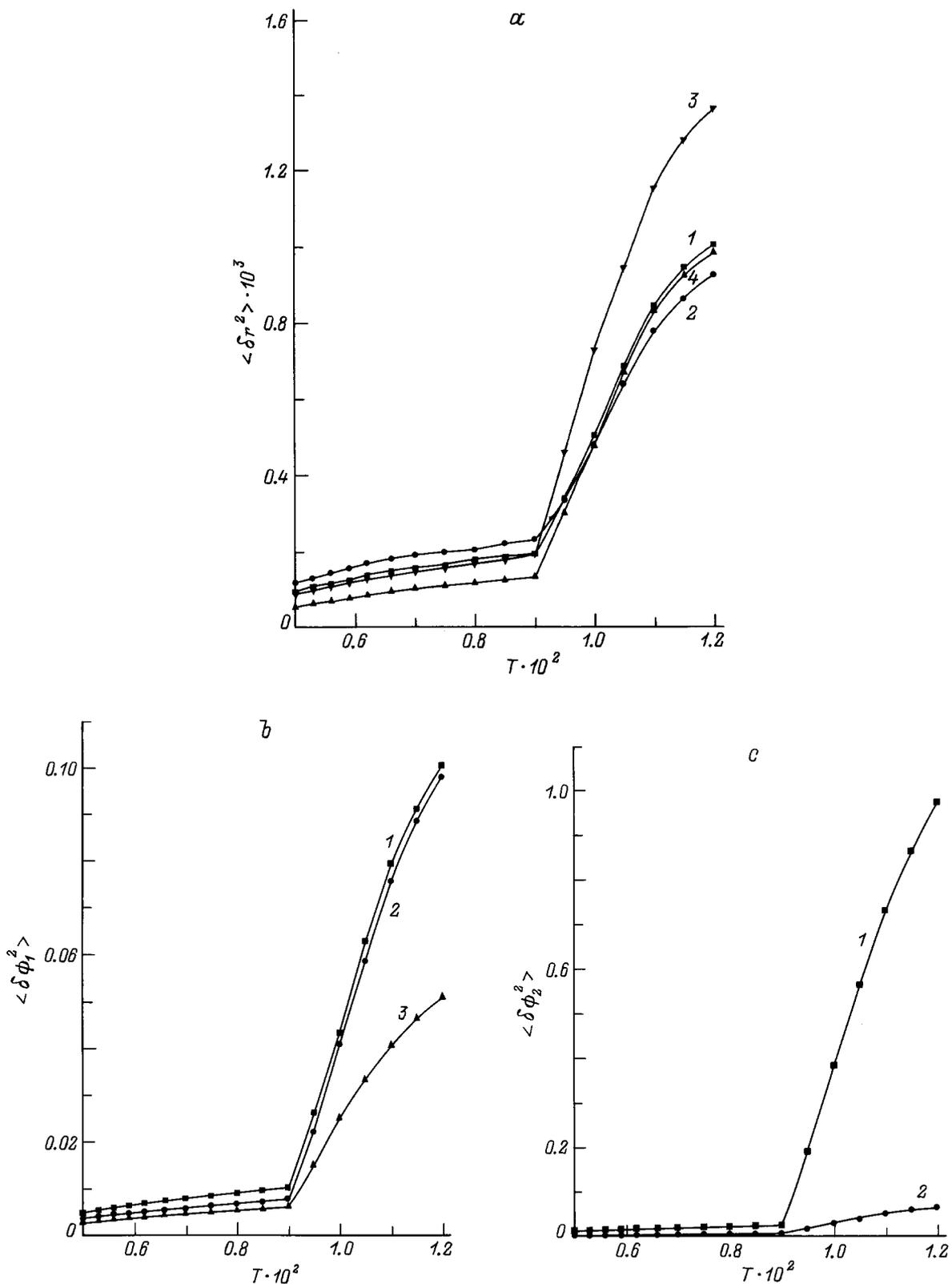


Рис. 3. Радиальное (a) и угловое (b, c) смещения как функция температуры для двумерного дипольного кластера. $N = 37$. a) 1 — полное РСС, 2 — РСС внешней оболочки, 3 — РСС средней оболочки, 4 — РСС внутренней оболочки; б) УСС относительно ближайших частиц своей оболочки: 1 — УСС внешней оболочки, 2 — УСС средней оболочки, 3 — УСС внутренней оболочки; в) УСС относительно ближайших частиц соседней оболочки: 1 — УСС средней оболочки относительно ближайших частиц внешней оболочки, 2 — УСС внутренней оболочки относительно ближайших частиц средней оболочки.

Поскольку удерживающий квадратичный потенциал является центрально-симметричным, казалось бы, оболочки в кластере должны иметь форму правильных многоугольников, вписанных в окружности. Однако это верно только для кластеров, состоящих из одной оболочки или из двух оболочек, внутренняя из которых состоит всего из одной частицы. При дальнейшем увеличении числа частиц в кластерах с малым N происходит спонтанное нарушение симметрии. Наиболее сильно это проявляется в кластере с двумя частицами в центре (в кластере с $N = 9$, см. табл. 1). В этом случае второй оболочке выгодно принять форму эллипса, так как первая оболочка состоит из двух частиц.

При увеличении N обнаруживается, что внутри кластера начинает зарождаться треугольная решетка. Впервые фрагменты треугольной решетки появляются уже для кластера из 12 частиц (конфигурация 3, 9 в табл. 1). Начиная с 32 частиц, в кластере все время преобладает треугольная структура: некоторые частицы нельзя полностью отнести к определенным оболочкам, они оказываются между оболочками, образуя фрагмент треугольной решетки (последний имеет центр вблизи границы кластера, а не в центре симметрии удерживающего потенциала). Например, в кластере из 37 частиц в конфигурации, соответствующей глобальному минимуму потенциальной энергии (табл. 1), распределение частиц по оболочкам получено в соответствии со следующим определением (см. [21]). Определим оболочку как выпуклый многоугольник из максимально возможного числа частиц (внутри которого находится предыдущая оболочка), удовлетворяющий правилу: максимальное расстояние от частицы данной оболочки до центра системы должно быть меньше минимального расстояния до центра системы от частицы соседней, внешней относительно нее оболочки. Тогда мы видим, что в оболочечной структуре существует дефект, однако частицы в основном образуют треугольную решетку, поэтому в кластере уже нельзя однозначно выделить оболочки. Таким образом, существуют два вида упорядочения: образование треугольной решетки и образование оболочечной структуры, которые конкурируют между собой. Для дипольных кластеров треугольная структура появляется при меньшем N , чем для кулоновских и логарифмических кластеров [17–21]. Данный факт можно объяснить тем, что дипольный потенциал взаимодействия является более близкодействующим. Поскольку правильная треугольная решетка обладает гексагональной симметрией, наблюдаются отклонения формы оболочек от окружностей для $N > 30$. Это явление аналогично "огранке" кристалла. Так, в дипольном кластере некоторые частицы находятся не на границе кластера, а на расстоянии порядка периода решетки от нее.

Из рис. 2 видно, что среднее расстояние между частицами монотонно возрастает при увеличении числа частиц (при $N > 3$), причем скорость его роста несколько падает с ростом N . Что же касается размера системы, то при общей тенденции его роста нельзя говорить о его

монотонной зависимости от N при всех N . Сопоставляя данные рис. 2 и табл. 1, можно сделать вывод о том, что размер системы R испытывает резкие скачки при появлении новой оболочки и при добавлении частицы в первую (от центра системы) оболочку. Если же при увеличении числа N на единицу кластер становится более симметричным, то размер системы может даже немного уменьшиться, как видно из рис. 2. В целом, размер системы растет примерно как \sqrt{N} , что отвечает постоянству плотности частиц.

3. Плавление и фазовые переходы

В этой работе мы использовали метод Монте-Карло со случайным движением оболочек как целых и случайным движением частиц для изучения зависимости различных физических величин от температуры. Такое сочетание случайных движений дает $\sim 10\%$ выигрыш в скорости сходимости. После нахождения равновесных конфигураций система нагревалась на температуру ΔT , которая менялась от $1 \cdot 10^{-6}$ до $5 \cdot 10^{-3}$, далее система удерживалась при новой температуре $4 \cdot 10^4$ шагов Монте-Карло. Затем рассчитывались статистические характеристики усреднением по $1 \cdot 10^6 - 1 \cdot 10^7$ шагов Монте-Карло. После этого следовал дальнейший нагрев с использованием описанной процедуры. Вычислялись следующие величины: 1) полная потенциальная энергия U_{pot} ; 2) радиальные среднеквадратичные смещения (РСС): полное и для каждой оболочки отдельно

$$\langle \delta r^2 \rangle = \frac{1}{N_R} \sum_{i=1}^{N_R} \frac{\langle r_i^2 \rangle - \langle r_i \rangle^2}{a^2}, \quad (3)$$

где N_R — полное число частиц или число частиц в оболочке, усреднение $\langle \rangle$ производится по различным конфигурациям Монте-Карло; 3) угловые среднеквадратичные

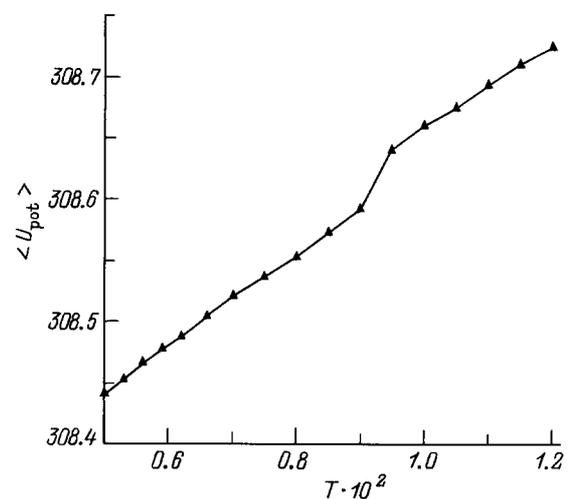


Рис. 4. Полная потенциальная энергия двумерного дипольного кластера $\langle U_{\text{pot}} \rangle$ как функция температуры. $N = 37$.

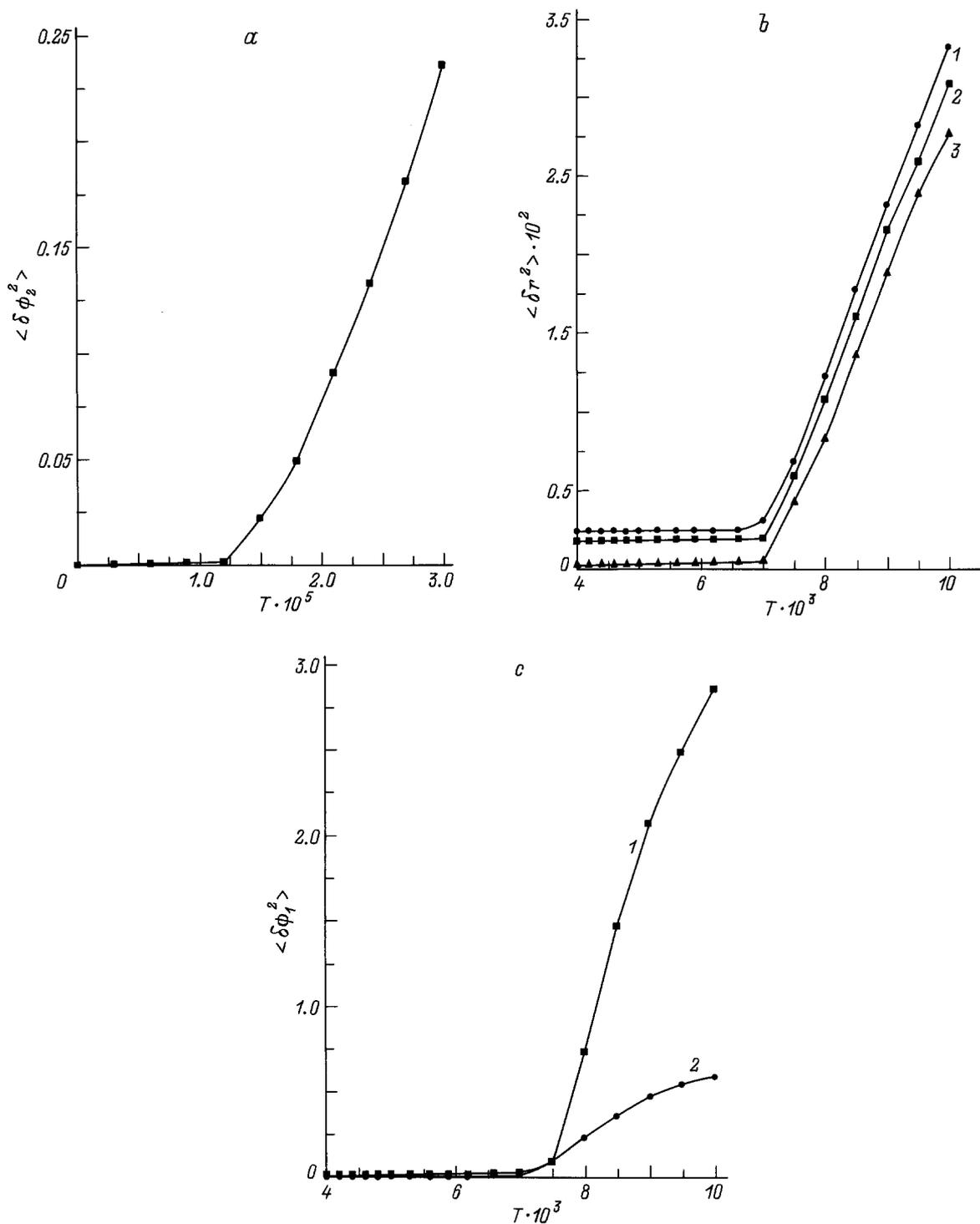


Рис. 5. Радиальное (*b*) и угловое (*a, c*) смещения как функции температуры для двумерного дипольного кластера. $N = 10$. *a*) УСС внешней оболочки относительно ближайших частиц внутренней оболочки; *b*) 1 — полное РСС, 2 — РСС внешней оболочки, 3 — РСС внутренней оболочки; *c*) УСС относительно ближайших частиц своей оболочки: 1 — УСС внешней оболочки, 2 — УСС внутренней оболочки.

смещения (УСС) относительно ближайших частиц своей и соседней оболочки

$$\langle \delta\phi_{1,2}^2 \rangle = \frac{1}{N_R} \sum_{i=1}^{N_R} \frac{\langle (\phi_i - \phi_{i,2})^2 \rangle - \langle (\phi_i - \phi_{i,2}) \rangle^2}{\phi_0^2}, \quad (4)$$

где i_1 и i_2 относятся к ближайшей частице из той же и из соседней оболочки, $2\phi_0 = \frac{2\pi}{N_R}$ — среднее угловое расстояние между соседними частицами для данной оболочки, состоящей из N_R частиц.

Температурная зависимость РСС для двумерного дипольного кластера с $N = 37$ показана на рис. 3, а. Полное РСС испытывает излом при температуре T_{c1} (табл. 2). Температурные зависимости РСС для каждой оболочки в отдельности в точности совпадают с температурной зависимостью полного РСС. При той же температуре испытывают излом УСС относительно ближайших частиц своей и соседней оболочек для всех оболочек (рис. 3, b, c). Следовательно, при температуре T_{c1} в кластере из $N = 37$ частиц происходит фазовый переход: система теряет свое упорядоченное строение. При $T > T_{c1}$ число частиц в оболочках начинает меняться, оболочки обмениваются частицами, размываются. При $T \gg T_{c1}$ уже невозможно выделить какие-либо оболочки. Частицы движутся хаотически. Из рис. 4 видно, что потенциальная энергия, почти линейно растущая с температурой, испытывает скачок при $T = T_{c1}$. Последнее обстоятельство указывает на то, что при $T = T_{c1}$ в кластере происходит фазовый переход первого рода, как и в двумерном дипольном кристалле (см. [14]).

Сценарий плавления двумерного дипольного кластера из $N = 37$ частиц аналогичен плавлению двумерного дипольного кристалла с треугольной решеткой. Однако это несправедливо для микрокластеров, состоящих всего из двух оболочек. Здесь, несмотря на близкоедействующий характер дипольного взаимодействия, большую роль играет квадратичный удерживающий потенциал: оболочечная структура конкурирует с треугольной решеткой. Плавление двумерного дипольного кластера из десяти частиц происходит в две стадии.

При температуре T_{c1} (табл. 2) происходит полное плавление кластера, аналогичное описанному выше плавлению кластера из 37 частиц. Единственным отличием является то, что зависимость потенциальной энергии от температуры почти линейная и не имеет особенностей, поэтому ее нельзя использовать для определения температуры плавления.

Однако УСС внешней оболочки относительно ближайших частиц внутренней оболочки впервые испытывает резкий скачок при существенно меньшей температуре T_{c2} (см. табл. 2, рис. 5, a). Следовательно, при температуре T_{c2} в кластере из десяти частиц происходит ориентационное плавление. При $T_{c1} > T > T_{c2}$ оболочки, будучи внутри упорядоченными (частицы внутри оболочек не меняются местами), начинают вращаться относительно друг друга. Из рис. 5, b, c видно, что полное РСС, РСС внешней оболочки и УСС внешней оболочки

относительно ближайших частиц своей оболочки также испытывают скачок при температуре T_{c2} . Однако РСС и УСС относительно ближайших частиц своей оболочки для внутренней оболочки не имеют особенностей при этой температуре. Следовательно, можно считать, что при температуре T_{c2} внешняя оболочка "подстраивается" под внутреннюю, начиная вращаться относительно нее. При этом угловой и радиальный порядок во внешней оболочке сильно уменьшается.

Значение безразмерного параметра Γ_d (табл. 2), при котором происходит плавление системы (в единицах $D = k_B = 1$), вычисляется по формуле $\Gamma_d = \frac{1}{2a^3 T_c}$. Для $N = 37$ значение $\Gamma_d = 59$ не сильно отличается от значения $\Gamma_d = 62$, при котором плавится дипольный кристалл. Но для $N = 10$ величина $\Gamma_d = 45$ меньше, что связано с большой ролью квадратичного удерживающего потенциала для малых N .

Мы нашли потенциальные барьеры вращения оболочек U_2 и перескока частицы U_1 (с учетом релаксации), см. [21], в кластерах из 37 и из десяти частиц. Для кластера из 37 частиц ориентационные барьеры больше, чем радиальный барьер перескока из глобального минимума (1, 7, 13, 16 с треугольной структурой) в локальный (1, 7, 13, 16 с оболочечной структурой), а для кластера из десяти частиц ориентационный барьер существенно меньше радиального барьера перескока из глобального минимума (3, 7) в локальный (2, 8), что является наряду с особенностью температурной зависимости внешнего УСС еще одним веским доказательством существования ориентационного плавления в дипольном кластере из десяти частиц и его отсутствия в кластере из 37 частиц. Из табл. 2 видно, что отношение между потенциальными барьерами вращения и перескока для данного N по порядку величины равно отношению между температурами ориентационного и полного плавления $\frac{U_2}{U_1} \simeq \frac{T_{c2}}{T_{c1}}$, что позволяет предсказывать возможность ориентационного плавления в кластерах с разными N и различными законами взаимодействия.

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований, программ "Физика твердых наноструктур" и "Поверхностные атомные структуры".

Список литературы

- [1] В.М. Агранович, Ю.Е. Лозовик. Письма в ЖЭТФ **17**, 4, 209 (1973).
- [2] Ю.Е. Лозовик, В.И. Нишанов. ФТТ **18**, 11, 3267 (1976).
- [3] Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон. Письма в ЖЭТФ **22**, 11, 556 (1975).
- [4] S.M. Apenko, A.V. Kluchnik, Yu.E. Lozovik. Solid. State Commun. **36**, 6, 485 (1980).
- [5] Б.А. Абдулаев, Ю.Е. Лозовик. ФТТ **24**, 9, 2663 (1982).
- [6] Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон. ЖЭТФ **71**, 2, 738 (1976).
- [7] D. Yoshioka, H. Fukuyama. J. Phys. Soc. Jap. **45**, 1, 137 (1978).
- [8] L. Brey. Phys. Rev. Lett. **65**, 7, 903 (1990).

- [9] D. Yoshioka, A.H. MacDonald. *J. Phys. Soc. Jap.* **59**, 12, 4211 (1990).
- [10] X.M. Chen, J.J. Quinn. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 7, 895 (1991).
- [11] Ю.Е. Лозовик, О.Л. Берман. *Письма в ЖЭТФ* **64**, 8, 750 (1996).
- [12] A.T. Skjeltorp. *Phys. Rev. Lett.* **51**, 25, 2306 (1983).
- [13] R.K. Kalia, P. Vashishta. *J. Phys.* **C14**, 22, L643 (1981).
- [14] В.М. Беданов, Г.В. Гадияк, Ю.Е. Лозовик. *ЖЭТФ* **88**, 5, 1622 (1985).
- [15] Ю.И. Петров. *Кластеры и малые частицы*. Наука, М. (1985). С. 386.
- [16] *Microclusters* / Ed. S. Sugano et. al. Springer, Berlin (1987).
- [17] Ю.Е. Лозовик. *УФН* **153**, 2, 356 (1990).
- [18] Yu.E. Lozovik, V.A. Mandelshtam. *Phys. Lett.* **A145**, 5, 269 (1990).
- [19] Yu.E. Lozovik, V.A. Mandelshtam. *Phys. Lett.* **A165**, 5, 469 (1992).
- [20] F.M. Peeters, V.A. Schweigert, V.M. Bedanov. *Physica* **B212**, 3, 237 (1995).
- [21] Ю.Е. Лозовик, Е.А. Ракоч. *Письма в ЖЭТФ* **65**, 3, 268 (1997).