Смешанное состояние и критический ток в узких сверхпроводящих пленках

© Г.М. Максимова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
603000 Нижний Новгород, Россия

E-mail: ilmaks@phys.unn.runnet.ru

(Поступила в Редакцию 23 января 1998 г.
В окончательной редакции 3 апреля 1998 г.)

Рассматривается смешанное состояние тонких узких сверхпроводящих пленок с краевым барьером, находящихся в поперечном магнитном поле. Найдены границы области существования метастабильных смешанных состояний с заданным числом вихрей N: $H_{\min}(N) \le H \le H_{\max}(N)$. Для пленок найдена зависимость критического тока от магнитного поля. Обсуждается переход от мейсснеровского к статическому смешанному состоянию.

Изучению поведения тонких сверхпроводящих пленок в перпендикулярном магнитном поле посвящено большое число работ. Известно, что достаточно сильное магнитное поле приводит к проникновению вихрей в пленку. Если объемный пиннинг мал, то эти вихри, возникнув у краев образца, "сносятся" мейсснеровскими токами в центральную часть пленки, образуя смешанное состояние. Устойчивость такого состояния обусловлена существованием барьера на вход (выход) вихрей, аналогичного поверхностному барьеру Бина–Ливингстона. Краевой барьер влияет также на транспортные свойства, намагниченность и другие характеристики тонких токонесущих полосок. В работах [1,2] рассматривались структура, область стабильности и релаксация смешанного состояния широких ($d \ll \lambda_\perp \ll W$, где d — толщина, W — ширина пленки, $\lambda_\perp = 2\lambda^2/d$, λ — лондоновская длина) пленок в поперечном магнитном поле. Влияние краевого барьера на критический ток таких пленок обсуждалось в работе Куприянова и Лихарева [3]. Зарождение вихрей у краев и их проникновение внутрь узкой пленки рассматривалось в [4] методом решения нестационарных уравнений Гинзбурга–Ландау.

В настоящей работе рассчитана зависимость критического тока от магнитного поля для узкой пленки: $\xi \ll d \ll W \ll \lambda_\perp$ (ξ — длина когерентности). Сначала в разделе 1 рассматривается смешанное состояние пленки с заданным числом вихрей N в поперечном магнитном поле в отсутствие транспортного тока. В результате анализа энергии Гиббса пробного вихря ΔG найдем интервал значений внешнего магнитного поля $H_{\min}(N) \le H \le H_{\max}(N)$, определяющий границы стабильности квазиравновесных состояний с данным N. Показано, что абсолютной границей смешанного состояния является поле $\tilde H = \Phi_0/(4\pi\xi^2)$, $\tilde H \propto H_{c2}$ (Φ_0 — квант магнитного потока).

В разделах 2 и 3 обсуждается поведение пленки с током в магнитном поле. Транспортный ток I, пропускаемый вдоль пленки, изменяет условия входа и выхода вихрей. В зависимости от соотношения между I и H пленка, первоначально находившаяся в мейсснеровском состоянии, может перейти либо в резистивное состояние (при $I > I_c(H)$), либо в статическое смешанное состояние, которое при дальнейшем увеличении тока также теряет свою устойчивость.

1. Структура смешанного состояния узкой пленки в отсутствие транспортного тока

Рассмотрим сверхпроводящую пленку шириной $W(-W/2 \le y \le W/2)$ и толщиной d ($0 \le z \le d$, $d \ll \lambda_\perp$), находящуюся в магнитном поле $\mathbf{H} = (0, 0, H)$. Распределение линейной плотности тока $i = i_x = j_x d$ описывается обобщенным уравнением Максвелла–Лондонов [3,5]

$$\frac{2\pi}{c}\lambda_\perp \frac{di}{dy} + \frac{2}{c}\int\limits_{-W/2}^{W/2} \frac{i(t)dt}{t-y} = H - n(y)\Phi_0, \qquad (1)$$

где $n(y)$ — усредненная плотность вихрей, отличная от нуля в области пленки, где $i(y) = 0$. Плотность тока $i(y)$ в общем случае есть сумма плотностей транспортного тока, мейсснеровского тока и тока вихрей, образующих смешанное состояние. В главном приближении по $W/\lambda_\perp \ll 1$ получим из (1)

$$n(y) = \begin{cases} H/\Phi_0, & |y| \le \theta, \\ 0, & |y| \ge \theta, \end{cases} \qquad (2)$$

$$i(y) = \frac{cH}{2\pi\lambda_\perp}\begin{cases} y-\theta, & \theta \le y \le \frac{W}{2}, \\ 0, & |y| \le \theta, \\ y+\theta, & \frac{-W}{2} \le y \le -\theta. \end{cases} \qquad (3)$$

Параметр θ, определяющий полуширину области, занятой вихрями, связан с числом вошедших в пленку вихрей: $N = 2H\theta/\Phi_0$.

Рассмотрим энергию Гиббса пробного вихря в пленке как функцию его координаты y_0. Как было показано в [1,6], $\Delta G(y_0, N)$ можно представить в виде

$$\Delta G(y_0, N) = E_0(y_0) + E_1(y_0), \quad (4)$$

где $E_0(y_0)$ — собственная энергия вихря в узкой пленке [5],

$$E_0(y_0) = \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2\lambda_\perp}\left\{\ln\frac{\lambda_\perp}{2\xi} + \sum_{n=1}^{k_0/2}\ln\left[\frac{(2n-1)^2}{2n^2} - \frac{y_0^2}{n^2W^2}\right]\right\}, \quad (5)$$

$k_0 = \lambda_\perp/W \gg 1$. Это выражение в пределе $k_0 \gg 1$ можно преобразовать к виду, более удобному для дальнейших вычислений (см. Приложение)

$$E_0(y_0) = \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2\lambda_\perp}\ln\left[\frac{W}{\pi\xi}\cos\left(\frac{\pi y_0}{W}\right)\right], \ |y_0| \le \frac{W}{2} - \xi. \quad (6)$$

Функция $E_1(y_0, N)$ в формуле (4) — энергия взаимодействия пробного вихря с током $i(y)$

$$E_1(y_0) = \frac{\Phi_0}{2c}\left[\int\limits_{-W/2}^{y_0} idy - \int\limits_{y_0}^{W/2} idy\right]. \quad (7)$$

Предполагая для определенности, что $y_0 > 0$, получим из (3), (7)

$$E_1(y_0, N) = \frac{\Phi_0 H}{4\pi\lambda_\perp} \times \begin{cases} \left[(y_0-\theta)^2 - (W/2-\theta)^2\right], & \theta \le y_0 \le \frac{W}{1}, \\ -(W/2-\theta)^2, & 0 \le y_0 \le \theta. \end{cases} \quad (8)$$

Смешанное состояние (2), (3) является стабильным (точнее метастабильным) до тех пор, пока существуют энергетические барьеры для входа вихря в пленку и выхода из нее. Поле $H_{\max}(N)$, при котором подавляется барьер на вход, может быть найдено из условия

$$\left.\frac{\partial\Delta G(y, N)}{\partial y}\right|_{y=W/2-\xi} = 0 \quad (9)$$

и с учетом (4), (6) и (8) равно

$$H_{\max}(N) = H_s + \frac{N\Phi_0}{W}(1 + 2\xi/W), \quad (10)$$

где H_s — поле вхождения первого вихря [6]

$$H_s = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi W}. \quad (11)$$

Поле $H_{\min}(N)$, соответствующее исчезновению барьера для выхода вихрей из пленки, определяет нижнюю границу стабильности смешанного состояния. Оно равно такому полю, при котором зависимость $\Delta G(y_0, N)$ от y_0 в области $\theta \le y_0 \le \frac{W}{2} - \xi$ становится монотонной

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_1}\Delta G(y_1, N) = 0, \\ \frac{d^2}{dy_1^2}\Delta G(y_1, N) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

или в явном виде

$$\frac{N\Phi_0}{4\pi\lambda_\perp} = P(y_1), \quad y_1 = \frac{W}{2}\arccos\sqrt{\frac{H'}{H}}. \quad (13)$$

где

$$P(y) = \frac{H}{2\pi\lambda_\perp}y - \frac{\Phi_0}{8\pi\lambda_\perp W}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi y}{W}\right), \quad (14)$$

$$H' = \frac{\pi\Phi_0}{4W^2}. \quad (15)$$

Решая данную систему уравнений, получим выражение для определения $H = H_{\min}(N)$

$$\frac{\pi\Phi_0 N}{2HW} = \arccos\sqrt{\frac{H'}{H}} - \sqrt{\frac{H'}{H}}\sqrt{1 - \frac{H'}{H}}. \quad (16)$$

Из (16) следует, что поле H' можно назвать полем выхода для одного вихря ($N = 0$): при $0 < H < H'$ вихри в пленке абсолютно неустойчивы. В области полей H, близких к H', как следует из (16),

$$H_{\min}(N) \approx H'\left[1 + \left(\frac{3\pi\Phi_0 N}{4WH'}\right)^{2/3}\right]. \quad (17)$$

Заметим, что $\left.\frac{dH_{\min}}{dN}\right|_{N\to 0} \to \infty$. В области больших полей $H \gg H'$ имеем

$$H_{\min}(N) \approx \frac{\Phi_0 N}{W} + \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{H'\Phi_0 N}{W}}. \quad (18)$$

Необходимо отметить, что с ростом H точка перегиба y_1 (13) смещается к краю пленки. Максимальное значение $y_1 \approx W/2 - \xi$ достигается при $H = \tilde{H}$, где

$$\tilde{H} = \frac{\Phi_0}{4\pi\xi^2} \propto H_{c2}. \quad (19)$$

Таким образом, асимптотическое выражение (18) справедливо при $H \le \tilde{H}$. При $H > \tilde{H}$, $H_{\max}(N) = H_{\min}(N)$, т. е. $\tilde{H}$ является максимальным полем, при котором пленка еще находится в смешанном состоянии (как следует из (19), в полях, близких к $\tilde{H}$, происходит перекрытие ядер вихрей, что означает почти полное разрушение сверхпроводимости и переход пленки в нормальное состояние).

2. Устойчивость мейсснеровского состояния в пленке с током

Рассмотрим теперь задачу об устойчивости сверхпроводящего состояния пленки с током в магнитном поле. Будем считать, что ток I течет в положительном направлении оси x. При достаточно низких полях H пленка находится в мейсснеровском состоянии и распределение тока дается формулой

$$i(y) = \frac{cH}{2\pi\lambda_\perp} y + \frac{I}{W}. \qquad (20)$$

При этом проникновению вихрей в пленку препятствует краевой барьер при $y_0 = W/2$. Он исчезает при $I = I_c(H)$, когда функция $\Delta G(y_0)$ (определенная с помощью (4), (6), (7) и (20)) становится монотонной.[1] Экстремальные точки функции $\Delta G(y_0)$ являются решением уравнения

$$P(y_0) = -I/(cW), \qquad (21)$$

где функция $P(y)$ определяется формулой (14), причем значение этой функции на краю пленки равно

$$P\left(\frac{W}{2} - \xi\right) = \frac{W}{4\pi\lambda_\perp}(H - H_s). \qquad (22)$$

В полях $H < H^*$ (поле H^* определено далее) значение функции $P(y_0)$ в точке экстремума по модулю меньше соответствующего значения на краю. Таким образом, решение уравнения (21) пропадает при $I > I_c(H)$, где

$$I_c(H) = \frac{cW^2}{4\pi\lambda_\perp}(H_s - H), \quad H \le H^*. \qquad (23)$$

Ток $I_c(H)$ можно назвать током подавления барьера на вход вихрей. Поле H^*, ограничивающее применимость последней формулы, находится из условия равенства функции $P(y_0)$ в точке минимума ее значению на краю пленки $y_0 = W/2 - \xi$. С учетом явного вида $P(y_0)$ (14) имеем

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{H_s}{H^*} - 1\right) = \arccos\sqrt{\frac{H'}{H^*}} - \sqrt{\frac{H'}{H^*}\left(1 - \frac{H'}{H^*}\right)}. \qquad (24)$$

Предполагая, что $H^* \gg H'$, найдем отсюда

$$H^* \approx \frac{H_s}{2}\left(1 + Q\left(\sqrt{\frac{H'}{H_s}}\right)\right). \qquad (25)$$

В полях $H > H^*$ значение функции $P(y_0)$ в точке минимума будет меньше соответстующего значения на краю пленки. Это означает, что при токе $I_c(H)$ (23) (когда открыт барьер на вход вихрей) появляются решения уравнения (21). Анализ показывает, что при этом выходу вихрей из пленки со стороны $y_0 = -W/2$ препятствует краевой барьер, т. е. появляется возможность возникновения смешанного состояния, характеризуемого числом захваченных вихрей N. И дальнейший анализ поведения пленки при токах $I > I_c(H)$ и $H^* < H < H_s$ необходимо проводить самосогласованным образом, используя фунцию Гиббса пробного вихря для пленки, находящейся в смешанном состоянии.[2]

[1] Аналогичные расчеты были выполнены Шмидтом при нахождении критического тока безграничной пленки в параллельном магнитном поле [7].

[2] В цитируемой работе [7], результаты которой (касающиеся $I_c(H)$) с точностью до обозначений совпадают с результатами данного раздела, при $H > H^*$ предполагалось, что критический ток определяется выражением, аналогичным (21). Анализ этой формулы приводит к явлению пик-эффекта, что было бы верным только в том случае, когда смешанное состояние в пленке не образуется.

3. Критический ток пленки в смешанном состоянии

Текущий по пленке транспортный ток I смещает область, занятую вихрями в сторону отрицательных значений y,

$$n(y) = \begin{cases} H/\Phi_0, & y \in [b, a], \\ 0, & y \in [b, a], \end{cases} \qquad (26)$$

$$i(y) = \frac{cH}{2\pi\lambda_\perp}\begin{cases} y - a, & a \le y \le \frac{W}{2}, \\ 0, & y \in [b, a], \\ y - b, & \frac{-W}{2} \le y \le b, \end{cases} \qquad (27)$$

где

$$a = \Delta + \theta, \quad b = \Delta - \theta. \qquad (28)$$

Полный ток I равен

$$I = -\frac{cH}{2\pi\lambda_\perp}\Delta(W - 2\theta). \qquad (29)$$

Таким образом, Δ определяет величину смещения области, занятой вихрями, под действием тока, а θ попрежнему определяется числом захваченных вихрей N. Обсудим теперь устойчивость смешанного состояния (26)–(29). Прежде всего заметим, что при $N \ne 0$ функция $\Delta G(y_0, N)$ не может быть монотонной всюду внутри области $-\frac{W}{2} < y_0 < \frac{W}{2}$. Поэтому критический ток I_c мы будем определять как такой ток, при котором вихри могут входить в пленку (открыт барьер на вход) и выходить из нее (подавлен барьер на выход).

а) В области полей $H^* < H < H_s$ условие, при котором открывается барьер на вход вихрей в пленку, имеет вид

$$P\left(\frac{W}{2} - \xi\right) = \frac{Ha}{2\pi\lambda_\perp}. \qquad (30)$$

Используя (22), (28), (29), получим выражение для тока входа вихрей $I_{\mathrm{en}}(N, H)$

$$\frac{4\pi\lambda_\perp}{cW} I_{\mathrm{en}}(N, H) = -\frac{\Phi_0^2 N^2}{WH} + \Phi_0 N\left(2 - \frac{H_s}{H}\right) + W(H_s - H). \qquad (31)$$

Аналогично вихри выходят из пленки при $I \ge I_{\mathrm{ex}}(N, H)$, где ток выхода $I_{\mathrm{ex}}(N, H)$ определен уравнением

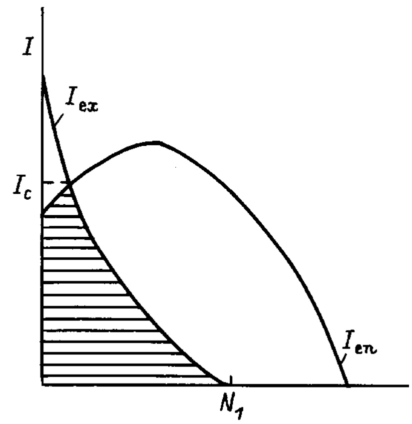
$$P(y_0^*) = \frac{Hb}{2\pi\lambda_\perp}, \qquad (32)$$

или в явном виде

$$\frac{4\pi\lambda_\perp}{cW} I_{\mathrm{ex}}(N, H) = -\left(1 - \frac{\Phi_0 N}{WH}\right) \times \left(\Phi_0 N + 4\pi\lambda_\perp P(y_0^*)\right), \qquad (33)$$

где y_0^* — точка минимума функции $P(y_0)$

$$y_0^* \approx -\frac{W}{2} + \frac{W}{\pi}\sqrt{H'/H}. \qquad (34)$$



Зависимости $I_{\text{en}}(N)$ и $I_{\text{ex}}(N)$ от числа захваченных вихрей N при данном значении H. Заштрихованная область соответствует стабильному смешанному состоянию. Точка пересечения кривых $I_{\text{en}}(N)$ и $I_{\text{ex}}(N)$ определяет критический ток I_c.

При $N = 0$ имеем

$$I_{\text{ex}}(0, H) = \frac{cW^2 H}{4\pi\lambda_\perp}, \tag{35}$$

$$I_{\text{en}}(0, H) = \frac{cW^2(H_s - H)}{4\pi\lambda_\perp}. \tag{36}$$

Зависимости $I_{\text{en}}(N, H)$ $I_{\text{ex}}(N, H)$ от N при $H^* < H < H_s$ изображены на рисунке. Как следует из формулы (33), ток выхода $I_{\text{ex}}(N_1, H) = 0$ при значении $N = N_1$, обращающем в нуль вторую скобку в выражении (33). Учитывая (14) и (34), получим

$$N_1 = \frac{W}{\Phi_0}\left(H - \frac{4}{\pi}\sqrt{H'H}\right).$$

Рассмотрим теперь сценарий перехода пленки из начального мейсснеровского состояния с $N = 0$ в заданном магнитном поле (мы рассматриваем $H < H_s$) в статическое смешанное или резистивное состояние. Пока мы увеличиваем ток до значения $I_{\text{en}}(N = 0)$ (36), мы находимся в стабильном мейсснеровском состоянии. При $I > I_{\text{en}}(N = 0)$ вихри начнут входить в пленку и N станет отличным от нуля, т. е. мы попадаем в область стабильности смешанного состояния (см. рисунок). Так будет продолжаться до тех пор, пока I не достигнет величины $I_c(H)$, где $I_c(H)$ — ток, при котором пересекаются линии $I_{\text{en}}(N)$ и $I_{\text{ex}}(N)$. При $I > I_c(H)$ вихри входят в пленку со стороны $y = W/2$ и выходят с другого края, т. е. пленка находится в динамическом смешанном (резистивном) состоянии. Значение критического тока найдем из формул (31) и (33)

$$I_c(H) = \frac{cW^2}{16\pi\lambda_\perp}\frac{H_s^2}{H}, \qquad H^* < H < H_s. \tag{37}$$

Данная зависимость совпадает с аналогичным выражением для широких ($W \gg \lambda_\perp$) пленок [3].

b) В полях $H_s < H < \tilde{H}$ при $I = 0$ пленка уже находится в смешанном состоянии. Пропускание по ней слабого тока приведет, во-первых, к увеличению числа захваченных вихрей, и, во-вторых, к перестройке их распределения (26). При токах больше критического открывается барьер на выход вихрей, и пленка переходит в резистивное состояние. Выражение для критического тока в этой области значений магнитного поля имеет вид

$$I_c(H) = \frac{c}{16\pi\lambda_\perp}\frac{(H_s W - 2H\xi)^2}{H}, \quad H_s < H < \tilde{H}. \tag{38}$$

При $H \ll \tilde{H} = H_s W/(2\xi)$ (38) переходит в (37), а при $H = \tilde{H}$, $I_c(\tilde{H}) = 0$.

Интересно отметить, что рассматриваемая нами задача об устойчивости токового состояния тонких и узких полосок в поперечном магнитном поле идентична аналогичной задаче для тонких безграничных пластин в параллельной геометрии [7]. Характерные магнитные поля H', H_{c1}, H_s пленок одинаковым образом зависят от поперечного масштаба, в роли которого выступают ширина пленки W в нашей задаче и толщина пластины d в задаче [7]. По-видимому, это факт связан с малостью параметра $W/\lambda_\perp$ и соответственно d/λ в [7]: мейсснеровские токи линейно зависят от координаты y, а структуры абрикосовского и пирловского вихрей на малых расстояниях практически совпадают. Полученные нами результаты могут быть использованы для ВТСП-пленок, в которых лондоновская глубина λ достаточно велика и условие $W \ll \lambda_\perp$ может быть реализовано. На основе рассмотренной здесь модели можно рассчитать магнитные и диссипативные характеристики тонкопленочных сверхпроводящих мостиков.

Автор благодарен И.Л. Максимову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобразования РФ (грант № 95-0-7.3-178), а также Миннауки РФ (проект № 95057).

Приложение

Используя выражение (5), представим $\frac{dE_0}{dy_0}$ в виде

$$\frac{dE_0}{dy_0} = -\frac{\Phi_0^2}{8\pi^2\lambda_\perp W}\left\{\frac{2y_0/W}{(y_0/W)^2 - 1/4} + \sum_{n=0}^{k_0/2}\frac{1}{n - 1/2 - y_0/W} - \sum_{n=0}^{k_0/2}\frac{1}{n - 1/2 + y_0/W}\right\}. \tag{П1}$$

Входящие в (П1) суммы можно выразить через $\Psi(z) = d \ln \Gamma(z)/dz$

$$\sum_{n=0}^{k_0/2} \frac{1}{n - 1/2 \mp y_0/W} = \Psi\left(\frac{k_0}{2} + \frac{1}{2} \mp \frac{y_0}{W}\right) - \Psi\left(-\frac{1}{2} \mp \frac{y_0}{2}\right). \qquad (\text{П2})$$

Подставляя (П2) в (П1) и используя асимптотику $\Psi(z)$ при $z \gg 1$ $(\Psi(z) \approx \ln z)$, а также функциональные соотношения [8], получим

$$\frac{dE_0}{dy_0} = \frac{-\Phi_0^2}{8\pi^2\lambda_\perp W}\,\pi \operatorname{tg}\frac{\pi y_0}{W}. \qquad (\text{П3})$$

Интегрирование (П3) с учетом граничного условия $E_0(\frac{W}{2} - \xi) = 0$ приводит к формуле (6).

Список литературы

[1] И.Л. Максимов, Г.М. Максимова. Письма в ЖЭТФ **65**, *5*, 405 (1997).
[2] G.M. Maksimova, I.L. Maksimov. Physica **C282–287**, 2198 (1997).
[3] М.Ю. Куприянов, К.К. Лихарев. ФТТ **16**, *10*, 2829 (1974).
[4] I. Aranson, M. Gitterman, B.Ya. Shapiro. Phys. Rev. **B51**, 3092 (1995).
[5] А.И. Ларкин. Ю.Н. Овчинников. ЖЭТФ **61**, *3(9)*, 1221 (1971).
[6] К.К. Лихарев. Изв. вузов. Радиофизика **14**, *6(12)*, 2095 (1971).
[7] В.В. Шмидт. ЖЭТФ **57**, *6(12)*, 2095 (1969).
[8] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. Наука, М. (1971). 959 с.