01;02;10

Переходное излучение заряда в средах с неоднородным потенциалом

© В.Л. Фалько[1], С.И. Ханкина[1], В.М. Яковенко[1], И.В. Яковенко[2]

[1] Институт радиофизики и электроники АН Украины,
310085 Харьков, Украина
[2]Научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт "Молния"
Харьковского политехнического университета,
310013 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 28 мая 1996 г.)

Исследовано влияние потенциального барьера на переходное излучение объемных и поверхностных электромагнитных волн заряженной частицей, пересекающей границу раздела сред. Показано, что поле излучения объемных волн обусловлено не только скачком диэлектрической проницаемости на границе, но также скачком скоростей и отражением электрона, вызванными присутствием неоднородного потенциального барьера. Получено угловое распределение интенсивности переходного излучения.

1. Излучению заряженных частиц, возникающему при пересечении границы раздела сред с различными электромагнитными свойствами, посвящено большое число работ (см. библиографию в [1] и, например, [2–7]). Внимание к этому интересному явлению вызвано тем, что излучение типа переходного встречается довольно часто в самых разнообразных задачах, относящихся к астрофизике, физике ускорителей, физике плазмы и твердого тела.

Обычно при исследовании переходного излучения не принимается во внимание присутствие потенциального барьера на границе сред. Между тем роль его оказывается весьма существенной. Это было показано, например, в работах [3–5] при исследовании взаимодействия заряженных частиц с поверхностными плазмонами.

В предлагаемой работе исследуются особенности переходного излучения электромагнитных волн частицей с учетом влияния потенциального барьера U на границе двух сред.

Пусть в среде 1 (например, в вакууме, $z < 0$) равномерно и прямолинейно со скоростью v_1 движется заряженная частица вдоль нормали (ось z) к поверхности раздела сред. Предполагается, что $U(z)$ имеет вид

$$U(z) = 0 \quad \text{при} \quad -\infty < z < 0,$$

$$U(z) = U_0 \quad \text{при} \quad z \geq o \tag{1}$$

и высота стенки U_0 меньше кинетической энергии частицы в вакууме $E = (m_0 v_1^2)/2$. Тогда скорость частицы в среде 2 ($z \geq 0$) равна

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(E - U_0)}{m}}; \quad \mathbf{v}_2 \,||\, z. \tag{2}$$

Коэффициент отражения F частицы от барьера определяется из уравнения Шредингера и граничных условий [8]

$$F = \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)^2. \tag{3}$$

В среде 1 ток создается частицей, движущейся по направлению к стенке и отраженной от нее

$$\mathbf{j}_1 = e\mathbf{v}_1 \delta(\boldsymbol{\rho}) \left[\delta(z - v_1 t) - F\delta(z + v_1 t)\right], \tag{4}$$

а ток в среде 2 — частицей, прошедшей над барьером,

$$\mathbf{j}_2 = De\mathbf{v}_1 \delta(\boldsymbol{\rho}) \delta(z - v_2 t). \tag{5}$$

Здесь $D = 1 - F$ — коэффициент прохождения частицы над барьером, $\boldsymbol{\rho}$ — вектор в плоскости раздела сред. Электромагнитное поле в каждой из сред определяется из уравнений Максвелла, в которых ток заряженных частиц задан выражениями (4) или (5). Граничными условиями являются условия непрерывности тангенциальных компонент электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей на плоскости раздела сред $z = 0$ и условия излучения при $z = \pm\infty$. Из-за аксиальной симметрии уравнений Максвелла в изотропной среде с током вдоль оси z удобно ввести цилиндрическую систему координат ρ, φ и z, в которой независимо распространяются $TM(H_\varphi, E_\rho, E_z)$- и $TE(E_\varphi, H_\rho, H_z)$-моды. Заряженной частицей, движущейся вдоль оси z, возбуждаются только TM-волны. Зависимости компонент поля этой волны от времени представляем в виде разложения в интегралы Фурье, а их зависимости от координаты ρ — через интегралы Фурье–Бесселя

$$E_z(\rho, z, \omega) = \int_0^\infty \varkappa E_z(z, \varkappa) J_0(\varkappa\rho) d\varkappa, \tag{6}$$

$$E_\rho(\rho, z, \omega) = \int_0^\infty E_\rho(z, \varkappa) J_1(\varkappa\rho) d\varkappa, \tag{7}$$

$J_n(\varkappa\rho)$ — функция Бесселя n-го порядка.

Связь магнитного H_φ и электрического E_ρ полей определяется уравнением

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \frac{i\omega c}{\varepsilon_i} E_\rho, \tag{8}$$

$i = 1, 2$ — номер среды; ε_i — диэлектрическая проницаемость i среды.

Дельта-функцию $\delta(\boldsymbol{\rho})$ можно записать через функцию Бесселя

$$\delta(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \varkappa J_0(\varkappa\rho) d\varkappa. \tag{9}$$

В результате получим, что компоненты электрического и магнитного полей имеют вид

$$E_z^{(i)} = \int\limits_0^\infty d\varkappa\, \varkappa J_0(\varkappa\rho) \Big\{ A^{(i)} \exp(-i\lambda_i z) + B^{(i)} \exp(i\lambda_i z) + \frac{ie}{\pi\omega}(1 - \beta_i^2 \varepsilon_i) f_i \times \left[C^{(i)} \exp\left(i \frac{\omega}{v_i} z\right) + D^{(i)} \exp\left(-i \frac{\omega}{v_i} z\right) \right] \Big\}, \tag{10}$$

$$H_\varphi^{(i)} = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon_i \int\limits_0^\infty d\varkappa\, J_1(\varkappa\rho) \Big\{ A^{(i)} \exp(-i\lambda_i z) + B^{(i)} \exp(i\lambda_i z) - i \frac{e\varkappa^2 v_i^2}{\pi\omega^3} f_i \Big[C^{(i)} \exp\left(i\frac{\omega}{v_i} z\right) + D^{(i)} \exp\left(-i\frac{\omega}{v_i} z\right) \Big] \Big\}. \tag{11}$$

Выражение для компоненты поля $E_\rho^{(i)}$ легко получить из формул (8) и (11). В (10) и (11) введены следующие обозначения: коэффициенты $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, $C^{(i)}$, $D^{(i)}$ в средах 1 и 2 соответственно равны

$$A^{(1)} = A(\varkappa), \quad B^{(1)} = 0, \quad C^{(1)} = 1, \quad D^{(1)} = -F; \tag{12}$$

$$A^{(2)} = 0, \quad B^{(2)} = B(\varkappa), \quad C^{(2)} = \frac{v_1}{v_2}(1 - F), \quad D^{(2)} = 0,$$

$$\lambda_i = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i - \varkappa^2} \quad (\operatorname{Re} \lambda_i > 0); \tag{13}$$

$$f_i = \frac{1}{\varepsilon_i \left(\beta_i^2 \varepsilon_i - \frac{\varkappa^2 v_i^2}{\omega^2} - 1 \right)}; \quad \beta_i = \frac{v_i}{c}. \tag{14}$$

Коэффициенты $A(\varkappa)$ и $B(\varkappa)$ в выражениях находятся из граничных условий на поверхности раздела сред $z = 0$. Они определяют поле переходного излучения. При этом коэффициент $A(\varkappa)$ соответствует волне, распространяющейся в направлении $z < 0$, а $B(\varkappa)$ — в направлении $z > 0$. Нас интересует поле излучения в среде 1, которое описывается первыми слагаемыми в формулах (10), (11).

$$A(\varkappa) = \frac{ie\varkappa^2 v_1}{\pi\omega^2 \Delta(\omega, \varkappa)} \Big\{ (f_1 - f_2)\, \varepsilon_2 - \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - \varkappa^2} \times (f_1 \varepsilon_1 v_1 + f_2 \varepsilon_2 v_2) + F \Big[(f_1 + f_2)\, \varepsilon_2 + \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - \varkappa^2}\, (f_1 \varepsilon_1 v_1 - f_2 \varepsilon_2 v_2) \Big] \Big\}. \tag{15}$$

Здесь

$$\Delta(\omega, \varkappa) = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 - \varkappa^2} + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - \varkappa^2}. \tag{16}$$

Заметим, что в выражении (15) слагаемое, пропорциональное коэффициенту F, возникает из-за отражения частицы от потенциального барьера (1).

Рассмотрим среды с разными значениями диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{1,2}(\omega) > 0$. Поле излучения в среду 1 получим используя метод стационарной фазы. Это излучение представляет собой сферическую волну, у которой компоненты поля равны

$$E_\rho(\omega) = E(\omega) \cos\Theta, \quad E_z = E(\omega) \sin\Theta,$$

$$E(\omega) = \frac{e\beta_1 \cos\Theta \sin\Theta}{\pi c \left[\varepsilon_2 \cos\Theta + \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\Theta)} \right]} \times \frac{\exp(i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1} R)}{R} \times \Big\{ \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(1 + \beta_1\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\Theta} - \varepsilon_1\beta_1^2)}{(1 - \varepsilon_1\beta_1^2\cos^2\Theta)(1 + \beta_1\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\Theta})} + \frac{\varepsilon_1(\beta_2 - \beta_1)\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\Theta}}{(1 + \beta_1\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\Theta})(1 + \beta_2\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\Theta})} + F\Big(\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1\beta_1\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\Theta}}{1 - \varepsilon_1\beta_1^2\cos^2\Theta} + \frac{\varepsilon_1}{1 + \beta_2\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\Theta}} \Big) \Big\}. \tag{17}$$

Здесь введены угол Θ и расстояние R от точки контакта частицы с границей раздела сред $z = 0$ до точки наблюдения излучения в среде 1 таким образом, что $\mathbf{R} = \boldsymbol{\rho}\sin\Theta - \mathbf{i}z\cos\Theta$ ($\mathbf{i}$ — орт в направлении оси z); предполагается, что выполнено условие $(\omega/c)R \gg 1$. Поток энергии излучения (17) в элемент телесного угла $d\Omega = \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi$ нетрудно вычислить по формуле

$$\frac{d^2W}{d\Omega\, d\omega} = cR^2 \left| E(\omega) \right|^2. \tag{18}$$

Из выражения (17) видно, что поле излучения состоит из трех частей. Первая представляет собой излучение, обусловленное скачком диэлектрических проницаемостей на границе и существующее в отсутствие потенциального барьера ($U_0 = 0$). Вторая часть описывает излучение, вызванное скачком скоростей на границе ($U_0 \neq 0$) без учета отражения электрона от потенциального барьера. Третье слагаемое определяет долю излучения, связанную с распространением волны де Бройля, "отраженной" от границы.

В случае бесконечно высокого барьера ($U_0 \to \infty$, $F = 1$) получим

$$E(\omega) = \frac{2e\varepsilon_2\beta_1 \cos\Theta \sin\Theta}{\pi c\left[\varepsilon_2 \cos\Theta + \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\Theta)}\right]} \times \frac{1}{(1 - \varepsilon_1\beta_1^2 \cos^2\Theta)} \frac{\exp(i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}R)}{R}. \quad (19)$$

Выражение для поля излучения в отсутствие потенциального барьера ($U_0 = 0$) известно [1]. Заметим, что в этом случае ($U_0 = 0$) амплитуда поля и энергия излучения меньше, чем при наличии бесконечно высокого потенциального барьера ($U_0 \to \infty$). Например, если среда 2 представляет собой идеальный проводник ($\varepsilon_2 \to \infty$), то поле $E(\omega)$ [1] в два раза меньше, чем поле излучения частицы в присутствии бесконечно высокого потенциала, а величина потока энергии отличается в 4 раза.

Предположим, что частица движется в полупроводнике с $p{-}n$-переходом, у которого дно зоны проводимости можно описать с помощью потенциального барьера в виде (1) (U_0 — конечная величина). Так как диэлектрическая проницаемость определяется только свойствами кристаллической решетки, то в формулах (17) и (18) нужно положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Поле излучения в таком полупроводнике имеет вид

$$E(\omega) = \frac{e\sin\Theta}{2\pi c(1 + \beta_2\sqrt{\varepsilon}\cos\Theta)} \frac{\exp(i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}R)}{R} \times \left[\frac{(\beta_2 - \beta_1)\sqrt{\varepsilon}\cos\Theta}{1 + \beta_1\sqrt{\varepsilon}\cos\Theta} + F\,\frac{2 + (\beta_2 - \beta_1)\sqrt{\varepsilon}\cos\Theta}{1 - \beta_1\sqrt{\varepsilon}\cos\Theta}\right]. \quad (20)$$

Из выражения (20) видно, что угловое распределение интенсивности меняется и в отличие от классического случая ($U_0 = 0$, а $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$) диаграмма направленности излучения "прижимается" к плоскости $z = 0$. Следует отметить, что в общем случае (см. (17)) угловое распределение поля $E(\omega)$ характеризуется наличием острого максимума, возникающего в окрестности углов Θ, для которых выполнено условие эффекта Вавилова–Черенкова в среде 1,

$$\cos^2\Theta = \frac{1}{\varepsilon_1\beta_1^2}$$

(здесь речь идет о максимуме, а не о сингулярности особенности, так как в реальных условиях необходимо учитывать затухание волны в среде).

Эта особенность присутствует как в первом слагаемом (она связана с отражением от границы $z = 0$ черенковского излучения, обусловленного частицей, движущейся в положительном направлении оси z), так и в третьем члене (черенковское излучение в той же среде, вызванное частицей, отраженной от барьера). В полупроводнике с $p{-}n$-переходом максимум в распределении поля $E(\Theta)$ (20) определяется только излучением Вавилова–Черенкова отраженной от границы частицы.

Как известно, на границе раздела сред могут распространяться поверхностные волны, если диэлектрическая проницаемость одной из сред отрицательная величина. Предположим, что $\varepsilon_2 < 0$ и $|\varepsilon_2| > \varepsilon_1$. В этом случае функция $\Delta(\omega, \varkappa)$ (16) обращается в нуль при значениях

$$\varkappa = \varkappa_p = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_1|\varepsilon_2|}{|\varepsilon_2| - \varepsilon_1}}. \quad (21)$$

Выражение (21) является дисперсионным соотношением поверхностного поляритона. Вклад от полюса (21) описывает поле переходного излучения поверхностной цилиндрической волны

$$E_z(\omega) = E\exp\left(-|\varkappa|_p\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}}\,z\right)\sqrt{\frac{|\varkappa_p|}{\rho}}\exp(i\varkappa_p\rho),$$

$$E_\rho(\omega) = i\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}}\,E_z(\omega),$$

$$H_\varphi(\omega) = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1(|\varepsilon_2| - \varepsilon_1)}{|\varepsilon_2|}}\,E_z(\omega),$$

$$E = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e\beta_1}{c} \times \frac{|\varepsilon_2|^{5/2}\varepsilon_1^{3/2}}{(|\varepsilon_2| - \varepsilon_1 + \beta_1^2\varepsilon_1^2)(|\varepsilon_2| - \varepsilon_1 + \beta_2^2\varepsilon_2^2)(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)} \times \exp\left(i\,\frac{\pi}{4}\right)\left\{(1+F)\left[\frac{|\varepsilon_2| - \varepsilon_1 + \beta_2^2\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} + i\beta_2\,\frac{|\varepsilon_2| - \varepsilon_1 + \beta_1^2\varepsilon_1^2}{\sqrt{|\varepsilon_2| - \varepsilon_1}}\right] + (1-F)\left[\frac{|\varepsilon_2| - \varepsilon_1 + \beta_1^2\varepsilon_1^2}{|\varepsilon_2|} + i\beta_1\,\frac{|\varepsilon_2| - \varepsilon_1 + \beta_2^2\varepsilon_2^2}{\sqrt{|\varepsilon_2| - \varepsilon_1}}\right]\right\}. \quad (22)$$

Этот результат относится к случаю, когда полюс $\varkappa_p$ и точка стационарной фазы

$$\varkappa_s = \frac{\omega}{c}\sqrt{(\varepsilon_1)}\sin\Theta$$

расположены достаточно далеко друг от друга, так что их вклады в интегралы (10), (11) можно рассматривать независимо.

Поток энергии волны (22) через круговую площадку (ρ, $\rho + d\rho$) при $z = 0$ равен

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\rho\partial\omega} = 2\pi\omega\,\frac{\varepsilon_1^{3/2}}{|\varepsilon_2|^{1/2}}\,|E|^2. \quad (23)$$

Энергия цилиндрической волны в отсутствие потенциального барьера ($U_0 = 0$; $F = 0$) [1] в $4\varepsilon_2^2/(|\varepsilon_2| + \varepsilon_1)^2$ раз меньше ее энергии в случае зеркально отражающей границы ($U_0 \to \infty$, $F = 1$).

Таким образом, поле излучения в среде 1 формируется с объемную сферическую и поверхностную цилиндрическую волны. Формирование сферической волны происходит на больших расстояниях от точки контакта частицы с границей раздела сред ($R \gg c/(\omega\sqrt{\varepsilon_1})$, что следует из условия применимости метода стационарной фазы) и ее интенсивность распределена в области углов $0 < \Theta < \pi/2$. Цилиндрическая волна распространяется вдоль поверхности раздела сред ($\Theta = \pi/2$) и затухает на глубине

$$L \sim \frac{c}{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}\sqrt{\frac{|\varepsilon_2| - \varepsilon_1}{\varepsilon_1}}.$$

В области частот ω и углов Θ (близких к $\pi/2$), удовлетворяющих условиям

$$|\pi/2 - \Theta| < 2\sqrt{\frac{2c}{R\omega\sqrt{\varepsilon_1}}} \ll 1,$$

$$|\varepsilon_2| \ll \varepsilon_1, \tag{24}$$

расстояние между полюсом и точкой стационарной фазы становится меньше ширины линий особенностей подынтегральных функций в (10), (11). Тогда при вычислении интегралов (10), (11) следует использовать метод Вандер-Вардена [9]. Мы не приводим выражения для поля излучения из-за их громоздкости. Заметим, что поверхностная цилиндрическая и объемная сферическая волны существуют в области углов (24), но амплитуды их малы в силу этого неравенства.

Далее исследуем излучение движущейся заряженной частицы в однородной среде с потенциальным барьером в виде прямоугольника или δ-функции. Такой потенциал может возникнуть, например, в полупроводниковой среде из-за наличия примеси или дефекта. Коэффициент отражения частицы в этом случае можно представить следующим образом:

$$F = \frac{\psi(E, U_0)}{1 + \psi(E, U_0)}, \tag{25}$$

где вид функции $\psi(E, U_0)$ определяется формой потенциала $U(z)$.

В случае прямоугольного барьера с шириной a

$$U(z) = \begin{cases} 0 & z < 0, \\ U_0 & 0 < z < a, \\ 0 & a < z, \end{cases} \tag{26}$$

функция $\psi(E, U_0)$ равна [8]

$$\psi = \frac{U_0^2}{4E(U_0 - E)}\,\mathrm{sh}^2\,\frac{a}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)} \quad (U_0 > E), \tag{27}$$

$$\psi = \frac{U_0^2}{4E(E - U_0)}\sin^2\frac{a}{\hbar}\sqrt{2m(E - U_0)} \quad (E > U_0), \tag{28}$$

Если потенциал имеет форму δ-функции, т.е.

$$U(z) = V_0\delta(z), \tag{29}$$

то

$$\psi = \frac{mV_0^2}{2E\hbar^2}. \tag{30}$$

Это выражение для ψ можно получить из формулы (27), если $U_0 \gg E$ и $(a\sqrt{2mU_0})/\hbar \ll 1$, где $V_0 = U_0 a$.

Поле излучения частицы является сферической волной и в области $z < 0$ описывается выражениями (17), (18), если в них положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, а коэффициент отражения $F = F(E, U_0)$ найти из формул (25)–(30),

$$E(\omega) = \frac{e\beta\sin\Theta}{\pi c}\,F\,\frac{\exp(i\,\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}R)}{R}. \tag{31}$$

Если $E > U_0$, то

$$\frac{d^2W}{d\Theta d\omega} = \frac{e^2\beta^2U_0^4\sin^3\Theta}{8E^2(E - U_0)^2}\sin^4\frac{a}{\hbar}\sqrt{2m(E - U_0)}. \tag{32}$$

Плотность излучения осциллирует, обращаясь в нуль при условии $(a/\hbar)p = \pi n\left(p = \sqrt{2m(E - U_0)}\right)$, когда на ширине барьера укладывается целое число полуволн де Бройля $\lambda_D = (2\pi\hbar)/p$. В этом случае имеется некоторая аналогия с переходным излучением частицы, проходящей через тонкую изотропную диэлектрическую пластину, когда имеют место осцилляции в результате изменения соотношения между толщиной пластины и длиной волны заряда $\lambda_e = (2\pi v)/\omega$.

Заметим, что рассмотренный эффект может быть использован в спектроскопии твердых тел.

Список литературы

[1] *Гинзбург В.А., Цитович В.Н.* Переходное излучение и переходное рассеяние. М.: Наука, 1984. 360 с.

[2] *Анисимов И.А., Котляров И.Ю., Левитский С.М.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 6. С. 1034.

[3] *Беленов А.М., Лускинович П.Н., Соболев А.Г.* и др. // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 10. С. 1902.

[4] *Буртыка М.В., Яковенко В.М., Яковенко И.В.* // ФНТ. 1995. Т. 21. № 6. С. 628.

[5] *Yakovenko V.M., Yakovenko I.V.* // Phys. Lett. A 1994. Vol. 196. P. 290.

[6] *Кречетов В.В.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38. № 7. С. 639.

[7] *Каликинский И.И.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 9. С. 20. Там же. 1995. Т. 65. Вып. 10. С. 131.

[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1989. 702 с.

[9] *Канер Э.А., Яковенко В.М.* // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. Вып. 2. С. 471.