01;09

# Двумерная задача рассеяния электромагнитных волн на проницаемом включении в анизотропном слое

© Н.П. Жук, С.Н. Шульга, А.Г. Яровой

Харьковский государственный университет,
310077 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 22 мая 1996 г.)

С помощью интегродифференциальных уравнений по сечению рассеивателя и метода коллокации получено численное решение задачи рассеяния $H$-поляризованной волны на анизотропном диэлектрическом включении в анизотропном слое трехслойной диэлектрической структуры.

**1**. Теоретическое моделирование взаимодействия гармонических электромагнитных волн с анизотропными объектами представляет интерес во многих физико-технических приложениях, таких как оптика световодов, неразрушающий контроль, дистанционное зондирование. Рассеяние волн на анизотропных телах в безграничной однородной изотропной среде рассматривалось, в частности, в работах [1–4], где рассеиватели моделировались однородным цилиндром с круговой [1] и произвольной [2] формой поперечного сечения, неоднородным цилиндром произвольного сечения [3] и трехмерной неоднородностью произвольной формы [4]. Более сложный случай, когда анизотропная однородная среда окружает идеально проводящий или неоднородный проницаемый цилиндр, исследован, к примеру, в работах [5,6]. Большой круг вопросов, связанных с распространением и рассеянием волн в анизотропных волноведущих структурах, изучен в [7]. Настоящая работа обобщает [5,6] на случай, когда неоднородный проницаемый цилиндр погружен в однородный слой трехслойной структуры, причем материалы слоя и включения могут быть анизотропными. Кроме того, ее можно рассматривать как обобщение работ [8,9], где проанализирована двумерная задача рассеяния на изотропном неоднородном рассеивателе в изотропной плоскослоистой среде.

**2**. Геометрия задачи показана на рис. 1. Однородный анизотропный слой толщиной $h$ характеризуется тензором диэлектрической проницаемости

$$\hat{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(s)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy}^{(s)} & \varepsilon_{yz}^{(s)} \\ 0 & \varepsilon_{zy}^{(s)} & \varepsilon_{zz}^{(s)} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

с постоянными элементами $\varepsilon_{xx}^{(s)}, \ldots, \varepsilon_{zz}^{(s)}$. Слой располагается на однородной изотропной подложке с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_c$ и граничит сверху со свободным пространством. Область $S$ представляет собой поперечное сечение неоднородного анизотропного включения цилиндрической формы, которое находится целиком в пределах слоя и ориентировано вдоль оси $0x$. Распределение диэлектрической проницаемости внутри включения характеризуется тензором $\hat{\varepsilon}_p$ вида (1), элементы которого $\varepsilon_{xx}^{(p)}, \ldots, \varepsilon_{zz}^{(p)}$ могут зависеть от $\mathbf{r} = (0, y, z)$. Рассматриваемые тензоры диэлектрической проницаемости описывают, например, одноосные кристаллы с наклонной оптической осью, лежащей в плоскости $y0z$, или же холодную электронную плазму в статическом внешнем магнитном поле, направленном вдоль оси $0x$ Магнитная проницаемость считается всюду равной 1.

В целях упрощения задачи положим, что первичное электромагнитное поле $\mathbf{E}^{in}$, $\mathbf{H}^{in}$, которое создается гармоническими ($\sim e^{-i\omega t}$) сторонними источниками в отсутствие включения, не зависит от $x$. Тогда названное поле, равно как и поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, которое возникает в присутствии включения, распадается на $E$- и $H$-поляризованные составляющие, которые распространяются независимо друг от друга. Из уравнений Максвелла следует, что распространение и рассеяние $E$-поляризованной составляющей происходит так же, как и в изотропной структуре с диэлектрической проницаемостью, даваемой $xx$-элементами тензоров $\hat{\varepsilon}_s, \hat{\varepsilon}_p$. Такая задача рассматривалась ранее, к примеру, в работах [8,9]. Поэтому мы сосредоточим внимание на более сложном случае $H$-поляризации, где эффекты анизотропии в слое и включении носят выраженный характер.

**3**. Из уравнений Максвелла вытекает, что в рассматриваемом случае $H$-поляризации ненулевые компонен-

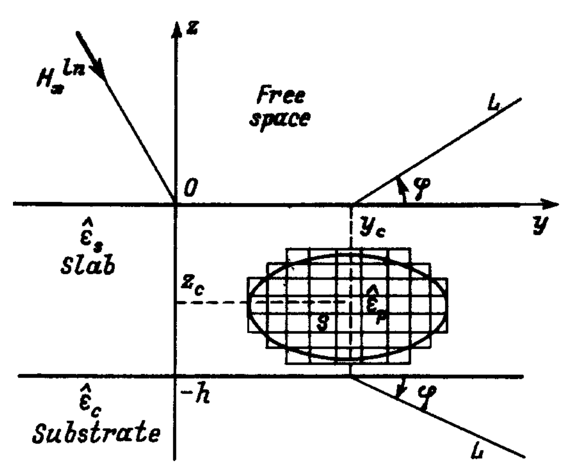


Рис. 1.

ты электрического поля $E_y, E_z$ можно выразить через единственную отличную от нуля компоненту магнитного поля $H_x$. Когда точка наблюдения $\mathbf{r}$ находится в свободном пространстве, имеем

$$E_y = -\frac{1}{ik_0}\frac{\partial H_x}{\partial z}, \qquad E_z = \frac{1}{ik_0}\frac{\partial H_x}{\partial y}, \tag{2}$$

а для области в пределах анизотропного полупространства, но вне включения, соответствующие формулы таковы:

$$E_y = -\frac{1}{ik_0 a}\left(\varepsilon_{yz}\frac{\partial H_x}{\partial y} + \varepsilon_{zz}\frac{\partial H_x}{\partial z}\right),$$

$$E_z = \frac{1}{ik_0 a}\left(\varepsilon_{yy}\frac{\partial H_x}{\partial y} + \varepsilon_{zy}\frac{\partial H_x}{\partial z}\right). \tag{3}$$

Сходные представления для подложки формально получаются из (2) после деления правой части на $\varepsilon_c$, а для точек внутри включения — заменой индекса $s$ на $p$ в правой части (3). Здесь $k_0 = \omega/c$ и $c$ — волновое число и скорость света в вакууме,

$$a_s = \varepsilon_{yy}^{(s)}\varepsilon_{zz}^{(s)} - \varepsilon_{yz}^{(s)}\varepsilon_{zy}^{(s)}, \quad a_p = \varepsilon_{yy}^{(p)}\varepsilon_{zz}^{(p)} - \varepsilon_{yz}^{(p)}\varepsilon_{zy}^{(p)}. \tag{4}$$

Заметим, что в (2), (3) для упрощения записи опущены члены, содержащие сторонние источники поля. Их отсутствие строго оправдано, когда источники поля отнесены в бесконечность, что мы далее предполагаем в целях большей определенности.

Уравнения Максвелла после исключения $E_y, E_z$ доставляют уравнения относительно основной неизвестной функции $H_x$. В свободном пространстве и подложке они принимают соответственно следующий вид:

$$\left(\nabla_\perp^2 + k_0^2\right) H_x = 0, \quad \left(\nabla_\perp^2 + k_c^2\right) H_x = 0, \tag{5), (6}$$

где $\nabla_\perp$ — оператор набла в плоскости $y0z$, $k_c = k_0\sqrt{\varepsilon_c}$ — волновое число в материале подложки.

Что же касается уравнения для $H_x$ в области $-h < z < 0$, то мы выпишем его с учетом того, что поле в пределах названной области в присутствие включения тождественно полю в отсутствие включения, которое возбудили бы электрические токи с объемной плотностью

$$\mathbf{J}_p - \left(ik_0 c/4\pi\right)\left[\hat{\varepsilon}_p - \hat{\varepsilon}_s\right]\mathbf{E}, \tag{7}$$

распределенные в пределах $S$ [10]. Здесь $\mathbf{E}$ — (неизвестное) электрическое поле внутри включения. Результирующие уравнения относительно $H_x$ при $-h < z < 0$ принимают единообразный вид

$$\left[\varepsilon_{yy}^{(s)}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon_{zz}^{(s)}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\varepsilon_{yz}^{(s)} + \varepsilon_{zy}^{(s)}\right)\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + k_0^2 a_s\right] H_x = a_s q \tag{8}$$

для точек, расположенных как вне, так и внутри включения. Величина

$$q = \frac{4\pi}{ca_s}\left[\left(\varepsilon_{zy}^{(s)}\frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon_{zz}^{(s)}\frac{\partial}{\partial z}\right) J_{py} - \left(\varepsilon_{yy}^{(s)}\frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon_{yz}^{(s)}\frac{\partial}{\partial z}\right) J_{pz}\right] \tag{9}$$

имеет смысл вторичных источников, "наведенных" первичным полем во включении, а $J_{py}, J_{pz}$ принимают нулевые значения вне области $S$ и равны

$$J_{py} = -\frac{ik_0 c}{4\pi}\left(\eta_{yy}E_y + \eta_{yz}E_z\right),$$

$$J_{pz} = -\frac{ik_0 c}{4\pi}\left(\eta_{zy}E_y + \eta_{zz}E_z\right) \tag{10}$$

в пределах $S$. Здесь функции $\eta_{jk} \equiv \varepsilon_{jk}^{(p)} - \varepsilon_{jk}^{(s)}$ определяют электрический контраст включения по отношению к окружающей среде $(j, k = y, z)$. Вдобавок к сформулированным уравнениям функция $H_x$ должна подчиняться условию непрерывности на границах слоя $z = 0, -h$ и обеспечивать там непрерывность величин $E_y, E_z$.

**4**. Введем в рассмотрение решение $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ краевой задачи для $H_x(\mathbf{r})$ из предыдущего раздела, которое отвечает точечному источнику $q(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, расположенному внутри слоя $(-h < z' < 0)$, и удовлетворяет условиям излучения в бесконечности $(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \to +\infty)$. Это решение — функция Грина — может быть найдено путем применения к названной задаче преобразования Фурье по $y - y'$ и решения возникающей краевой задачи с независимой переменной $z$ с помощью стандартной техники [11]. Итоговые выражения для $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ вынесены в Приложение.

Располагая функцией Грина, мы можем обратить краевую задачу для $H_x$ и заменить ее интегральным соотношением

$$H_x(\mathbf{r}) = H_x^{in}(\mathbf{r}) + \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')q(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}', \tag{11}$$

где интегрирование ведется по всей плоскости $y0z$.

Приняв во внимание определение (9) величины $q$ и проинтегрировав в (11) по частям, получим

$$H_x(\mathbf{r}) = H_x^{in}(\mathbf{r}) + ik_0 F[E_y, E_z](\mathbf{r}). \tag{12}$$

В этом соотношении $\mathbf{r}$ — произвольная точка в плоскости $y0z$,

$$F[E_y, E_z](\mathbf{r}) = \int_S d\mathbf{r}'\left[L_y(\mathbf{r}, \mathbf{r}')E_y(\mathbf{r}') + L_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}')E_z(\mathbf{r}')\right], \tag{13}$$

$$a_s L_y(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left[\varepsilon_{zy}^{(s)}\varepsilon_{yy}^{(p)}(\mathbf{r}') - \varepsilon_{yy}^{(s)}\varepsilon_{zy}^{(p)}(\mathbf{r}')\right]\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')/\partial y' + \left[\varepsilon_{zz}^{(s)}\eta_{yy}(\mathbf{r}') - \varepsilon_{yz}^{(s)}\eta_{zy}(\mathbf{r}')\right]\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')/\partial z', \tag{14}$$

$$a_s L_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left[\varepsilon_{zz}^{(s)}\varepsilon_{yz}^{(p)}(\mathbf{r}') - \varepsilon_{yz}^{(s)}\varepsilon_{zz}^{(p)}(\mathbf{r}')\right]\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')/\partial z' + \left[\varepsilon_{zy}^{(s)}\eta_{yz}(\mathbf{r}') - \varepsilon_{yy}^{(s)}\eta_{zz}(\mathbf{r}')\right]\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')/\partial y'. \tag{15}$$

Подставим выражение (12) для $H_x$ в прямые формулы для $E_y, E_z$, считая, что точка $\mathbf{r}$ принадлежит области $S$.

В результате мы приходим к системе двух связанных интегродифференциальных уравнений

$$E_y(\mathbf{r}) = -\frac{1}{a_p(\mathbf{r})}\left[\varepsilon_{yz}^{(p)}(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon_{zz}^{(p)}(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial z}\right] \times \left[H_x^{in}(\mathbf{r})/ik_0 + F(\mathbf{r})\right], \quad (16)$$

$$E_z(\mathbf{r}) = \frac{1}{a_p(\mathbf{r})}\left[\varepsilon_{yy}^{(p)}(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon_{zy}^{(p)}(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial z}\right] \times \left[H_x^{in}(\mathbf{r})/ik_0 + F(\mathbf{r})\right], \quad (17)$$

($\mathbf{r} \in S$) для электрического поля внутри включения. Если решение этих уравнений известно, то формулы (12), (13) позволяют найти функцию $H_x$ в любой точке плоскости $y0z$, а соответствующие прямые формулы для $E_y, E_z$ — рассчитать эти величины всюду вне включения. Обрисованная последовательность действий положена в основу алгоритма рассматриваемой задачи рассеяния.

**5**. При отыскании численного решения уравнений (16), (17) мы вначале с помощью прямоугольной сетки, приведенной на рис. 1, аппроксимируем поперечное сечение включения ступенчатой фигурой, которая состоит из одинаковых ячеек размером $\Delta y \times \Delta z$. Затем приближенно полагается, что в пределах каждой ячейки неизвестные величины $E_y, E_z$ постоянны, а распределение диэлектрической проницаемости однородно. Взяв интегродифференциальные уравнения (16), (17) в центре каждой ячейки, мы в итоге приходим к чистеме линейных алгебраических уравнений вида

$$E_{ym} = \sum_{n=1}^{M}\left(K_{mn}^{yy}E_{yn} + K_{mn}^{yz}E_{zn}\right) + Q_m^y, \quad (18)$$

$$E_{zm} = \sum_{n=1}^{M}\left(K_{mn}^{zy}E_{yn} + K_{mn}^{zz}E_{zn}\right) + Q_m^z \quad (19)$$

($m = 1, 2, \ldots, M$). Здесь $E_{ym}$ и $E_{zm}$ — неизвестные значения величин $E_y$ и $E_z$ в $m$-й ячейке; $M$ — общее число ячеек, аппроксимирующих $S$. Явный вид коэффициентов $K_{mn}^{yy}, \ldots, K_{mn}^{zz}$ и правых частей $Q_m^y$, $Q_m^z$ легко определяется из соотношений (16), (17). К примеру,

$$K_{mn}^{yy} = -\frac{1}{a_p(\mathbf{r}_m)}\left[\varepsilon_{yz}^{(p)}(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon_{zz}^{(p)}(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial z}\right]\Bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_m} \times \int\limits_{S_n} d\mathbf{r}' L_y(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (20)$$

$$Q_m^y = -\frac{1}{ik_0 a_p(\mathbf{r}_m)}\left[\varepsilon_{yz}^{(p)}(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon_{zz}^{(p)}(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial z}\right] \times H_x^{in}(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_m}, \quad (21)$$

где $S_n$ — внутренность $n$-й ячейки, $\mathbf{r}_m$ — центральная точка ячейки с номером $m$.

Вычисление коэффициентов $K_{mn}^{jk}$ $(j, k = y, z)$ производится так. Пользуясь надлежащим выражением для функции Грина, приведенным в Приложении, величины $L_y$, $L_z$ из (14), (15), а затем и сами коэффициенты $K_{mn}^{jk}$ можно представить в виде суммы двух слагаемых (например, $K_{mn}^{jk} = K_{mn}^{jk(0)} + K_{mn}^{jk(r)}$), первое из которых характеризует задачу рассеяния на включения в безграничной среде с параметрами анизотропного слоя, а второе учитывает конечность толщины слоя. Численный расчет величин $K_{mn}^{jk(0)}$, сводящийся к вычислению линейных интегралов по контуру ячейки, описан в работах [9,12]. Что же касается величин $K_{mn}^{jk(r)}$, то встречающиеся при их вычислении интегралы по $\mathbf{r}'$ в пределах $n$-й ячейки можно просто заменить произведением подынтегрального выражения, взятого в центре $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_n$ ячейки, на площадь $\Delta y \Delta z$ этой ячейки. Наконец, интегралы типа Зоммерфельда, которые возникают в выражениях для $K_{mn}^{jk(r)}$ из-за наличия интеграла Фурье в правой части формулы (П2)

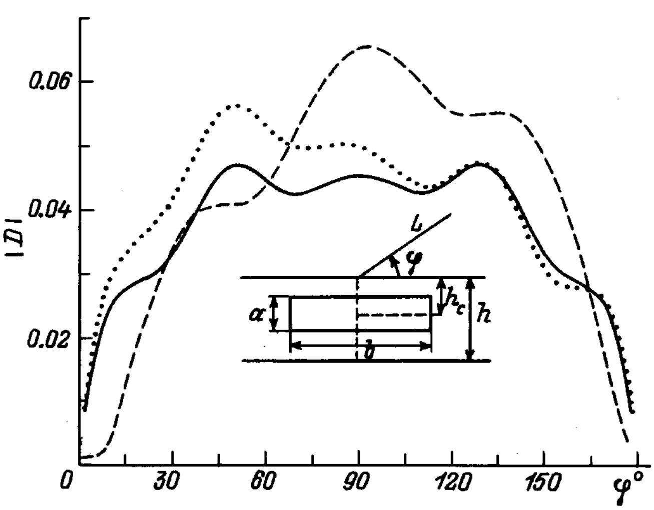


Рис. 2.

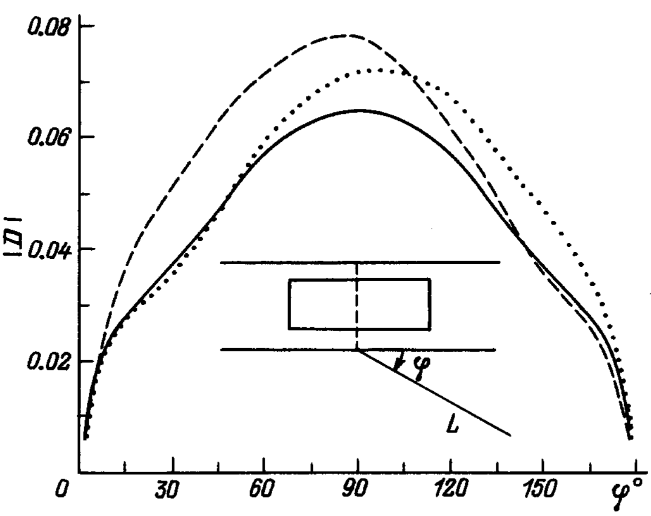


Рис. 3.

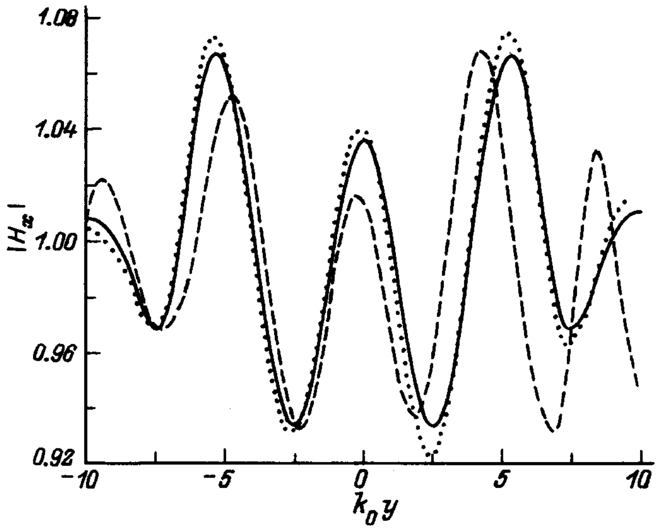


**Рис. 4.**

для добавки за счет отражений $G^{(r)}$, вычисляются путем смещения первоначального контура интегрирования с вещественной оси в комплексную плоскость $\varkappa$. Детали численной реализации этого приема описаны в [9].

Система линейных алгебраических уравнений (18), (19) в рассмотренных ниже примерах решалась численно методом Гауса.

**6**. На рис. 2–4 проиллюстрировано численное решение задачи рассеянной плоской $H$-поляризованной волны единичной амплитуды $A^{in} = 1$, которая падает из верхнего полупространства нормально к слою. Слой электрической толщиной $k_0h = 2.0$ находится в вакууме (т. е. $\varepsilon_c = 1.0$). Прямоугольное включение (оно показано на вставке к рис. 2) имеет размеры $k_0a = 0.4$, $k_0b = 0.8$, а его центр симметрии расположен на расстоянии $k_0h_c = 2.0$ от верхней границы слоя. При численных расчетах включение разбивалось на 72 ячейки (12 разбиений по горизонтали, 6 — по вертикали). На этих рисунках сплошная линия относится к базовой модели изотропного слоя и изотропного включения с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_c = 2.0$, $\varepsilon_p = 4.0$ соответственно. Штриховая линия отвечает случаю, который отличается от придыдущего тем, что материал слоя — одноосный диэлектрик. Главные значения диэлектрической проницаемости этого диэлектрика (т. е. значения вдоль оптической оси и в поперечном направлении) равны $\varepsilon_\parallel = 3.0$, $\varepsilon_\perp = 2.0$, а оптическая ось, лежащая в плоскости $y0z$, отклонена вниз на угол $\varphi_0 = 30°$ относительно направления оси $0y$. Интересующие нас элементы тензора диэлектрической проницаемости слоя $\hat{\varepsilon}_s$ принимают следующие значения:

$$\varepsilon_{yy}^{(s)} = \varepsilon_\parallel^{(s)} \cos^2\varphi_0 + \varepsilon_\perp^{(s)} \sin^2\varphi_0 = 2.25,$$

$$\varepsilon_{zz}^{(s)} = \varepsilon_\parallel^{(s)} \sin^2\varphi_0 + \varepsilon_\perp^{(s)} \cos^2\varphi_0 = 2.75,$$

$$\varepsilon_{yz}^{(s)} = \varepsilon_{zy}^{(s)} = \left(\varepsilon_\perp^{(s)} - \varepsilon_\parallel^{(s)}\right) \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 = -0.43. \quad (22)$$

Пунктир характеризует дополнительный случай, когда материал слоя — изотропный диэлектрик с проницаемостью $\varepsilon_s = 2.0$, а включение — одноосный диэлектрик, главные значения проницаемости которого равны $\varepsilon_\parallel^{(p)} = 5.0$, $\varepsilon_\perp^{(p)} = 4.0$, а оптическая ось лежит в плоскости $y0z$ и наклонена вниз под углом $\varphi_0 = 30°$ относительно оси $0y$. Элементы тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}_p$ вычисляются по формулам, аналогичным (22), и оказываются равными

$$\varepsilon_{yy}^{(p)} = 4.25, \quad \varepsilon_{zz}^{(p)} = 4.75, \quad \varepsilon_{yz}^{(p)} = \varepsilon_{zy}^{(p)} = -0.43. \quad (23)$$

На рис. 2, 3 представлено угловое распределение поля, рассеянное в верхнее полупространство (рис. 2). Это распределение характеризуется величиной $D(\varphi)$, определенной асимптотической формулой для $x$-компоненты рассеянного магнитного поля в дальней зоне вне слоя

$$H_x^{sc}(\mathbf{r}) = A^{in} D(\varphi) \frac{e^{ik_0L}}{\sqrt{L}} \quad (24)$$

($k_0L \gg 1$). Полярные координаты $L, \varphi$ для точки наблюдения в верхнем или нижнем полупространстве определены на рис. 1. При этом точка $y_c, z_c$ в рассматриваемом случае прямоугольного включения совпадает с центром симметрии последнего. Рис. 2, 3 отчетливо демонстрируют влияние анизотропии в слое или включении на формирование рассеянного поля.

На рис. 4 показано распределение полного поля $|H_x|$ на верхней границе слоя. Рисунок, как и следовало ожидать, симметричен относительно точки $y = 0$ в случае изотропных включения и слоя, так как плоская волна падает нормально к слою. Осциллирующий характер приведенных зависимостей отражает значительную роль интерференционных явлений при формировании рассеянного и полного полей. По мере удаления от включения вдоль поверхности слоя эти осцилляции сглаживаются, и величина $|H_x|$ выходит на постоянное значение $|H_x^{in}|$.

## Приложение

Если точка наблюдения находится в слое ($-h < z < 0$), то $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ представляется в виде суммы $G = G^{(0)} + G^{(r)}$ функции Грина $G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ для безграничной среды с диэлектрической проницаемостью слоя, и добавки $G^{(r)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, которая учитывает отражение от границ $z = 0, -h$. При этом

$$G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{a_s}{4i\sqrt{\nu}} H_0^{(1)}(k_0 s), \quad (\text{П1})$$

$$G^{(r)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{a_s}{2\pi i \varepsilon_{zz}^{(s)}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varkappa}{(\gamma_+ - \gamma_-)P} e^{i\varkappa(y-y')}$$

$$\times \Big[\exp(i\gamma_+ z)AR + \exp(i\gamma_- z)BQ\Big], \quad (\text{П2})$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода,

$$\nu = \varepsilon_{yy}^{(s)}\varepsilon_{zz}^{(s)} - (1/4)\left(\varepsilon_{yz}^{(s)} + \varepsilon_{zy}^{(s)}\right)^2, \quad (\text{П3})$$

$$s^2 = (a_s/\nu)\Big[\varepsilon_{yy}^{(s)}(z-z')^2 + \varepsilon_{zz}^{(s)}(y-y')^2 - \left(\varepsilon_{yz}^{(s)} + \varepsilon_{zy}^{(s)}\right)(y-y')(z-z')\Big], \qquad (\Pi 4)$$

$$\gamma_\pm = -\varkappa\frac{\varepsilon_{yz}^{(s)} + \varepsilon_{zy}^{(s)}}{2\varepsilon_{zz}^{(s)}} \pm \left[\frac{k_0^2 a_s - \varkappa^2\varepsilon_{yy}^{(s)}}{\varepsilon_{zz}^{(s)}} + \varkappa^2\left(\frac{\varepsilon_{yz}^{(s)} + \varepsilon_{zy}^{(s)}}{2\varepsilon_{zz}^{(s)}}\right)^2\right]^{1/2}. \qquad (\Pi 5)$$

$$A = e^{i(\gamma_+ - \gamma_-)h}\left[e^{-i\gamma_- z'} + Qe^{-i\gamma_+ z'}\right], \qquad (\Pi 6)$$

$$B = e^{-i\gamma_+ z'} + \mathrm{R}e^{i(\gamma_+ - \gamma_-)h - i\gamma_- z'}, \qquad (\Pi 7)$$

$$P = 1 - QR\exp\left[i(\gamma_+ - \gamma_-)h\right], \qquad (\Pi 8)$$

$$Q = -\frac{\varepsilon_{zz}^{(s)}\gamma_+ + \varepsilon_{yz}^{(s)}\varkappa - \gamma_0 a_s}{\varepsilon_{zz}^{(s)}\gamma_- + \varepsilon_{yz}^{(s)}\varkappa - \gamma_0 a_s}, \qquad (\Pi 9)$$

$$R = -\frac{\varepsilon_{zz}^{(s)}\gamma_- + \varepsilon_{yz}^{(s)}\varkappa + \gamma_c a_s/\varepsilon_c}{\varepsilon_{zz}^{(s)}\gamma_+ + \varepsilon_{yz}^{(s)}\varkappa + \gamma_c a_s/\varepsilon_c}, \qquad (\Pi 10)$$

$$\gamma_0 = \left(k_0^2 - \varkappa^2\right)^{1/2}, \quad \gamma_c = \left(k_0^2\varepsilon_c - \varkappa^2\right)^{1/2}, \qquad (\Pi 11)$$

($0 \leqslant \arg\gamma_0,\ \gamma_c < \pi$). Если же точка наблюдения находится вне слоя, то $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ представляется в виде интеграла Фурье

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{a_s}{2\pi i\varepsilon_{zz}^{(s)}} \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varkappa}{(\gamma_+ - \gamma_-)P}\, \mathrm{e}^{i\kappa(y-y')} F(\varkappa, z, z'), \qquad (\Pi 13)$$

где при $z > 0$

$$F(\varkappa, z, z') = (1+Q)\,e^{i\gamma_0 z} \times \left[e^{-i\gamma_+(z'+h)} + \mathrm{R}e^{-i\gamma_-(z'+h)}\right], \qquad (\Pi 14)$$

а при $z < -h$

$$F(\varkappa, z, z') = (1+R)\,e^{-i\gamma_c(z+h)}\left[e^{-i\gamma_- z'} + Qe^{-i\gamma_+ z'}\right]. \qquad (\Pi 15)$$

Напомним, что в этих формулах считается $-h < z' < 0$.

## Список литературы


[1] *Monzon J.C.* // IEEE Trans. 1987. Vol. AP-35. N 6. P. 670–682.
[2] *Beker B., Umashankar K.R., Taflove A.* // IEEE Trans. 1989. Vol. AP-37. N 12. P.1573—1581.
[3] *Graglia R.D., Uslenghi P.L.E.* // IEEE Trans. 1984. Vol. AP-32. N 8. P. 867–869. Ibid. 1987. Vol. AP-35. N 2. P. 225–232.
[4] *Graglia R.D., Uslenghi P.L.E., Zich R.S.* // Proc. IEEE. 1989. Vol. 37. N 5. P. 750–760.
[5] *Monzon J.C.* // IEEE Trans. 1988. Vol. AP-36. N 10. P. 1401–1406.
[6] *Багацкая О.В., Жук Н.П., Шульга С.Н.* // РиЭ. 1995. Т. 40. № 6. С. 869–875.
[7] *Курушин Е.П., Нефедов Е.И.* Электродинамика анизотропных структур. М.: Наука, 1980.
[8] *Жук Н.П., Яровой А.Г.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 7. С. 1–11.
[9] *Zhuck N.P., Yarovoy A.G.* // IEEE Trans. 1994. Vol. AP-42. N 1. P. 16–21.
[10] *Хижняк Н.А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986.
[11] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
[12] *Su C.C.* // IEEE Trans. 1987. Vol. AP-35. N 12. P. 1418–1425.