01;10

Об уравнениях огибающих электронного пучка в магнитном поле

© Н.Д. Наумов

Центральный физико-технический институт,
141300 Сергиев Посад, Россия

(Поступило в Редакцию 14 ноября 1996 г.)

На основе автомодельного подхода получены уравнения огибающих трубчатого пучка, распространяющегося вдоль магнитного поля, а также электронного пучка, инжектированного под углом к магнитному полю. Построено точное решение самосогласованной задачи о поперечных колебаниях холодного трубчатого пучка в магнитном поле и проведено сравнение с приближенными результатами метода уравнения огибающих.

Введение

Определенный прогресс в описании динамики пучков заряженных частиц связан с использованием уравнения огибающей, что позволило построить ряд аналитических самосогласованных моделей распространения пучков [1–4]. Возможность перехода от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям обусловлена существованием автомодельных решений уравнений движения газа заряженных частиц [5]. Для криволинейных пучков приближенные решения автомодельного типа могут быть построены в случае малости отношения поперечных размеров пучка к его радиусу [6]. Однако при этом открытым остается вопрос об адекватности подобного приближенного решения нелинейной задачи.

В данной работе рассмотрены поперечные колебания холодного трубчатого пучка электронов в магнитном поле. Как оказывается, для тонкого трубчатого пучка с помощью метода уравнения огибающей можно построить приближенное решение автомодельного типа, а с помощью метода функции Грина — точное решение нестационарной самосогласованной задачи. Сравнение этих двух решений представляет несомненный методический интерес.

В работе также получены уравнения огибающих тонкого спирального пучка в магнитном поле. Эта модель имеет практическое значение в связи с использованием электронных пучков для изучения ионосферы. Инжекция электронного пучка в ионосферную плазму под углом к геомагнитному полю рассматривалась в работе [7], однако полученные так результаты, как указывают сами авторы, неприменимы в случае инжекции с питч-углами, близкими к 90°. Предлагаемая модель позволяет заполнить этот пробел на интервал времени, в течение которого отношение поперечных размеров пучка к радиусу его кривизны остается малой величиной.

Трубчатый пучок

Поведение осесимметричного холодного потока нерелятивистских электронов, распространяющихся вдоль магнитного поля, описывается самосогласованной системой уравнений движения газа заряженных частиц

$$\frac{d}{dt}V_r - \frac{V_\theta^2}{r} = -\omega_c V_\theta + \frac{4\pi e^2}{mr}\int\limits_0^r n(x)x\,dx, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}V_\theta + \frac{V_r V_\theta}{r} = \omega_c V_r, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n V_r}{\partial r} = 0, \qquad (2)$$

где $\omega_c = e_0 B_0/mc$ — циклотронная чистота, $e = -e_0$ — заряд электрона, $d/dt = \partial/\partial t + V_r\partial/\partial r$.

Нетрудно видеть, что стационарное решение уравнения для азимутальной скорости имеет вид $V_\theta = \omega_L(r + C^2/r)$, где $\omega_L = \omega_c/2$ — ларморовская частота. Постоянная C определяется из условия, что находящиеся на расстоянии $r = C$ от оси пучка частицы вращаются с циклотронной частотой. Этот результат является следствием сохранения для осесимметричного пучка азимутальной составляющей обобщенного импульса частицы $P_\theta = r(p_\theta + mr\omega_L) = m\omega_L C^2$.

Для радиального уравнения можно построить приближенное нестационарное решение. Как было показано ранее [6], такое решение может быть получено в случае малости отношения поперечного размера пучка к его радиусу, когда можно разложить фигурирующие в уравнении (1) члены с азимутальной скоростью, удерживая лишь члены первого порядка относительно величины d/r_1, где r_1— внутренний радиус пучка, d — толщина пучка. Практически линейного характера изменения собственного электрического поля пучка можно добиться выбором соответствующего профиля его плотности

$$n(\mathbf{x}, t) = \frac{I}{2\pi e_0 urd} H(\xi - \xi^2), \qquad (3)$$

где I, u — соответственно ток и продольная скорость пучка; $H(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда; $\xi = (r - r_1)/d$ — автомодельная переменная.

Для рассматриваемого класса неустановившихся движений скорость электронного газа линейно зависит от автомодельной переменной, поэтому радиальная скорость пучка имеет следующий вид: $V_r = \dot{r}_1 + \xi\dot{d}$. В этом случае плотность частиц (3) удовлетворяет уравнению непрерывности (2). Подстановка этого выражения в линеаризованное уравнение для радиальной скорости (1) позволяет получить уравнения для внутреннего радиуса пучка и его толщины

$$\ddot r_1+\omega_L^2\left(r_1-\frac{C^4}{r_1^3}\right)=0,\quad \ddot d+\omega_L^2\left(1+3\frac{C^4}{r_1^4}\right)d=d_0\omega_p^2,\quad (4)$$

где $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2/m}$ — плазменная частота пучка, $n_0 = I/2\pi u e_0 r_{10} d_0$.

Следует отметить, что коллективное поле на внутренней поверхности пучка равно нулю. Поэтому уравнение для колебаний внутреннего радиуса пучка в отличие от уравнения для толщины пучка является точным.

Нетрудно видеть, что для холодного пучка внутренний радиус не зависит от времени, если в начальный момент времени частицы на внутренней поверхности пучка вращаются с циклотронной частотой, т.е. когда $C = r_{10}$. В этом случае, как следует из (3), толщина и внешний радиус тонкого пучка периодически изменяются со временем

$$r_2 = r_{10} + d,\quad d = d_0\big[g + (1-g)\cos\omega_c t\big],\qquad (5)$$

где $g = \omega_p^2/\omega_c^2$.

Очевидно, что при $d = 1$ реализуется стационарное состояние пучка.

Метод функции Грина

Для поперечного движения осесимметричного холодного пучка в магнитном поле можно получить точное решение самосогласованной задачи. Хотя рассматриваемая задача по существу является гидродинамической, для ее решения удобно исходить из функции распределения электронного газа

$$F(\chi, P_\theta, p_z, t) = f(\chi, t)\delta(P_\theta - m\omega_L C^2)\delta(p_z - mu),$$

где через χ для кратности обозначена совокупность переменных r, p_r.

Решение уравнения Власова для радиальной функции $f(\chi, t)$

$$Lf(\chi,t)=0,\quad L=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{p_r}{m}\frac{\partial}{\partial r}+\left[eE+m\omega_L^2\left(\frac{C^4}{r^3}-r\right)\right]\frac{\partial}{\partial p_r}$$

может быть представлено с помощью функции Грина оператора L

$$H(t)f(\chi,t) = \int G(\chi,\chi_0;t)f(\chi_0,0)d\chi_0,$$

$$LG(\chi,\chi_0;t) = \delta(t)\delta(\chi-\chi_0).$$

Здесь $f(\chi, 0)$ — начальная функция распределения пучка, которая в данном случае имеет вид $f(\chi,0) = n_0 r\nu(r)\delta(p_r)$, где $n_0\nu(r) = n(r,0)$ — начальное распределение плотности частиц.

Функция Грина определяется законом радиального движения одиночной частицы $r(t;\chi_0)$, $p_r(t;\chi_0)$ в совокупности внешнего и коллективного полей при $P_\theta = m\omega_L C^2$

$$G(\chi,\chi_0;t) = H(t)\delta(r - r(t;\chi_0))\delta(p_r - p_r(t;\chi_0)).$$

Закон движения электрона удовлетворяет следующим условиям $r(0;\chi_0) = r_0$, $p_r(0;\chi_0) = p_{r0}$.

Основная трудность при реализации этого метода решения самосогласованной задачи связана с учетом влияния на движение частицы собственного поля пучка, которое заранее неизвестно и изменяется при распространении пучка. Эта проблема упрощается, если слои частиц перемещаются в радиальном направлении друг за другом, без обгонов. Тогда величина коллективного поля, действующего на частицу, не зависит от времени и определяется как начальным значением ее радиального положения r_0, так и заданным начальным распределением плотности частиц

$$E_r(r(t;\chi_0),t) = 4\pi e n_0\frac{Q(r_0)}{r},\quad Q(r_0) = \int_{r_{10}}^{r_0}\nu(x)x\,dx.\quad (6)$$

В итоге для функции $f(\chi, t)$ найдем

$$f(\chi,t) = n_0\int dr_0 r_0\nu(r_0)\delta(r - s(t,r_0))\delta(p_r - m\dot s(t,r_0)),$$

где $s(t, r_0)$ — решение уравнения

$$\ddot s = \omega_L^2\left(\frac{C^4}{s^3} - s\right) + Q(r_0)\frac{\omega_p^2}{s}\qquad (7)$$

с начальными условиями $s(0,r_0) = r_0$, $\dot s(0,r_0) = 0$. Для гидродинамических характеристик потока получим

$$n(r,t) = \int F(\chi,P_\theta,p_z,t)d^3p = n_0\frac{\rho(r,t)\nu(\rho(r,t))}{r|S(r,t)|},\quad (8)$$

$$V_r(r,t) = \frac{1}{mn}\int p_r F(\chi,P_\theta,p_z,t)d^3p = U(r,t).\qquad (9)$$

Здесь $\rho(r,t)$ — решение трансцендентного уравнения $s(t,r_0)=r$, т.е. $s\big(t,\rho(r,t)\big)\equiv r$, а также введены следующие обозначения: $S(r,t)=R\big(t,\rho(r,t)\big)$, $R(t,r_0)=\partial s/\partial r_0$, $U(r,t) = \dot s\big(t,\rho(r,t)\big)$. Для расчетов гидродинамических характеристик потока можно воспользоваться более простым способом. Как следует из выражений (8), (9), в момент времени t плотность частиц и радиальная скорость пучка в точке $r = s(t, r_0)$ равны

$$n(s,t) = n_0\frac{r_0\nu(r_0)}{s(t,r_0)|R|},\quad V_r(s,t) = \dot s(t,r_0).\qquad (10)$$

Уравнение для функции R найдем, дифференцируя (7) по r_0,

$$\ddot R = \nu(r_0)\omega_p^2\frac{r_0}{s} - \left[\omega_L^2\left(1+3\frac{C^4}{s^4}\right) + Q(r_0)\frac{\omega_p^2}{s^2}\right]R.$$

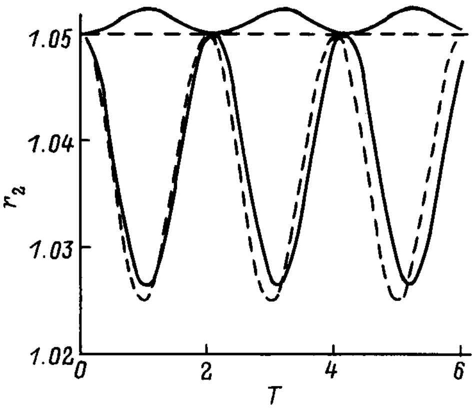

Рис. 1. Колебания внешнего радиуса пучка.

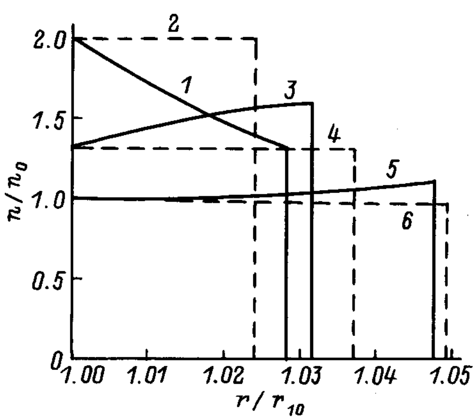

Рис. 2. Изменение плотности частиц.

Очевидно, что начальные условия для R имеют вид $R_0 = 1$, $\dot{R}_0 = 0$.

Таким образом, расчет гидродинамических характеристик осесимметричного холодного потока заряженных частиц в магнитном поле сводится к решению двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Очевидно, что для сплошного пучка нижний предел интегрирования в выражении (6) следует положить равным нулю. Для трубчатого пучка при последовательном изменении r_0 с небольшим шагом от r_{10} до r_{20} выражения (10) позволяют получить характеристики пучка для заданного момента времени t. Отметим, что при $s_0 = r_{10}$ уравнение (7), которое в этом случае переходит в первое из уравнений (4), определяет колебания внутреннего радиуса пучка. В случае $s_0 = r_{20}$ уравнение (7) описывает изменение со временем внешнего радиуса пучка; при выборе начальной плотности частиц в виде (3), т. е. когда $\nu = r_{10}/r$, получим

$$\ddot{r}_2 = \omega_L^2\left(\frac{C^4}{r_2^3} - r_2\right) + d_0\omega_p^2\frac{r_{10}}{r_2}. \tag{11}$$

На рис. 1 представлены результаты расчетов внешнего радиуса пучка для начальных условий $C = r_{10}$, $r_{20} = 1.05r_{10}$ при $g = 1$ и 0.75. Сплошные линии соответствуют решению уравнения (11), штриховые — аналогичным данным автомодельного приближения (5); переменная $T = \omega_c t$. Можно констатировать, что уравнения огибающих дают приемлемое описание динамики поперечных размеров пучка по крайней мере на начальном этапе движения. На рис. 2 приведено сравнение точного и приближенного решений для плотности частиц при $g = 0.75$ в моменты времени $t = 5\pi/\omega_c$ (кривые *1, 2*), $t = 5.5\pi/\omega_c$ (кривые *3, 4*) и $t = 6\pi/\omega_c$ (кривые *5, 6*). Для плотности частиц приближенные и точные результаты отличаются в большей степени.

Спиральный пучок

Будем считать, что ось пучка совпадает с траекторией одиночного электрона в магнитном поле, т. е. представляет собой винтовую линию

$$\mathbf{Y}(\sigma) = \frac{1}{k}\sin\alpha\cos k\sigma\mathbf{e}_x + \frac{1}{k}\sin\alpha\sin k\sigma\mathbf{e}_y + \sigma\cos\alpha\mathbf{e}_z,$$

где $k = \omega_c/u$, u — скорость частицы, σ — длина пути, α — угол между векторами магнитного поля и начальной скорости элекрона.

Поперечную динамику пучка удобно рассматривать относительно системы криволинейных координат ρ, σ, ζ

$$\mathbf{x} = \mathbf{Y}(\sigma) + \rho\mathbf{e}_r + \zeta\mathbf{b},$$

где $\mathbf{b} = [\mathbf{tn}]$; $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ — векторы трехгранника Френе, связанного с кривой $\mathbf{Y}(\sigma)$.

Для винтовой линии направление вектора нормали противоположно радиальному орту $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$. В этой системе координат внешнее поле имеет вид $\mathbf{B}_0 = B_0(\mathbf{b}\sin\alpha + \mathbf{t}\cos\alpha)$.

Пусть отношение поперечных размеров пучка к радиусу его кривизны $r_c = 1/k\sin\alpha$, а также к радиусу кручения $r_t = 1/k\cos\alpha$ является малой величиной. С точностью до членов первого порядка малости продольная скорость пучка постоянна, поэтому, полагая $\mathbf{V} = u\mathbf{t} + \Gamma\mathbf{e}_r + \Lambda\mathbf{b}$ и пренебрегая членами второго порядка, из уравнения Эйлера для заряженного газа найдем следующие уравнения для функций Γ, Λ:

$$M\Gamma + f\rho = F_\rho, \quad M\Lambda = F_\zeta,$$

$$M = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial\sigma} + (\Gamma - w\zeta)\frac{\partial}{\partial\rho} + (\Lambda + w\rho)\frac{\partial}{\partial\zeta}, \tag{12}$$

где $f = u^2/r_c^2$, $w = u/r_t$; F_ρ, F_ζ — члены, обусловленные собственным полем и эмиттансом пучка.

Выражения для этих членов в случае пучка эллиптического сечения наиболее просто выглядят в системе координат q_1, q_2, связанной с осями симметрии сечения пучка [8],

$$F_1 = \frac{hq_1}{a(a+b)} + \frac{Hq_1}{a^4}, \quad F_2 = \frac{hq_2}{b(a+b)} + \frac{Hq_2}{b^4}.$$

Здесь $h = 4Ic^2/I_A\gamma^2$, I — ток пучка, $I_A = \gamma umc^2/e_0$ — ток Альфвена; a, b — полуоси сечения пучка; $H = u\varepsilon$, где ε — эмиттанс пучка. Собственное поле пучка аппроксимируется электромагнитным полем прямолинейного пучка эллиптического сечения, поскольку поправки, обусловленные кривизной пучка, будут, как и в случае кольцевого пучка [9], членами второго порядка малости.

Так как ориентация сечения пучка изменяется с течением времени, то оси системы координат q_1, q_2 будут повернуты относительно ортов $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{b}$ на некоторый угол ψ

$$q_1 = \rho\cos\psi + \zeta\sin\psi, \quad q_2 = \zeta\cos\psi - \rho\sin\psi.$$

Соответственно Γ, Λ следует представить через компоненты скорости газа V_i в новой системе координат

$$\Gamma = V_1\cos\psi - V_2\sin\psi - \zeta\Omega, \quad \Lambda = V_2\cos\psi + V_1\sin\psi + \rho\Omega,$$

где $\Omega = \dot\psi$ — угловая скорость вращения пучка относительно трехгранника Френе.

Если вместо σ ввести переменную $\tau = \sigma - ut$, то производная по τ в уравнениях (12) исчезает. В связи с этим зависимость характеристик пучка от τ носит параметрический характер и определяется начальными условиями при инжекции рассматриваемого сечения пучка. В результате из уравнений (12) для функций V_i получим следующие уравнения:

$$NV_1 - 2\Omega V_2 - q_2\dot\Omega - \lambda q_1 + f\Big(q_1\cos^2\psi - \frac{q_2}{2}\sin 2\psi\Big) = F_1, \tag{13}$$

$$NV_2 + 2\Omega V_1 - q_1\dot\Omega - \lambda q_2 + f\Big(q_2\sin^2\psi - \frac{q_1}{2}\sin 2\psi\Big) = F_2, \tag{14}$$

где

$$N = \frac{\partial}{\partial t} + V_i\frac{\partial}{\partial q_i} + w\Big(q_1\frac{\partial}{\partial q_2} - q_2\frac{\partial}{\partial q_1}\Big), \quad \lambda = \Omega(w+\Omega).$$

Поперечное движение газа в новой системе координат может также включать перемещения с эллиптическими линиями тока, поэтому следует исходить из следующих выражений для V_i через автомодельные переменные $\xi = q_1/a$, $\eta = q_2/b$:

$$V_1 = \dot a\xi - \omega a\eta, \quad V_2 = \dot b\eta + \omega b\xi, \tag{15}$$

где ω — некоторая функция времени.

Удовлетворяющая уравнению непрерывности плотность частиц имеет вид

$$n(\mathbf{x}, t) = \frac{I}{\pi abue_0 D}H(1 - \xi^2 - \eta^2),$$

где $D = 1 + k\rho\cos\alpha$.

Подставляя выражения (15) в уравнения (13), (14), в итоге получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для введенных функций времени a, b, ω, Ω

$$\ddot a = 2\omega\Omega b + \Big(\mu + w\omega\frac{a}{b} - f\cos^2\psi\Big)a + \frac{h}{a+b} + \frac{H}{a^3}, \tag{16}$$

$$\ddot b = 2\omega\Omega a + \Big(\mu + w\omega\frac{b}{a} - f\sin^2\psi\Big)b + \frac{h}{a+b} + \frac{H}{b^3}, \tag{17}$$

$$\dot\Omega + 2\Omega\frac{\dot b}{b} + \dot\omega\frac{a}{b} + 2\omega\frac{\dot a}{b} + w\frac{\dot a}{a} + \frac{f}{2}\sin 2\psi = 0, \tag{18}$$

$$\dot\Omega + 2\Omega\frac{\dot a}{a} + \dot\omega\frac{b}{a} + 2\omega\frac{\dot b}{a} + w\frac{\dot b}{b} - \frac{f}{2}\sin 2\psi = 0, \tag{19}$$

где $\mu = \lambda + \omega^2$.

Складывая (18), (19) и интегрируя получающееся уравнение, для функции Ω найдем

$$\Omega = \frac{1}{2ab}\Big[2a_0b_0\Big(\Omega_0 + \frac{w}{2}\Big) + \omega_0(a_0^2 + b_0^2) - \omega(a^2 + b^2)\Big] - \frac{w}{2}. \tag{20}$$

Эта связь между угловой скоростью вращения пучка относительно трехгранника Френе и угловой скоростью внутреннего движения газа может быть также получена из условия сохранения продольной составляющей вектора $(\mathbf{W} + e\mathbf{B}_0/mc)/n$, где $\mathbf{W} = \mathrm{rot}\mathbf{V}$ — завихренность, n — плотность газа.

На рис. 3 приведены результаты расчетов поперечных размеров пучка на основе численного решения системы уравнений (16)–(19). Были выбраны следующие значения параметров: $\alpha = 3\pi/8$, $\omega_0 = 0$, $h/(\omega_c a_s)^2 = 0.05$, $a_0 = b_0 = a_s$, где a_s — равновесный радиус бриллюэновского потока, распространяющегося вдоль магнитного поля с напряженностью $B_0\cos\alpha$. Этот радиус определялся из соотношения $w^2/4a_s = h/2a_s + H/a_s^3$, поскольку, как видно из выражения (20), для спирального пучка "эффективная" ларморовская частота равна $w/2$. Нижние кривые соответствуют a/a_s, верхние — b/a_s; переменная $T = \omega_c t$. Расчеты проводились для двух

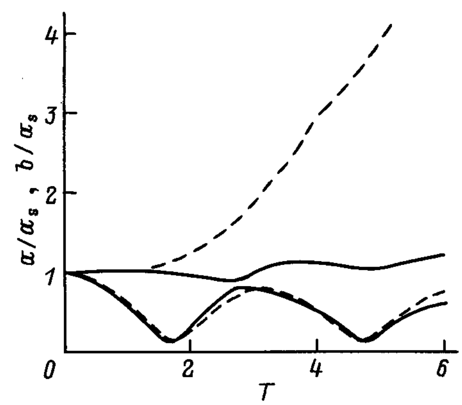

Рис. 3. Изменение поперечных размеров пучка.

начальных значений угловой скорости вращения пучка: $\Omega_0 = 0$ (штриховые кривые) и $\Omega_0 = -w/2$ (сплошные кривые). Полученные результаты показывают, что при инжекции под углом к магнитному полю вращающегося пучка уменьшается расплывание пучка под влиянием пространственного заряда.

Список литературы

[1] *Kapchinsky I.M., Vladimirsky V.V.* Proc. 1959 Intern. Conf. on High Energy Accelerators and Instrumentations. CERN, Geneva. P. 274.
[2] *Ярковой О.И.* // ЖТФ. 1966. Т. 36. Вып. 6. С. 988–996.
[3] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 1. P. 60–69.
[4] *Lee E.P., Cooper R.K.* // Part. Accel. 1976. Vol. 7. P. 83–95.
[5] *Наумов Н.Д.* // Физика плазмы. 1993. Т. 19. Вып. 11. С. 1406–1408.
[6] *Наумов Н.Д.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 7. С. 103–107.
[7] *Лизунов Г.В., Силивра А.А.* // Геомагнетизм и аэрономия. 1988. Т. 28. Вып. 6. С. 980–984.
[8] *Лоусон Дж.* Физика пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1980.
[9] *Саранцев В.П., Перельштейн Э.А.* Коллективное ускорение ионов электронными кольцами. М.: Атомиздат, 1979.