Журнал технической физики, 1998, том 68, № 1

01

Аномальный перенос частиц с конечной скоростью и асимптотическая фрактальность

© В.В. Учайкин

Ульяновский государственный университет,
432700 Ульяновск, Россия

(Поступило в Редакцию 22 января 1997 г.)

Получено обобщенное нестационарное уравнение переноса частиц с конечной скоростью свободного движения, включающее "полеты Леви" и эффект "ловушек". Показано, что вследствие учета конечной скорости асимптотическое (по времени) распределение блуждающей в одном измерении частицы имеет фрактальный характер только в случае, когда степенные хвосты распределений пробега и времени пребывания частицы в ловушке имеют одинаковые показатели.

Исследование хаотического поведения динамических систем дало импульс развитию новой ветви теории переноса — аномальной диффузии, или "странной кинетики" [1–4]. Основное отличие аномального переноса от обычного заключается в степенном характере распределения свободных пробегов ξ частицы ("полеты Леви").

$$p(\xi) \sim \alpha\xi_0^\alpha \xi^{-\alpha-1}, \quad \xi\to\infty, \quad 0<\alpha<2 \tag{1}$$

и включении в рассмотрение временнóго пребывания частицы в состоянии покоя ("ловушки") тоже с широким распределением степенного типа

$$q(\tau) \sim \beta\tau_0^\beta \tau^{-\beta-1}, \quad \tau\to\infty, \quad 0<\beta<2. \tag{2}$$

В случае преобладания первого эффекта речь идет о супердиффузии, в обратном случае — о субдиффузии. В [5–8] рассматриваются интегральные уравнения аномального переноса, а в [9–12] — уравнения в дробных производных. В обоих подходах пренебрегается временем пробега частицы между столкновениями, т.е. скорость свободного движения частицы полагается бесконечной. В этом приближении для фрактального в пространстве и времени ($\alpha<1$ и $\beta<1$) одномерного симметричного блуждания получено (формула (58) в работе [8])

$$\langle |x|\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\psi(x,t)dx \sim \mathrm{const}\, t^{\beta/\alpha}, \quad t\to\infty, \tag{3}$$

где $\psi(x,t)$ — распределение координаты блуждающей вдоль оси x частицы в момент времени t, рожденной в момент $t=0$ в точке $x=0$.

Формула (3), однако, является некорректной, поскольку при $\alpha<1$ абсолютный момент первого порядка бесконечен вследствие (1). Правильная формулировка полученного в [8] результата возможна на основе формулы (57) цитируемой работы, если представить ее в виде

$$\psi(x,t) \sim \frac{1}{m(t)}\Psi^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{m(t)}\right), \quad t\to\infty, \tag{4}$$

где

$$\Psi^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2 i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} dq \frac{Bu^{\beta-1}}{Bu^\beta + A|q|^\alpha} e^{u-iqx},$$

$$m(t) = t^{\beta/\alpha}. \tag{5}$$

Авторы [8] считают зависимость (5) "основным результатом, дающим широкие возможности для дискуссии" (с. 154). В настоящей работе мы показываем, что учет конечности скорости движения частицы между столкновениями существенно меняет ситуацию.

Положим, что частица рождается в начале координат в момент $t=0$ в состоянии 0 (ловушка) с вероятностью p_0 и в состоянии 1 (полет со скоростью $\mathbf{v}=\mathbf{\Omega} v$, $v=\mathrm{const}$) с вероятностью p_1, и примем угловые распределения рожденных в состоянии 1 и покидающих ловушки частиц одинаковыми и равными $W(\mathbf{\Omega})$,

$$\int W(\mathbf{\Omega})d\mathbf{\Omega} = 1.$$

Следуя логике вывода нестационарного интегрального уравнения обычной теории переноса (см., например, [13]), в рамках сделанных предположений приходим к следующему уравнению для плотности пространственного распределения блуждающей частицы в момент времени t:

$$\psi(\mathbf{r},t) = \int\limits_0^\infty dt' Q(t') F_0(\mathbf{r}, t-t')$$
$$+ v^{-1}\int d\mathbf{r}' P(\mathbf{r}') F_1(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t - r'/v), \tag{6}$$

$$F_0(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{r}' p(\mathbf{r}') F_1(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-r'/v) + p_0\delta(\mathbf{r})\delta(t), \tag{7}$$

$$F_1(\mathbf{r},t) = \int\limits_0^\infty d\tau q(\tau) F_0(\mathbf{r}, t-\tau) + p_1\delta(\mathbf{r})\delta(t), \tag{8}$$

где

$$Q(t) = \int_t^\infty q(\tau)d\tau, \quad p(\mathbf{r}) = \left[W(\mathbf{r}/r)/r^2\right] p(r),$$

$$P(\mathbf{r}) = \left[W(\mathbf{r}/r)/r^2\right] \int_r^\infty p(\xi)d\xi.$$

Можно убедиться, что при экспоненциальных распределениях $p(\xi)$ и $q(\tau)$ приведенный результат согласуется с обычной односкоростной теорией переноса запаздывающих нейтронов, а при $v \to \infty$ он переходит в известные интегральные уравнения аномальной диффузии [1,5,8,12].

В случае одномерного симметричного блуждания вдоль оси x с направляющим вектором $\mathbf{e}_x$

$$W(\mathbf{\Omega}) = (1/2)\left[\delta(\mathbf{\Omega} - \mathbf{e}_x) + \delta(\mathbf{\Omega} + \mathbf{e}_x)\right]. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (6)–(8) и интегрируя по поперечным координатам y, z, легко получить уравнение для одномерной плотности

$$\psi(x,t) \equiv \iint \psi(x,y,z,t)dydz.$$

Следуя, далее, работе [8], т.е. применяя преобразование Фурье–Лапласа по переменным x, t, используя распределения (1), (2) и переходя к асимптотике $t \to \infty$, получим аналог выражения (4) для блуждания с конечной скоростью v

$$\psi(x,t) \sim t^{-\beta/\alpha}\Psi_v^{(\alpha,\beta)}(xt^{-\beta/\alpha}, t^{\beta/\alpha-1}), \tag{10}$$

где

$$\Psi_v^{(\alpha,\beta)}(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2 i}\int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} du$$

$$\times \frac{Bu^{\beta-1} + v^{-1}(q\xi_0)^{\alpha-1}U\big(ut/(vq)\big)}{Bu^\beta + (q\xi_0)^\alpha V\big(ut/(vq)\big)} e^{u-iqx},$$

$$B = \Gamma(1-\beta)\tau_0^\beta, \quad U(z) = \int_0^\infty x^{-\alpha}\cos x e^{-zx}dx,$$

$$V(z) = \int_0^\infty x^{-\alpha}(\sin x + z\cos x)e^{-zx}dx.$$

Легко видеть, что полученный результат при $v \to \infty$ принимает вид (4)–(6), но при конечной скорости частицы автомодельное поведение распределения (10) возможно лишь при равных показателях $\alpha = \beta$, когда

$$\psi(x,t) \sim t^{-1}\Psi_v^{(\alpha,\alpha)}(xt^{-1}, 1).$$

Только в этом случае можно говорить о фрактальном характере аномальных блужданий по крайней мере в смысле монофрактала.

Заметим, кстати, что учет конечной сокрости частицы в условиях нормальной диффузии не изменяет автомодельного характера асимптотики пространственного распределения

$$\psi(x,t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad t \to \infty,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle\xi^2\rangle/\langle\tau+\xi/v\rangle}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\langle\xi^2\rangle/\langle\tau+\xi/v\rangle}\right\}.$$

Работа выполнена при поддержке Госкомитета РФ по высшему образованию (грант № 95-0-3.1-23).

Список литературы

[1] *Bouchaud J.-P., Georges A.* // Phys. Rep. 1990. Vol. 195. P. 127–293.
[2] *Isichenko M.B.* // Rev. Mod. Phys. 1992. Vol. 64. P. 961–1043.
[3] *Shlesinger M.F., Zaslavsky G.M., Klafter J.* // Nature. 1993. Vol. 363. P. 31–37.
[4] *Klafter J., Shlesinger M.F., Zumofen G.* // Phys. Tod. 1996. N 2. P. 33–39.
[5] *Montroll E.W., Weiss G.H.* // J. Math. Phys. 1965. Vol. 6. P. 167–174.
[6] *Montroll E.W., Shlesinger M.F.* // Studies in Statistical Mechanics / Ed. J. Leibovitz, E.W. Montroll. Amsterdam: North-Holland, 1984. P. 1–121.
[7] *Shlesinger M.F.* // Phisica D. 1989. Vol. 38. P. 304–312.
[8] *Afanasiev V.V., Sagdeev R.Z., Zaslavsky G.M.* // Chaos. 1991. Vol. 1(2). P. 143–159.
[9] *Nigmatullin R.R.* // Phys. St. Sol. (b). 1984. Vol. 123. P. 739–746.
[10] *Zaslavsky G.M.* // Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas / Ed. H.K. Moffatt, G.M. Zaslavsky, P. Comte, M. Tabor. Dordrecht: Kluwer, 1992. P. 481–491.
[11] *Zaslavsky G.M.* // Lévy Flights and Related Topics in Physics / Ed. M.F. Shlesinger, G.M. Zaslavsky, U. Frisch. Berlin: Springer, 1995. P. 216–236.
[12] *Чукбар К.В.* // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. С. 1875–1884.
[13] *Кольчужкин А.М., Учайкин В.В.* Введение в теорию прохождения частиц через вещество. М.: Атомиздат, 1978. 255 с.