01;05

Теорема живых сил в упругом континууме с дефектами

© Ю.В. Гриняев, Н.В. Чертова

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,
634048 Томск, Россия

(Поступило в Редакцию 8 апреля 1997 г.)

На основе динамических уравнений калибровочной модели среды получено выражение теоремы живых сил для упругого континуума с дислокациями. Данное соотношение показывает, что работа внутренних поверхностных сил напряжений в объеме перераспределяется между работой эффективных напряжений на скоростях эффективных упругих дисторсий и пластических. В феноменологических теориях пластичности последняя величина, представляющая мощность рассеянной энергии, определяет диссипативные процессы. Получено выражение, связывающее мощность рассеянной энергии с плотностью собственной энергии поля дефектов и потоком энергии дефектов.

Согласно [1], одним из наиболее важных следствий динамических уравнений движения среды является теорема живых сил. Получим и проанализируем аналогичное соотношение для упругого континуума с дислокациями, описываемого в рамках калибровочного подхода [2,3]. Простейший лагранжиан калибровочной модели имеет вид

$$L = \rho D_0\mathbf{u}D_0\mathbf{u} - D\mathbf{u} : C : D\mathbf{u} + BI : I - S\alpha : \alpha, \tag{1}$$

где

$$D_0\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}^{\mathrm{el}}}{\partial t} + \mathbf{v}, \qquad D\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u}^{\mathrm{el}} + \beta^{\mathrm{el}\,D},$$

$$I = \frac{\partial \beta^{\mathrm{el}\,D}}{\partial t} - \nabla\mathbf{v}, \qquad \alpha = \nabla \times \beta^{\mathrm{el}\,D}.$$

В приведенных выражениях ρ — плотность среды; C — тензор упругих модулей четвертого ранга; $\mathbf{u}^{\mathrm{el}}$ — вектор упругих смещений; $\mathbf{v}$ — скорость материальных точек, обусловленная движением дефектов; $\beta^{\mathrm{el}\,D}$ — несовместная упругая дисторсия; α, I — тензор плотности и потока дислокаций; B, S — новые константы теории. Здесь и ниже двоеточие обозначает скалярную свертку по первому и второму индексу, $\times$ — векторное произведение. Варьируя (1) по независимым переменным $\mathbf{u}^{\mathrm{el}}$, $\beta^{\mathrm{el}\,D}$, $\mathbf{v}$, получим динамические уравнения среды [2,3], которые можно записать в виде

$$\nabla \cdot \sigma = \frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{V}, \qquad B\nabla \cdot I = -\rho\mathbf{V}, \tag{2, 3}$$

$$S\nabla \times \alpha = -B\frac{\partial I}{\partial t} - \sigma. \tag{4}$$

Здесь $\sigma = C : D\mathbf{u}$ — тензор эффективных напряжений, $\mathbf{V} = D_0\mathbf{u}$ — суммарная скорость упругого континуума с дефектами. Уравнения (3), (4), дополненные известными соотношениями непрерывности [4,5]

$$\nabla \times I = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \alpha = 0, \tag{5, 6}$$

представляют полную систему полевых уравнений дислокационного ансамбля. Динамическое уравнение равновесия (2) является условием совместности данной системы. Умножим скалярно данное уравнение на скорость $\mathbf{V}$ и проинтегрируем по объему тела W, ограниченному поверхностью S,

$$\int\limits_W (\nabla \cdot \sigma) \cdot \mathbf{V}dW = \int\limits_W \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{V}\right) \cdot \mathbf{V}dW. \tag{7}$$

Используя равенство

$$\nabla \cdot (\sigma \cdot \mathbf{V}) = (\nabla \cdot \sigma)\mathbf{V} + \sigma : \nabla\mathbf{V}, \tag{8}$$

запишем (7) в виде

$$\int\limits_W \nabla \cdot (\sigma \cdot \mathbf{V})dW = \int\limits_W \left[\sigma : \nabla\mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho V^2}{2}\right] dW \tag{9}$$

или

$$\int\limits_S \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \mathbf{V}dS = \int\limits_W \left[\sigma : \nabla\mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho V^2}{2}\right] dW, \tag{10}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S.

Если ввести вектор поверхностных сил

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \sigma, \tag{11}$$

то левая часть равенства (10) будет представлять скорость изменения работы поверхностных сил

$$\int\limits_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{V}dS = \int\limits_W \left[\sigma : \nabla\mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho V^2}{2}\right] dW. \tag{12}$$

Первый член в правой части (10) определяет скорость изменения работы внутренних поверхностных сил напряжений в объеме. Поскольку

$$\nabla\mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{el}} + \nabla\mathbf{v} \tag{13}$$

и в то же время, согласно [6], имеет место равенство

$$\nabla\mathbf{v} = \frac{\partial \beta^{\mathrm{el}\,D}}{\partial t} + \frac{\partial \beta^{\mathrm{pl}\,D}}{\partial t} = \frac{\partial \beta^{\mathrm{el}\,d}}{\partial t} - I, \tag{14}$$

где $\beta^{\mathrm{pl}\,D}$ — несовместная пластическая дисторсия от дефектов, то скорость изменения работы внутренних поверхностных сил напряжений в объеме можно записать в виде

$$\int_W \sigma : \nabla \mathbf{V} dW = \int_W \sigma : \frac{\partial B}{\partial t} dW - \int_W \sigma : I dW. \qquad (14)$$

Здесь $\beta = Du$ — эффективные упругие дисторсии, соответствующий интеграл в (14) представляет работу эффективных напряжений на скоростях упругих дисторсий. Наиболее интересен второй интеграл, который выражает работу эффективных напряжений на скоростях пластических дисторсий. В феноменологических теориях пластичности эта величина, определяющая мощность рассеянной энергии на пластических деформациях, описывает диссипацию энергии. Суммируя (10)–(14), окончательно получим выражение

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_W \rho \frac{V^2}{2} dW = \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{V} dS + \int_W \sigma : \frac{\partial \beta}{\partial t} dW - \int_W \sigma : I dW, \qquad (15)$$

которое означает, что скорость изменения кинетической энергии конечного индивидуального объема упругого континуума с дислокациями определяется скоростью изменения работы внешних и внутренних поверхностных сил и мощностью рассеянной энергии. Таким образом, в рамках калибровочной модели среды член, описывающий диссипацию энергии в выражении теоремы живых сил, появляется автоматически без каких-либо физических предположений в отличие от феноменологических теорий пластичности. Чтобы определить, каким образом мощность рассеянной энергии связана с характеристиками дислокационного ансамбля, рассмотрим последний интеграл в правой части (14) более подробно, подставляя выражение σ из полевого уравнения (4),

$$\int_W \sigma : I dW = -\int_W \left(S \nabla \times \alpha + B \frac{\partial}{\partial t} I \right) : I dW. \qquad (16)$$

Добавим к этому выражению тождественно равный нулю интеграл из уравнения (3), дважды скалярно свернув его с α,

$$S \int_W \left(\nabla \times I + B \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) : \alpha dW. \qquad (17)$$

Используя тождество

$$\nabla \cdot (\alpha \times I) = (\nabla \times \alpha) : I - (\nabla \times I) : \alpha,$$

окончательно получим выражение

$$\int_W \sigma : \beta^{\mathrm{pl.}\,D} dW = \frac{\partial}{\partial t} \int_W \frac{S\alpha^2 + BI^2}{2} dW + S \int_S dS \cdot (\alpha \times I), \qquad (18)$$

которое показывает, что мощность рассеянной энергии в упругом континууме с дислокациями определяется скоростью изменения собственной энергии поля дефектов и потоком энергии поля дефектов. Величина $(\alpha \times I)$, определяющая поток энергии поля дефектов, подобна вектору Пойтинга в электродинамике. В заключении отметим, что выражение теоремы живых сил [1] кроме приращения работ внешних и внутренних поверхностных сил содержит приращение работ массовых сил (внешних и внутренних), которые также могут быть учтены в исходной модели (1) и получены в выражении (15).

Список литературы

[1] *Седов Л.И.* Механика сплошных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1. 535 с.

[2] *Кадич А., Эделен Д.* Калибровочная теория дислокации и дисклинаций. М.: Мир, 1987. 168 с.

[3] *Гриняев Ю.В., Чертова Н.В.* // Изв. вузов. Физика. 1990. № 2. С. 34–50.

[4] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.

[5] *Косевич А.М.* Теория кристаллической решетки. Харьков: Высшая школа, 1988. 304 с.

[6] *Гриняев Ю.В., Чертова Н.В.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 10. С. 34–50.