

01;05

Одно- и двухфронтовые состояния равновесия в тонкой сверхпроводящей пленке

© А.С. Рудый

Istituto per la ricerca di base Castello Principe Pignatelli
I-86075 Monteroduni (IS), Molise, Italy

(Поступило в Редакцию 19 мая 1997 г. В окончательной редакции 4 августа 1997 г.)

Рассмотрены двухфазные состояния равновесия тонкой сверхпроводящей пленки с током при конвективном теплообмене на ее свободной поверхности. Показано, что для классического сверхпроводника двухфазное состояние пленки остается однофронтовым в широком диапазоне параметров системы. Для высокотемпературных сверхпроводников существует предельное значение параметра Стекли, выше которого слабонераспределенные стационарные состояния могут быть только многофронтовыми. Исследованы решения краевой задачи, моделирующей двухфронтовые состояния равновесия, и рассмотрены условия их реализации.

1. Главным фактором, ограничивающим чувствительность сверхпроводящих приемников инфракрасного излучения, являются тепловые шумы, прежде всего это — флуктуации температуры охлаждающей жидкости. В. Франценом была предложена идея неизотермического болометра, не столь критичного к точности термостатирования [1]. В качестве неизотермического болометра может использоваться свободная сверхпроводящая пленка, часть которой находится в нормальном состоянии. В этой связи представляет интерес анализ двухфазных состояний сверхпроводящей пленки в широком диапазоне тепло- и электрофизических параметров.

Двухфазные состояния равновесия тонкой сверхпроводящей пленки с током были рассмотрены в работе [2], основные результаты которой сводятся к следующему. Состояние исследуемой системы определяется управляющим параметром $\sigma = \sigma_0 / (1 - \varepsilon\sigma_0)$, где $\varepsilon = \beta T_c$, σ_0 — параметр Стекли, β — температурный коэффициент сопротивления пленки, T_c — разность критической температуры и температуры термостата. Выше критического значения управляющего параметра σ_c сверхпроводящее состояние метастабильно, и в центре пленки может образоваться область нормальной фазы. Положение фазовой границы в общем случае задается условием

$$\begin{aligned} & \operatorname{cth} \left[\sqrt{2\operatorname{Bi}_n(1 - \varepsilon\sigma_0)}(1 - \xi_b) \right] \operatorname{cth} \sqrt{\operatorname{Bi}_s} \xi_b \\ &= \frac{(1 + \varepsilon)\sigma_0 - 1}{\sqrt{1 - \varepsilon\sigma_0}} \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_s}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\operatorname{Bi} = \alpha l^2 / h\lambda$, α — коэффициент теплоотдачи; l и h — длина и толщина сверхпроводника; λ_s , λ_n — теплопроводности сверхпроводящей и нормальной фазы.

В частном случае классического сверхпроводника параметр ε настолько мал, что практически всегда выполняется условие $\sigma_0 \ll 1/\varepsilon$. Именно для этого случая в [2] было показано существование двух неоднородных состояний равновесия $\xi_b^{(1)}$ и $\xi_b^{(2)}$, где $\xi_b^{(1)} < \xi_b^{(2)}$, из которых устойчивым оказалось состояние $\xi_b^{(1)}$.

2. Для высокотемпературных сверхпроводников $1/\varepsilon$ и σ_0 — сопоставимые величины, поэтому следует различать случаи $\sigma_0 < 1/\varepsilon$ и $\sigma_0 > 1/\varepsilon$. Если $\sigma_0 \in [0, 1/\varepsilon]$, то ситуация аналогична рассмотренной в [2] для классического сверхпроводника (рис. 1, а). Качественные изменения имеют место при $\sigma_0 > 1/\varepsilon$, когда координата фазовой границы определена условием

$$\begin{aligned} & \operatorname{ctg} \left[\sqrt{2\operatorname{Bi}_n(\varepsilon\sigma_0 - 1)}(1 - \xi_b) \right] \operatorname{cth} \sqrt{\operatorname{Bi}_s} \xi_b \\ &= \frac{(1 + \varepsilon)\sigma_0 - 1}{\sqrt{\varepsilon\sigma_0 - 1}} \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_s}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Если фазовая граница неустойчивого состояния $\xi_b^{(2)}$ асимптотически стремится к единице, как это показано на рис. 1, б, то граница устойчивого состояния $\xi_b^{(1)} \rightarrow 0$ при $\sigma_0 \rightarrow \sigma_{c1}$. Такой результат легко объяснить, если учесть, что при $\sigma_0 \rightarrow \sigma_{c1} = 1/\varepsilon + \pi^2/8\varepsilon\operatorname{Bi}_n$ температура нормальной фазы

$$\begin{aligned} \Theta_n(\xi) &= 1 + \frac{(1 + \varepsilon)\sigma_0 - 1}{\varepsilon\sigma_0 - 1} \\ &\times \left[\frac{\cos \sqrt{2\operatorname{Bi}_n(\varepsilon\sigma_0 - 1)}(1 - \xi)}{\cos \sqrt{2\operatorname{Bi}_n(\varepsilon\sigma_0 - 1)}(1 - \xi_b)} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

стремится к бесконечности. Следовательно, σ_{c1} — это предельное (в рамках рассматриваемого приближения) значение параметра Стекли для высокотемпературного сверхпроводника.

Тем не менее выше σ_{c1} при $\sigma_0 = \sigma_{c2}$ вблизи устойчивой границы появляется новое стационарное состояние (рис. 1, б), которое не соответствует условиям поставленной в [2] задачи. Действительно, при постановке краевой задачи предполагалось, что температура нормальной фазы — монотонная функция координаты. Немонотонность температуры при условии ее симметрии относительно центра пленки означала бы возможность образования многофронтовых состояний равновесия. Поскольку теперь температура (3) — периодическая и,

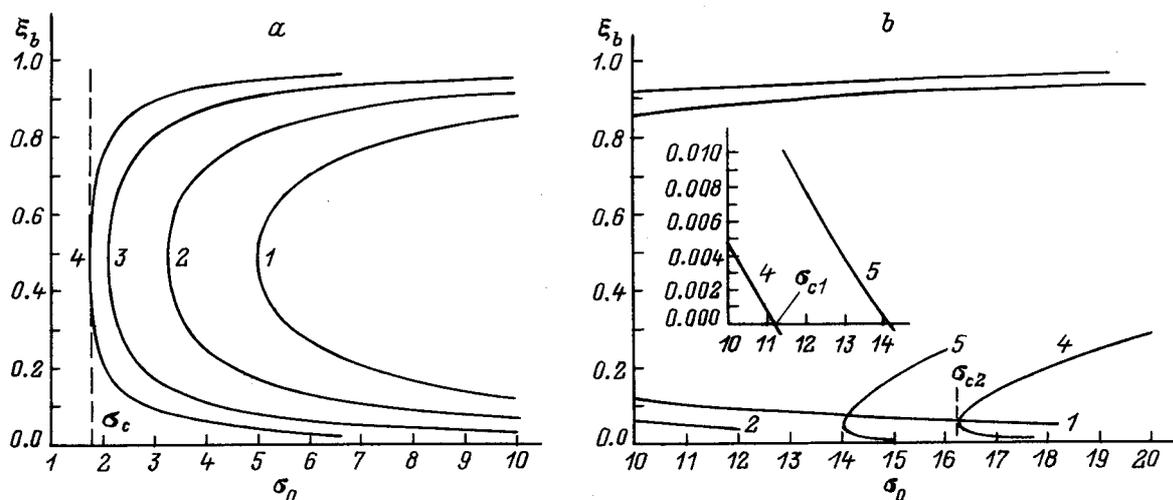


Рис. 1. Структура разбиения фазовой плоскости высокотемпературной сверхпроводящей пленки при $\epsilon = 0.1$. *a* — $\sigma_0 < 1/\epsilon$: ниже первого критического значения параметра Стекли σ_c состояние пленки однородно, выше σ_c сверхпроводящее состояние метастабильно и в центре пленки может образоваться область нормальной фазы, граница которой как функция параметра Стекли представлена кривыми 1–5, соответствующими $Bi = 0.5, 1, 3, 10, 15$; *b* — $\sigma_0 > 1/\epsilon$, σ_{c1} — второе критическое значение параметра Стекли, определяющее физические границы неоднородного состояния линейной системы.

следовательно, не всегда монотонная функция пространственной переменной, то уравнение (2) необходимо дополнить требованием монотонности

$$\Theta'_n(\xi) > 0, \quad \xi \in [\xi_b, 1]. \quad (4)$$

Из последнего вытекает уравнение сепаратрисы

$$\xi_b = 1 - \frac{\pi}{\sqrt{2Bi_n(\epsilon\sigma_0 - 1)}}, \quad (5)$$

разделяющей фазовую плоскость на область однофронтных (имеется в виду число фронтов на рассматриваемом отрезке) и многофронтных состояний (рис. 2). Таким

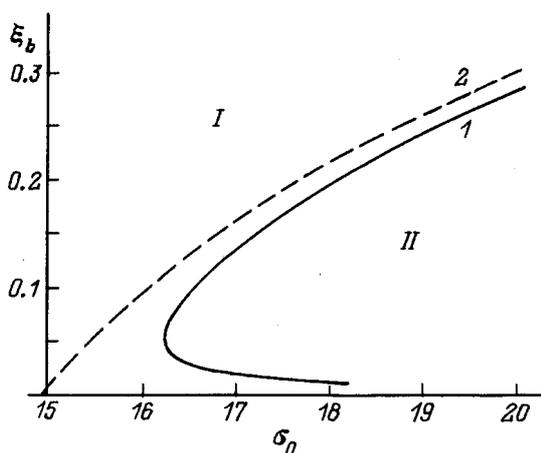


Рис. 2. Зависимость координаты фазовой границы от параметра Стекли *I* и сепаратриса 2, разбивающая фазовую плоскость на области одно- (*I*) и многофронтных (*II*) состояний равновесия при $Bi = 10$.

образом, если выше σ_{c2} состояния равновесия существуют, то они могут быть только многофронтными. Это, однако, не означает, что многофронтные состояния не могут возникать ниже σ_{c2} или σ_{c1} .

3. Рассмотрим наиболее простой случай двухфронтного состояния равновесия, когда центр пленки находится в сверхпроводящем состоянии. Ввиду симметрии температурного поля краевую задачу сформулируем только для положительной полуоси, поместив начало координат в центр пленки (рис. 3),

$$\Theta''_{s1}(\xi) - 2Bi_s\Theta_{s1}(\xi) = 0,$$

$$\Theta''_n(\xi) - \varkappa\Theta_n(\xi) + K = 0,$$

$$\Theta''_{s2}(\xi) - 2Bi_s\Theta_{s2}(\xi) = 0,$$

$$\Theta_{s1}(\xi_1) = \Theta_n(\xi_1) = 1; \quad \lambda_s\Theta'_{s1}(\xi_1) = \lambda_n\Theta'_n(\xi_1),$$

$$\Theta_n(\xi_2) = \Theta_{s2}(\xi_2) = 1; \quad \lambda_n\Theta'_n(\xi_2) = \lambda_s\Theta'_{s2}(\xi_2),$$

$$\Theta'_{s1}(\xi)|_{\xi=0} = 0; \quad \Theta_{s2}(1) = 0. \quad (6)$$

Здесь $\Theta_{s1}, \Theta_{s2}, \Theta_n$ — нормированные на T_c температуры сверхпроводящих областей и нормальной фазы соответственно; ξ_1 и ξ_2 — координаты фазовых границ. Решения краевой задачи (6) имеют вид

$$\Theta_{s1}(\xi) = \frac{\text{ch} \sqrt{2Bi_s} \xi}{\text{ch} \sqrt{2Bi_s} \xi_1},$$

$$\Theta_n(\xi) = (1 - \sigma)$$

$$\times \text{Re} \left\{ [1 - \exp \sqrt{\varkappa}(\xi_1 - \xi_2)] \frac{\text{sh} \sqrt{\varkappa}(\xi - \xi_1)}{\text{sh} \sqrt{\varkappa}(\xi_2 - \xi_1)} \right\}$$

$$+ (1 - \sigma) \text{Re}[1 - \exp \sqrt{\varkappa}(\xi_1 - \xi_2)] + \sigma,$$

$$\begin{aligned} \varkappa &= 2Bi_n(1 - \varepsilon\sigma_0), \\ \Theta_{s,2}(\xi) &= \frac{\text{sh} \sqrt{2Bi_s}(1 - \xi)}{\text{sh} \sqrt{2Bi_s}(1 - \xi_2)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Условия непрерывности теплового потока приводят к следующим соотношениям между координатами фазовых границ:

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2) &\equiv \lambda_s \sqrt{2Bi_s} \text{th} \sqrt{2Bi_s} \xi_1 - \lambda_n(1 - \sigma) \\ &\times \text{Re} \sqrt{\varkappa} \left[\frac{1 - \exp \sqrt{\varkappa}(\xi_1 - \xi_2)}{\text{sh} \sqrt{\varkappa}(\xi_2 - \xi_1)} - 1 \right] = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_1, \xi_2) &\equiv \lambda_s \sqrt{2Bi_s} \text{cth} \sqrt{2Bi_s}(1 - \xi_2) - \lambda_n(\sigma - 1) \\ &\times \text{Re} \sqrt{\varkappa} \left\{ [1 - \exp \sqrt{\varkappa}(\xi_1 - \xi_2)] \right. \\ &\left. \times \text{cth} \sqrt{\varkappa}(\xi_2 - \xi_1) - \exp \sqrt{\varkappa}(\xi_1 - \xi_2) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Как видно из приведенных на рис. 4 графиков неявных функций $f(\xi_1, \xi_2) = 0$ и $\varphi(\xi_1, \xi_2) = 0$, в области $\sigma_0 < 1/\varepsilon$ и $\sigma_0 > 1/\varepsilon$ условия (8), (9) несовместимы (рис. 4, а). Однако при больших значениях Bi кривые 1, 2 сближаются настолько (штриховая линия на рис. 4, б), что их практически невозможно разделить при разрешении уравнений (8), (9) численными методами. Это означает, что размер нормальной области при больших Bi становится постоянным, а сама область делокализуется.

В реальной ситуации нормальная область останется локализованной при любых значениях Bi , поскольку даже незначительное изменение параметров теплообмена может привести к выполнению условий (8), (9). Например, на краях пленки в непосредственной близости

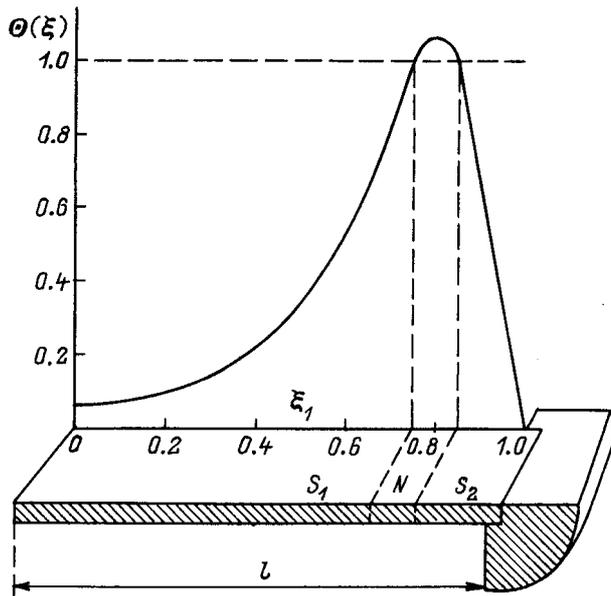


Рис. 3. Тонкая сверхпроводящая пленка в двухфазном стационарном состоянии с двумя фазовыми границами на рассматриваемом отрезке. Температурное поле пленки соответствует кривым 1 на рис. 4, б.

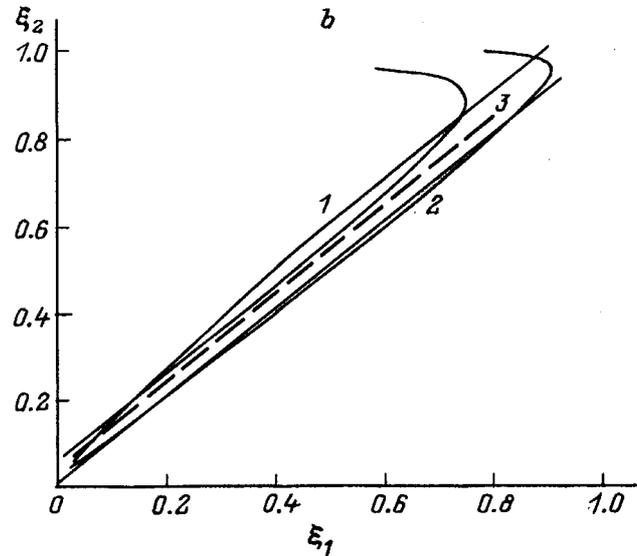
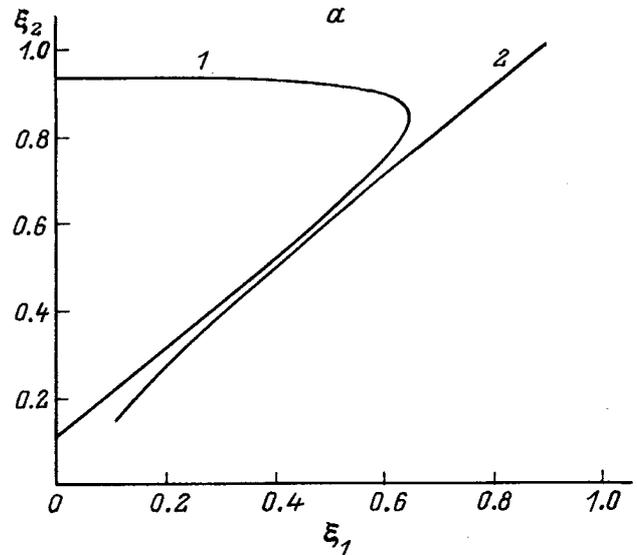


Рис. 4. Неявные функции $f(\xi_1, \xi_2) = 0$ и $\varphi(\xi_1, \xi_2) = 0$ при $\varepsilon = 0.1$. а — $Bi = 10$ графики функций (1 и 2) при $\sigma_0 = 5$ и 20 практически не отличаются; б — графики тех же функций при значениях параметров $Bi_{s1} = Bi_n = 10$, $Bi_{s2} = 3.6$, $\sigma_0 = 5$ (1), $Bi_{s1} = Bi_n = 10$, $Bi_{s2} = 3.6$, $\sigma_0 = 20$ (2); $Bi_{s1} = Bi_n = Bi_{s2} = 50$, $\sigma_0 = 5$ (3).

от термостата (рис. 3) коэффициент теплоотдачи должен быть несколько ниже, чем в центре. На рис. 4, б видно, что при $Bi_{s1} = Bi_n > Bi_{s2}$ условия (8), (9) совместны, т.е. возможны два двухфронтовых состояния равновесия. Температурное поле одного из них, в котором сверхпроводящая фаза занимает малую область у термостатируемого края пленки, показано на рис. 3.

4. Таким образом, двухфазное состояние равновесия тонкой пленки классического сверхпроводника при постоянных условиях теплообмена на свободной поверхности остается однофронтовым в широком диапазоне параметров системы. Для высокотемпературных сверх-

проводников существует предел, выше которого слабо-неравновесные (в термодинамическом смысле) стационарные состояния могут быть только многофронтными. Для образования двухфронтных состояний в случае и высокотемпературного, и традиционного сверхпроводников достаточно, чтобы коэффициенты уравнений (6) зависели от пространственной переменной, в частности параметр V_i был кусочно-непрерывной функцией координаты.

Список литературы

- [1] *Franzen W.* // J. Optic. Soc. Amer. 1963. Vol. 53. P. 596.
- [2] *Рудый А.С.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 9. С. 85–91.