

01;03

Капиллярные колебания заряженной вязкой сфероидальной капли

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 23 августа 1996 г.)

Методом скаляризации в рамках теории возмущений путем разложения по двум малым параметрам — по величине возмущения сфероидальной поверхности вследствие тепловых колебаний и по величине отклонения равновесной сфероидальной формы капли от сферической выводится дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний заряженной вязкой сфероидальной капли. Аналитически показано, что спектр движений жидкости состоит из двух взаимодействующих в линейной теории компонент: вихревой тороидальной и потенциально полоидальной. При численном анализе выяснено, что инкременты неустойчивости высоких мод сильно заряженной капли увеличиваются с усилением степени сфероидальной деформации и быстро уменьшаются с ростом вязкости жидкости.

Исследование капиллярных колебаний заряженной капли вязкой жидкости и ее устойчивости по отношению к собственному заряду представляет интерес для геофизики, технической физики, химической технологии и т.п. Экспериментальному и техническому исследованию этого объекта посвящено множество публикаций [1]. И все-таки многие вопросы, связанные с этой проблемой, до сих пор изучены слабо. В первую очередь это относится к физическому механизму развития неустойчивости заряженной капли по отношению к собственному заряду. Рэлеем было показано [2], что из бесконечного набора мод капиллярных колебаний сильно заряженной капли первой претерпевает неустойчивость основная мода, пропорциональная полиному Лежандра $P_2(\cos \beta)$. Развитие неустойчивости приводит к тому, что капля вытягивается в фигуру, являющуюся в линейном по квадрату эксцентриситета приближении сфероидальной [3]. Естественно задаться вопросом, как изменение формы первоначально сферической капли скажется на закономерностях реализации неустойчивости более высоких мод капиллярных колебаний. Соответствующая задача была сформулирована в [3], но ее решение было проведено лишь на качественном уровне строгости. Тем не менее выяснилось, что с увеличением эксцентриситета сфероидальной сильнозаряженной капли критические условия реализации неустойчивости более высоких, чем основная, мод капиллярных колебаний снижаются. Этот феномен был положен в основу предложенного в [3] качественного физического механизма реализации неустойчивости заряженной капли. В [4] предпринята попытка отыскания спектра капиллярных колебаний и декрементов затухания для заряженной сфероидальной капли вязкой жидкости в однородном электростатическом поле на основе выписывания функции Лагранжа колебательной системы при учете диссипации. В [5,6] аналитически рассчитывались спектры капиллярных колебаний и декременты их затухания вязкой сфероидальной капли.

В связи с исследованием временной эволюции амплитуды основной моды капли, неустойчивой по отношению к собственному заряду [7], становится актуальным отыскание строгого решения задачи о влиянии сфероидальности заряженной капли на инкременты неустойчивости ее различных мод по отношению к собственному заряду.

1. Будем решать задачу об осесимметричных капиллярных колебаниях заряженной вытянутой сфероидальной капли вязкой идеально проводящей жидкости, полагая, что сфероидальность формы капли обусловлена либо виртуальной деформацией, либо действием неких стационарных (не зависящих от времени и формы капли) сторонних сил неэлектрической природы (см. Приложение). Решение проведем в безразмерных переменных, положив радиус исходной сферической формы капли R , плотность ρ и коэффициент поверхностного натяжения σ равным единице: $R = 1$, $\rho = 1$, $\sigma = 1$. Тогда в качестве единиц измерения расстояния, времени, заряда, давления, скорости и вязкости получим характерные величины $r_* = R$; $t_* = R^{3/2}\rho^{1/2}\sigma^{-1/2}$; $Q_* = R^{3/2}\sigma^{1/2}$, $p_* = R^{-1}\sigma$; $u_* = R^{-1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2}$; $\nu_* = R^{1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2}$.

Уравнение возмущенной капиллярным волновым движением поверхности вытянутого сфероида в сферических координатах в приближении, линейном по e^2 — квадрату эксцентриситета сфероида, имеет вид

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t) \approx 1 + e^2 h(\theta) + \xi(\theta, t);$$

$$r(\theta) = \frac{(1 - e^2)^{1/6}}{(1 - e^2 \cos^2 \theta)^{1/2}}; \quad h(\theta) = \frac{1}{6}(3 \cos^2 \theta - 1), \quad (1.1)$$

равновесной сфероидальной поверхности капли, вызванный капиллярными колебаниями происходящими из-за теплового движения молекул и имеющими амплитуду $\sim \sqrt{kT/\sigma}$ (здесь k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура). Отметим также, что для большинства жидкостей амплитуда таких тепловых капиллярных колебаний порядка ангстрема.

Нижеследующий анализ проведем в рамках теории возмущений путем разложения по малым параметрам ξ и e^2 (в указанном порядке) с точностью до членов $\sim \xi$ и $e^2\xi$, т.е. в линейном приближении по ξ . Отметим, что малые параметры e^2 и ξ являются независимыми, причем принимается, что $e^2 \gg \xi$. В этой связи казалось бы, что, сохраняя слагаемые $\sim e^2\xi$, мы должны учесть и слагаемые $\sim e^4$. Но как будет видно ниже, вклад в искомое дисперсионное уравнение внесут лишь слагаемые $\sim \xi$ и $e^2\xi$, а слагаемые $\sim e^2, e^4$ исчезнут при учете кинематического граничного условия (содержащего частную производную по времени). Поэтому удержание в расчетах слагаемых $\sim e^4$ привело бы лишь к неоправданному увеличению громоздкости математических выкладок.

Зависимости поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, поля давлений $p(\mathbf{U}, t)$ и возмущения $\xi(\theta, t)$ от времени будем принимать экспоненциальной $\sim \exp(st)$.

Выпишем систему уравнений гидродинамики, описывающих движение вязкой жидкости в капле, вызванное малым возмущением формы ее равновесной поверхности $\xi(\theta, t)$ и потому характеризуемое полем скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, имеющим тот же порядок малости, что и ξ . Система состоит из линеаризованного уравнения Навье–Стокса и условия несжимаемости

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla(p(\mathbf{U}, t)) + \nu \Delta \mathbf{U}; \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0; \quad (1.3)$$

где $p(\mathbf{U}, t)$ — добавка к давлению внутри жидкости, имеющая первый порядок малости по U (по ξ).

На поверхности капли (1.1) должны выполняться граничные условия

$$\frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla F(\mathbf{r}, t) = 0;$$

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - [1 + e^2 h(\theta) + \xi(\theta, t)] = 0; \quad (1.4)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0; \quad (1.5)$$

$$-p(\mathbf{U}, t) + 2\nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} - p_E(\xi) + p_\sigma(\xi) = 0; \quad (1.6)$$

$\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$ — векторы нормали и касательной к поверхности; $p_E(\xi)$ и $p_\sigma(\xi)$ — добавки к давлению электрического поля и давлению сил поверхностного натяжения, происходящие из-за возмущения равновесной поверхности сфероида и имеющие первый порядок малости по ξ .

Потребуем также выполнения условий постоянства объема капли

$$\int_0^\pi \xi(\theta, t) \sin \theta d\theta = 0 \quad (1.7)$$

и неподвижности ее центра масс

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \xi(\theta, t) \mathbf{e}_r \sin \theta d\theta d\varphi = 0; \quad (1.8)$$

\mathbf{e}_r — радиальный орт сферической системы координат.

Отметим, что при решении в приближении первого порядка малости по U и ξ граничные условия (1.4)–(1.6) достаточно взять на невозмущенной поверхности сфероидальной капли $r = r(\theta) \approx 1 + e^2 h(\theta)$, так как они состоят из слагаемых, линейных по U и ξ .

Система векторных уравнений (1.2), (1.3) с граничными условиями (1.4)–(1.6) и дополнительными условиями (1.7), (1.8) представляет собой полную математическую формулировку поставленной задачи.

2. Будем решать систему (1.2), (1.3) методом скаляризации, подробно изложенным в работе [8]. Для этого представим поле скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ в виде разложения

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{N}}_1 \Phi_1(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_2 \Phi_2(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_3 \Phi_3(\mathbf{r}, t); \quad (2.1)$$

где $\Phi_i(\mathbf{r}, t)$ — скалярные функции; $\hat{\mathbf{N}}_i$ — дифференциальные векторные операторы, имеющие в сферической системе координат вид

$$\hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \nabla; \quad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \nabla \times \mathbf{r}; \quad \hat{\mathbf{N}}_3 \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}). \quad (2.2)$$

Подставляя разложение (2.1) в (1.2), (1.3) и используя следующие свойства операторов (2.2) $\hat{\mathbf{N}}_k \Delta = \Delta \hat{\mathbf{N}}_k$, $\hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_k = 0$ (при $k \neq j$), $\hat{\mathbf{N}}_1^+ = -\hat{\mathbf{N}}_1$, несложно систему векторных уравнений (1.2), (1.3) для функций $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и $p(\mathbf{U}, t)$ привести к системе скалярных уравнений для скалярных функций $\Phi_k(\mathbf{r}, t)$

$$\Delta \Phi_k(\mathbf{r}, t) - \frac{s}{\nu} (1 - \delta_{k1}) \Phi_k(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (k = 1, 2, 3);$$

$$p(\mathbf{U}, t) = -s \Phi_1(\mathbf{r}, t); \quad (2.3)$$

индекс + означает эрмитовое сопряжение; δ_{kj} — символ Кронекера.

Граничные условия (1.4)–(1.6) также следует переписать в терминах скалярных функций $\Phi_k(\mathbf{r}, t)$. Используя (2.1), (2.2) и выписывая представления компонент вектора скорости $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ через функции $\Phi_k(\mathbf{r}, t)$, для осесимметричного случая после несложных, но громоздких математических преобразований [6] в линейном по e^2 приближении можно получить кинематическое граничное условие

$$r = 1: s\xi - \left\{ \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \Delta_\Omega \left(\frac{\Phi_3}{r} \right) \right] - e^2 \left[h(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \right. \right. \\ \times \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \Delta_\Omega \left(\frac{\Phi_3}{r} \right) \right) + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \left. \left. \times \left(\frac{\Phi_1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Phi_3) \right) \right] \right\} = 0; \quad (2.4)$$

динамическое граничное условие для касательных компонент тензора напряжений (1.5) распадается на два условия в соответствии с необходимостью выбора в качестве касательных к поверхности ортов двух взаимно

перпендикулярных векторов

$$r = 1 : \left\{ \Delta_{\Omega} \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} - \frac{\Phi_2}{r} \right] + e^2 \left[(\cos^2 \theta - 1) \right. \right. \\ \left. \left. \times \Delta_{\Omega} \left(\frac{\Phi_2}{r} \right) + h(\theta) \Delta_{\Omega} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} - \frac{\Phi_2}{r} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(4 + \Delta_{\Omega} \right) \left(\frac{\Phi_2}{r} \right) \right] \right\} = 0; \quad (2.5)$$

$$\left\{ \Delta_{\Omega} \left[2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi_1}{r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r^2} - (2 + \Delta_{\Omega}) \left(\frac{\Phi_3}{r^2} \right) \right] \right. \\ \left. - 2e^2 \left[(3 \cos^2 \theta - 1) \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right] \right. \right. \\ \left. - (2 \cos^2 \theta - 1) \Delta_{\Omega} \left(\frac{\Phi_1}{r^2} \right) - (5 \cos^2 \theta - 2) \right. \right. \\ \left. \times \Delta_{\Omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \right) + (4 \cos^2 \theta - 1) \Delta_{\Omega} \left(\frac{\Phi_3}{r^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} h(\theta) \Delta_{\Omega} \frac{\partial}{\partial r} \left[2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi_1}{r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r^2} \right. \right. \\ \left. - (2 + \Delta_{\Omega}) \left(\frac{\Phi_3}{r^2} \right) \right] + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \left. \times \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - (2 + \Delta_{\Omega}) \left(\frac{\Phi_1}{r^2} \right) \right. \right. \\ \left. - 2(1 + \Delta_{\Omega}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \right) \right. \\ \left. \left. - (2 - \Delta_{\Omega}) \left(\frac{\Phi_3}{r^2} \right) \right] \right\} = 0; \quad (2.6)$$

динамическое граничное условие для нормальной компоненты тензора напряжений

$$r = 1 : \left\{ s \left[\Phi_1 + e^2 h(\theta) \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right] + 2\nu \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \right. \right. \\ \left. - \Delta_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi_3}{r} \right) \right) \right] + e^2 h(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \right. \\ \left. - \Delta_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi_3}{r} \right) \right) \right] + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \left. \times \left[\frac{2}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \frac{\Phi_1}{r^2} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi_3}{r} \right) \right. \right. \\ \left. - \Delta_{\Omega} \left(\frac{\Phi_3}{r^2} \right) \right] - p_E(\xi) + p_{\sigma}(\xi) \right\} = 0; \\ \Delta_{\Omega} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (2.7)$$

Система уравнений (2.3) с условиями (2.4)–(2.7) представляет собой математическую формулировку решаемой задачи в скаляризованном виде. Решения уравнений (2.3) в сферической системе координат, регулярные в точке $r = 0$, имеют вид

$$\Phi_1(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=2}^{\infty} C_m^1 r^m Y_m^0(\theta) \exp(st);$$

$$\Phi_{2,3}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=2}^{\infty} C_m^{2,3} i_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} r \right) Y_m^0(\theta) \exp(st), \quad (2.8)$$

где $i_m(x)$ — модифицированная сферическая функция Бесселя.

Функцию $\xi(\theta, t)$ также удобно представить в виде разложения по сферическим функциям

$$\xi(\theta, t) = \sum_{m=2}^{\infty} Z_m Y_m^0(\theta) \exp(st), \quad (2.9)$$

Z_m — константы.

В разложениях (2.8), (2.9) минимальное значение индекса $m = 2$ в силу дополнительных условий (1.7), (1.8).

3. Связь неизвестных констант C_m^k ($k = 1, 2, 3$) в разложениях (2.8) с коэффициентами Z_m разложения функции возмущения $\xi(\theta, t)$, а также выражение для комплексной частоты капиллярных колебаний s определяются из граничных условий (2.4)–(2.7).

Несложно заметить, что в случае осесимметричных колебаний граничное условие (2.5) для функций $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$ полностью автономно, т.е. не содержит больше никакой другой неизвестной функции. Поэтому отложим его рассмотрение, сосредоточив внимание на граничных условиях (2.4), (2.6), (2.7) для функций $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$, $\Phi_3(\mathbf{r}, t)$, $\xi(\theta, t)$.

Подставляя решения (2.8) и (2.9) в условия (2.4), (2.6), (2.7), используя рекуррентные соотношения для цилиндрических сферических функций, представляя произведение $\cos^2 \theta \cdot Y_m^0(\theta)$, $h(\theta) \cdot Y_m^0(\theta)$ и

$$\sin \theta \cdot \cos \theta \frac{\partial Y_m^0(\theta)}{\partial \theta}$$

в виде разложений по сферическим функциям [9] и пренебрегая взаимодействием различных мод, в линейном по e^2 приближении можно получить из кинематического граничного условия (2.4)

$$C_m^1 \{ m + e^2 [m(m-1) - 3] \varkappa_m \} + D_m^3 \{ m(m+1) \\ + e^2 \varkappa_m \left[\sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) (m(m+1) - 3) \right. \\ \left. + (m+1)(m(m-1) - 3) \right] \} - s Z_m = 0; \quad (3.1)$$

из динамического граничного условия для касательной компоненты тензора напряжений (2.6)

$$C_m^1 \left\{ 2(m-1) + e^2 \varkappa_m 2(m-1) \left[(m-2) - \frac{9}{m(m+1)} \right] \right\} + D_m^3 \left\{ \left[\frac{s}{\nu} + 2(m^2-1) - 2\sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \right] + e^2 \varkappa_m \left[\frac{s}{\nu} (m-2) + 2(m^2-1) \left((m-2) - \frac{9}{m(m+1)} \right) + \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \left(\frac{s}{\nu} + 2(m^2+m+2) + \frac{18}{m(m+1)} \right) \right] \right\} = 0; \quad (3.2)$$

из динамического граничного условия для нормальной компоненты тензора напряжений (2.7)

$$C_m^1 \left\{ \left[\frac{s}{\nu} + 2m(m-1) \right] + e^2 \varkappa_m \left[\frac{s}{\nu} m + 2(m^3 - 3m^2 - 4m + 3) \right] \right\} + D_m^3 \times \left\{ 2m(m+1) \left[(m-1) + \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \right] + e^2 \varkappa_m 2 \left[\frac{s}{\nu} (m(m+1) - 3) + (m+1)(m^3 - 3m^2 - 4m + 3) - \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) (4m(m+1) - 3) \right] \right\} + Z_m \times \left\{ (m-1)(m+2) \frac{\alpha_m}{\nu} + e^2 \varkappa_m \left[(m+2)(m-4) \frac{\alpha_m}{\nu} - 3 \frac{m^2}{\nu} \right] \right\} = 0. \quad (3.3)$$

В выражениях (3.1)–(3.3) введены следующие обозначения:

$$\varkappa_m \equiv \frac{m(m+1)}{3(2m-1)(2m+3)}; \quad D_m^3 \equiv C_m^3 i_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right);$$

$$f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \equiv \frac{i_{m+1} \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right)}{i_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right)}; \quad \alpha_m \equiv 1 - \frac{W}{(m+2)}; \quad W \equiv \frac{Q^2}{4\pi}.$$

При записи выражения (3.3) использовались выражения для добавок к давлению электрических сил $p_E(\xi)$ и давлению сил поверхностного натяжения $p_\sigma(\xi)$ первого порядка малости по ξ , имеющие в пренебрежении

взаимодействием различных мод для осесимметричного случая вид [7,10]

$$p_E(\xi) \approx \frac{Q^2}{4\pi} \sum_{m=2}^{\infty} \{ [(m-1) + e^2(m-4)\varkappa_m] Z_m \} Y_m^0(\theta) \exp(st);$$

$$p_\sigma(\xi) \approx \sum_{m=2}^{\infty} \{ [(m-1)(m+2) - e^2 2(m^2+m+4)\varkappa_m] Z_m \} Y_m^0(\theta) \exp(st).$$

Из условия обращения в нуль определителя системы уравнений (3.1)–(3.3) получается дисперсионное уравнение решаемой задачи в линейном по e^2 приближении

$$s [s^2 + m(m-1)(m+2)\alpha_m] + 2\nu \left[s^2(m-1)(2m+1) - \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) (s^2 + m(m-1)(m+2)\alpha_m) - 4\nu^2 m(m-1)(m+2) s \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) + e^2 \varkappa_m \left\{ s \left[(s^2 + m(m-1)(m+2)\alpha_m) \times \left(2(m-1) + \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \right) - 3((2m-1)(m+2)\alpha_m + m^3) \right] + 2\nu \times \left[s^2 \left(2m^3 - 8m^2 + 4m - 10 + \frac{9}{m} \right) + \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \left(s^2 \left(2m^2 - m + 2 + \frac{9}{m(m+1)} \right) + 3 \left(2m^2 - m + 3 - \frac{6}{(m+1)} \right) (m+2)\alpha_m + 3m^3 \right) + 4\nu^2 s \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \times \left[5m^3 + 5m^2 + 2m - \frac{18}{(m+1)} \right] \right\} \right\} = 0. \quad (3.4)$$

Общий вид реализующихся движений жидкости (ветвей дисперсионного уравнения) в виде зависимостей $\text{Re } s = \text{Re } s(W)$, $\text{Im } s = \text{Im } s(W)$, полученных численным расчетом по (3.4) для $m = 2$, $\nu = 0.03$, $e^2 = 0.2$, представлен на рис. 1. Ветви 1–3 соответствуют капиллярным движениям жидкости, ветви 4, 5, 6, 7 — аperiодически затухающим вихревым полоидальным движениям. Для более высоких мод капиллярных колебаний ($s > 2$)

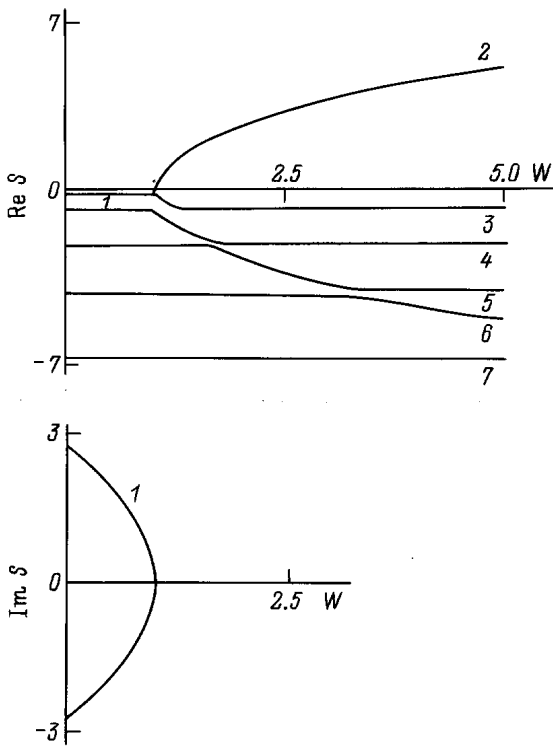


Рис. 1. Зависимости вещественной и мнимой компонент частоты от величины параметра Рэлея W , характеризующего устойчивость капли по отношению к собственному заряду.

общий вид зависимостей $s = s(W)$ качественно аналогичен. Таким образом корни уравнения (3.4) образуют бесконечное дупараметрическое множество: первый параметр есть номер моды капиллярных колебаний m , второй — номер корня уравнения (3.4) при фиксированном m .

Из рис. 1 видно, что полоидальные вихревые движения являются аperiodически быстро затухающими. Расчеты показывают, что с увеличением номера моды m декременты их затухания быстро растут. С увеличением величины сфероидальной деформации (с увеличением e^2) декременты полоидальных движений (равно как и движений, соответствующих ветвям 2, 3) слабо (на сотые доли относительной величины) уменьшаются.

Что касается закономерностей реализации неустойчивости различных мод сильно заряженной капли с увеличением степени сфероидальной деформации, то на рис. 2, а-с приведены зависимости инкрементов неустойчивости для основной ($m = 2$), шестой ($m = 6$) и десятой ($m = 10$) мод от величины квадрата эксцентриситета e^2 : $\text{Re } s = \text{Re } s(e^2)$. Зависимости, представленные на рис. 2, рассчитаны численно по (3.4) при $W = 16$ (критическое для реализации неустойчивости капли — для потери устойчивости основной модой — значение параметра Рэлея $W = 4$ [2]) и при различных значениях вязкости жидкости (кривая 1 соответствует $\nu = 0.03$, кривая 2 — $\nu = 0.1$, кривая 3 — $\nu = 0.36$, кривая 4 — $\nu = 0.8$, кривая 5 — $\nu = 1.2$).

Из рис. 1 несложно видеть, что с ростом e^2 величина инкремента основной моды уменьшается (что, вообще говоря, согласуется с принципом ле Шателье). Инкременты же более высоких мод ведут себя с ростом e^2 по-разному, в зависимости от величины вязкости ν : при малых ν они уменьшаются с ростом e^2 , а начиная с некоторого значения ν , различного для разных мод, начинают увеличиваться с ростом e^2 . Такое их поведение связано с действием двух различных откликов физических параметров колебательной системы (которую представляет собой капля) на увеличение e^2 : с одной стороны, рост e^2 должен приводить к увеличению инкрементов высоких мод за счет увеличения поверхностной плотности заряда на вершинах сфероида [3], с другой стороны, подавляющее влияние вязкости наиболее сильно сказывается на быстрых движениях жидкости (вызванных большими инкрементами высоких мод). Поскольку декременты затухания капиллярных колебаний уменьшаются с увеличением e^2 , а инкременты растут, то при некоторой вязкости эти две тенденции должны нейтрализовать друг друга, что и найдено в численных расчетах. Этот эффект для различных мод проявляется, начиная с различных значений величины вязкости (которое будем отмечать звездочкой): при $m = 4$, начиная с $\nu \equiv \nu_{4*} \approx 0.58$; для моды с $m = 6$ — с $\nu_{6*} \approx 0.165$; для $m = 10$ — с $\nu_{10*} \approx 0.068$. Рассчитанные при таких значениях параметров зависимости $\text{Re } s = \text{Re } s(e^2)$ представляют собой прямые, параллельные оси e^2 , т.е. не зависят от e^2 . При $\nu > \nu_{m*}$ инкремент неустойчивости m -й моды уже увеличивается с ростом e^2 .

Сказанное можно проиллюстрировать анализом соотношения (3.4) при $\nu \rightarrow 0$. Дисперсионное уравнение (3.4) для идеальной жидкости ($\nu = 0$) принимает вид

$$s_0^2 \approx - \left\{ m(m-1)(m+2)\alpha_m - e^2 [m^3 - (2m-1)(m+2)|\alpha_m|] \frac{m(m+1)}{(2m-1)(2m+3)} \right\}. \quad (3.5)$$

Из (3.5) легко видеть, что знак добавки к инкременту неустойчивости, связанной со сфероидальностью капли, определится знаком выражения, стоящего в квадратных скобках. Когда $m^3 > (2m-1)(m+2)|\alpha_m|$, что при $W = 16$ выполняется для $m < 4$, знак добавки отрицателен (множитель $|\alpha_m|$ в этом условии определяет степень надкритичности заряда капли для каждой из мод). При выполнении противоположного соотношения, т.е. для высоких мод, знак добавки положителен. Аналогичные зависимости обнаружены и в численном анализе дисперсионного уравнения (3.4) при учете вязкости (рис. 2).

Следует отметить, что диапазон изменения e^2 от 0 до 0.5, использованный при построении графиков на рис. 2, взят только для наглядности и возможности качественного предсказания возможного поведения инкрементов при увеличении сфероидальной деформации, так как уравнение (3.4) получено для области $e^2 \ll 1$.

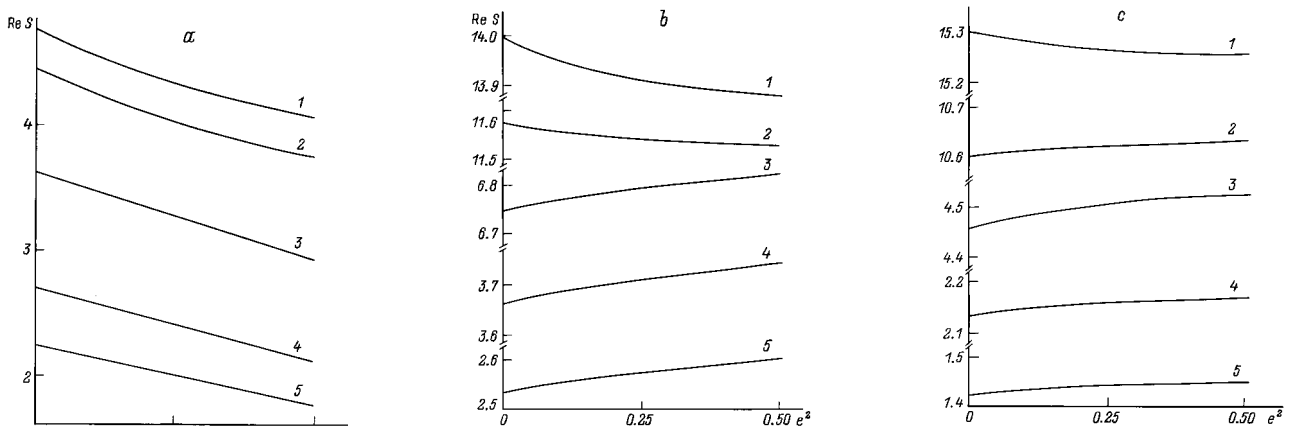


Рис. 2. Зависимости инкрементов неустойчивости от величины квадрата эксцентриситета.

Дисперсионное уравнение для частот колебаний заряженной сферической капли вязкой жидкости [8,11] несложно получить из (3.4) при $e^2 = 0$.

4. Возвращаясь теперь к рассмотрению краевой задачи (2.3), (2.5) для скалярной функции $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$ и подставляя решение (2.8) в условие (2.5), несложно записать уравнение вида

$$D_m^2 \left\{ \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) + (m-1) + e^2 \times \left[-3 \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \chi_m + \left(\frac{s}{\nu} + (m-1)^2 - 1 + \frac{12}{m(m+1)} \right) \chi_m - \frac{2}{3} \right] \right\} = 0;$$

$$D_m^2 \equiv C_m^2 i_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right). \quad (4.1)$$

Удовлетворять условию (4.1) можно двумя способами.

1) Положить равными нулю все коэффициенты D_m^2 , что соответствует обнулению всей скалярной функции $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$. Практически именно этот случай и рассматривался выше, когда функция Φ_2 не принималась во внимание. При этом возникающие в капле движения жидкости характеризуются дисперсионным соотношением (3.4) и не имеют тороидальной составляющей, так как $U_\varphi = 0$.

2) Приравнять нулю выражение в фигурной скобке. Во втором случае получится соотношение, которое, если его разрешить относительно функции $f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right)$ в линейном по e^2 приближении, примет вид

$$\sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) + (m-1) + e^2 \left\{ \left[\frac{s}{\nu} + \left((m^2 + m - 3) + \frac{12}{m(m+1)} \right) \right] \chi_m - \frac{2}{3} \right\} = 0. \quad (4.2)$$

Выражение (4.2) является дисперсионным уравнением, характеризующим спектр вихревых тороидальных

движений жидкости, описываемых функцией $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$, возникающих как и полоидальные движения, описываемые функцией $\Phi_3(\mathbf{r}, t)$, за счет тепловых флуктуаций. На рис. 3 представлены результаты численного расчета при $e^2 = 0.2$ спектра тороидальных движений для первых двадцати двух мод в виде зависимостей

$$\frac{s}{\nu} = \frac{s}{\nu}(m),$$

где m условно принято изменяющимся непрерывно, а не дискретно, для нескольких первых корней. Видно, что движения жидкости этого типа являются аperiodически сильно затухающими. Зависимость величины декрементов тороидальных вихревых движений от e^2 весьма слаба и не превышает сотых долей относительной величины в диапазоне изменения e^2 от 0 до 0.5. Множество решений дисперсионного уравнения (4.2) является двухпараметрическим: первый параметр есть номер моды капиллярных колебаний m , второй — номер корня уравнения (4.2) при фиксированном m .

Интересно отметить, что краевая задача для определения функции $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$ полностью автономна и никак не связана ни с возмущением поверхности $\xi(\theta, t)$, ни

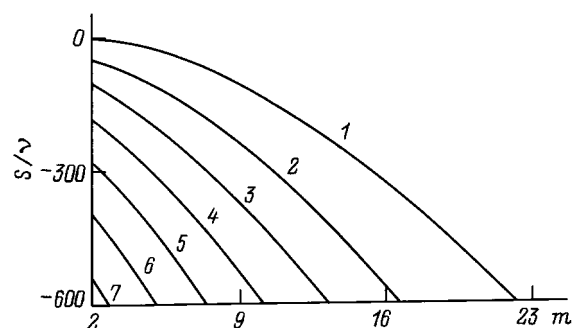


Рис. 3. Зависимости от номера моды m нескольких первых корней дисперсионного уравнения для аperiodически затухающих тороидальных вихревых движений жидкости (4.2). Номера кривых соответствуют корням дисперсионного уравнения тороидальных вихревых движений.

с функциями $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_3(\mathbf{r}, t)$. Из этого следует, что в линейной постановке решаемой задачи тороидальное движение не оказывает никакого влияния на капиллярные колебания капли в целом (т.е. не оказывает влияния на формирование рельефа поверхности капли) и не взаимодействует с полоидальными движениями жидкости. Взаимодействие этих двух движений с образованием единого тороидальнополоидального вихря реализуется лишь на нелинейной стадии.

5. Согласно вышеполученным результатам, величины инкрементов неустойчивых мод с $m > 3$ с увеличением вязкости уменьшаются, а с увеличением степени сфероидальной деформации увеличиваются. Это обстоятельство указывает на возможность иного пути развития рэлеевской неустойчивости сильно вязкой капли, чем описанный в [12] для маловязких жидкостей. В случае маловязких жидкостей при выполнении критерия неустойчивости для основной моды капиллярных колебаний капля начинает вытягиваться в сфероид, генерируя при этом (за счет увеличения локальной плотности заряда на вершинах сфероида) неустойчивость более высоких мод капиллярных волн. Суперпозиция неустойчивых высоких мод приводит к образованию на вершинах капли эмиттирующих выступов (конусов Тейлора [13,14]), с которых начинается эмиссия высокодисперсных сильно заряженных капелек, уносящих заряд и массу неустойчивой капли. Рост и формирование эмиттирующих выступов происходит на фоне продолжающегося (за счет увеличения амплитуды наиболее неустойчивой основной моды) вытягивания капли в сфероид, которое прекращается лишь с началом сброса заряда и массы. В случае сильно вязких жидкостей следует принять во внимание, что, согласно приведенным выше данным, степень подавления вязкостью инкрементов неустойчивости различных мод увеличивается с увеличением номера моды. Таким образом, реальна ситуация, когда для сильно вязкой капли инкременты неустойчивости высоких мод (с $m \geq 10$) окажутся меньше инкремента неустойчивости основной моды. В этом случае, прежде чем сформируются эмиттирующие выступы и начнется сброс заряда и массы, капля вытянется настолько, что выполнится критерий ее неустойчивости по отношению к ее делению пополам при сильных деформациях [15,16]. В результате капля разорвется на две части сравнимых размеров, каждая из которых будет уже устойчива по отношению к собственному заряду.

Итак, для сильно вязких жидкостей, когда безразмерный параметр $\nu[\rho/(R\sigma)]^{1/2}$ больше единицы, возможен качественно иной (по сравнению с маловязкими жидкостями [12]) путь реализации неустойчивости капли относительно собственного заряда — деление на две части сравнимых размеров. Ясно, что выполнение критерия $\nu[\rho/(R\sigma)]^{1/2} \gg 1$ возможно и в случае маловязких жидкостей для очень мелких капель. Несложно подсчитать, что для капель воды это условие будет выполняться при $R \leq 0.02 \mu\text{m}$. Такое явление может иметь место, например, в устройствах масс-спектрометрии термиче-

ски нестабильных и нелетучих веществ, где с торца капилляра, по которому подается рабочая жидкость, происходит эмиссия сильно заряженных капель субмикронных размеров, для которых выполнение условия $\nu[\rho/(R\sigma)]^{1/2} \gg 1$ заведомо обеспечено. Учет эффекта релаксации вязкости [17] усиливает роль обсуждаемого канала распада сильно заряженной капли.

Приложение

Равновесная форма капли определяется условием баланса действующих на поверхность, не зависящих от времени давлений, получающимся из граничного условия для нормальной компоненты тензора напряжений в отсутствие движения жидкости

$$-(p^0 - p^{ex}) - p_E^0 + p_\sigma^0 = 0.$$

Здесь p^0 — давление внутри жидкости, p^{ex} — внешнее давление, p_E^0 — давление электрических сил и p_σ^0 — давление сил поверхностного натяжения на равновесную поверхность капли. Из уравнения Навье–Стокса следует, что $p^0 = \text{const}$. Для вытянутого сфероида в линейном по квадрату эксцентриситета сфероида e^2 приближении несложно получить [3]

$$p_E^0 = \frac{Q^2}{8\pi} \left[1 + \frac{1}{3} e^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right];$$

$$p_\sigma^0 = 2 \left[1 + \frac{1}{3} e^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right].$$

Для поддержания равновесной сфероидальной формы капли необходимо создать внешнее независящее от времени и формы поверхности капли давление p^{ex} , вид которого определится условием баланса давлений

$$p^{ex} = p^0 - 2 \left(1 - \frac{Q^2}{16\pi} \right) \left[1 + \frac{1}{3} e^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right].$$

Таким давлением может быть, например, ультразвуковое давление.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] Rayleigh J.W. // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
- [3] Григорьев А.И. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1273–1278.
- [4] Cheng K.J. // Phys. Lett. 1985. Vol. 112 A. N 11. P. 392–396.
- [5] Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 20. Вып. 4. С. 84–88.
- [6] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 16. С. 17–22.
- [7] Ширяева С.О., Григорьева И.Д. // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 6. С. 1–5.
- [8] Ширяева С.О., Лазарянц А.Э. и др. Препринт ИМРАН. № 27. Ярославль, 1994. 126 с.

- [9] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
- [10] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* и др. Препринт ИМРАН. № 29. Ярославль, 1995. 34 с.
- [11] *Григорьев А.И., Лазарянец А.Э.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 11-17.
- [12] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19-28.
- [13] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ИФЖ. 1991. Т. 61. № 2. С. 632-641.
- [14] *Шевченко С.И.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 2. С. 54-58.
- [15] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Григорьева И.Д.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 4. С. 25-31.
- [16] *Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Григорьев А.И.* // Электрон. обраб. материалов. 1995. № 5. С. 55-58.
- [17] *Ширяева С.О., Григорьева О.А.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 9. С. 67-71.