

01;05;06

Слабопроводящая анизотропная среда в переменном электрическом поле

© Б.В. Крылов, В.Е. Лепарский

Институт физики им. Б.И. Степанова АН Белоруссии,
220602 Минск, Белоруссия

(Поступило в Редакцию 27 августа 1996 г.)

Решена задача нахождения потенциальной функции в анизотропной слабопроводящей среде при заданном распределении потенциала на границе и синусоидальном изменении его во времени. Показано, что для каждой фазы питающего напряжения распределение потенциала такое же, какое было бы для статического поля в диэлектрическом кристалле с неоднородной анизотропией, изменяющейся с фазой по определенному закону.

Электростатическое и квазиэлектрическое поля в анизотропных средах, как диэлектриках, так и проводниках, изучены хорошо. Однако существует обширный класс веществ с малой электропроводностью, которые при низкой частоте электрического поля ведут себя как проводники с проводимостью σ , а на высокой частоте как диэлектрики с диэлектрической проницаемостью ε [1]. Отсюда следует, что существует промежуточная область частот, в которой на распределение поля в среде влияют оба параметра ε и σ . Экспериментально этот режим был исследован в [2] на примере электрооптического градиентного дефлектора, выполненного из кристалла KDP. При комнатной температуре этот кристалл для постоянного поля ведет себя как проводник с анизотропией $\sigma_{\min}/\sigma_{\max} = 0.86$, а на частоте 50 Hz как диэлектрик с $\varepsilon_{\min}/\varepsilon_{\max} = 0.5$. При нагревании до 40–50°C вследствие увеличения проводимости частота 50 Hz уже относится к промежуточной области. Как следствие этого, наблюдается такое явление, как изменение конфигурации поля в кристалле в зависимости от фазы приложенного напряжения.

Мы будем рассматривать электрические поля в кристаллах именно для промежуточного диапазона частот, имея в виду, что случаи чистого диэлектрика ($\omega \rightarrow \infty$) и чистого проводника ($\omega \rightarrow 0$) должны получиться как частные случаи.

Для описания квазиэлектростатического поля в слабопроводящих средах, характеризуемых параметрами ε и σ , необходимо рассматривать систему уравнений [3]

$$\frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi, \quad (1)$$

$$\rho = \operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi, \quad (2)$$

где φ — потенциал электрического поля, ρ — объемная плотность заряда.

В работе рассматриваются однородные кристаллы, характеризуемые тензорами ε и σ , не зависящими от координат.

Предполагается также, что заданы граничные условия для φ на замкнутой границе S

$$\varphi|_S = \varphi(S) \cdot \cos \omega t. \quad (3)$$

При постоянных ε_{ik} и σ_{ik} (1) и (2) принимают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\Delta_\sigma \varphi, \quad \Delta_\sigma = \sigma_{ik} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k}, \quad (4)$$

$$\rho = \Delta_\varepsilon \varphi, \quad \Delta_\varepsilon = \varepsilon_{ik} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k}. \quad (5)$$

Исключив отсюда неизвестную ρ , получим

$$\Delta_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Delta_\sigma \varphi = 0. \quad (6)$$

Пользуясь тем, что (6) линейно, а в граничных условиях предполагается гармоническая зависимость от времени, будем искать решение в виде

$$\varphi = \phi \exp(i\omega t). \quad (7)$$

Удобно решать задачу в комплексном виде, имея в виду, что физически осмысленный вещественный потенциал представляет собой действительную или мнимую часть (7). Подставив (7) в (6), получим уравнение для комплексной функции координат ϕ

$$(\Delta_\sigma + i\omega \Delta_\varepsilon)\phi = 0. \quad (8)$$

Отметим частные случаи. При статическом поле ($\omega = 0$) (8) превращается в $\Delta_\sigma \phi = 0$, т.е. в уравнение для электропроводящего кристалла, как и указывалось в [1]. Для больших ω или в случае, когда проводимость кристалла пренебрежимо мала ($\sigma = 0$), (8) дает обычное уравнение для электростатики диэлектрического кристалла $\Delta_\varepsilon \phi = 0$. В обоих случаях уравнение становится вещественным и вещественным будет его решение ϕ .

Будем в дальнейшем рассматривать плоскую задачу в координатной плоскости x, y , оси которой соответствуют кристаллографическим осям X' и Z кристалла KDP, поскольку предполагается применить развиваемый подход к описанию работы электрооптических устройств (дефлекторов и линз), неоднородные поля в которых обычно цилиндрические, не зависящие от одной из координат.

Перейдя в систему координат, в которой тензоры σ_{ik} и ε_{ik} одновременно имеют диагональный вид (для многих

кристаллов это возможно), получим

$$(\sigma_1 + i\omega\varepsilon_1)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + (\sigma_2 + i\omega\varepsilon_2)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0. \quad (9)$$

Это уравнение рассматривалось также в [4].

Уже упоминалось, что характер квазистатического электрического поля меняется во времени и зависит от того, в какой фазе питающего напряжения мы его наблюдаем [2]. Выясним эту закономерность. Пусть при заданных граничных условиях (3) найдено решение уравнения (9) и построено физическое поле потенциала (7). Его распределение зависит от времени. Рассмотрим его в момент времени t . Выясним, похоже ли это мгновенное распределение поля на какое-либо статическое, которое существовало бы, если бы внутри области находился кристалл с удачно подобранной анизотропией ξ , под которой имеется в виду отношение главных значений тензора диэлектрической проницаемости непроводящего кристалла, точнее, существует ли такое вещественное уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (10)$$

которому удовлетворяло бы поле (7)? Если такое уравнение существует, то чему равна эффективная анизотропия ξ в каждый момент времени?

Подставим (7) в (10) и возьмем действительную часть

$$\operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \right) \exp(i\omega t) \right] = 0. \quad (11)$$

Поскольку Φ удовлетворяет уравнению (9), то

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = -\frac{\sigma_2 + i\omega\varepsilon_2}{\sigma_1 + i\omega\varepsilon_2} \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -\alpha \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \quad (12)$$

где

$$\alpha = \frac{\sigma_2 + i\omega\varepsilon_2}{\sigma_1 + i\omega\varepsilon_1} = \alpha_1 + i\alpha_2. \quad (13)$$

Подставив (12) в (11), получим

$$\operatorname{Re} \left[(\xi - \alpha) \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \exp(i\omega t) \right] = 0. \quad (14)$$

Предполагая, что $|\partial^2\phi/\partial y^2| \neq 0$, и обозначив

$$\vartheta = \arg(\partial^2\phi/\partial y^2), \quad (15)$$

имеем

$$\operatorname{Re} [(\xi - \alpha) \exp i(\omega t + \vartheta)] = 0, \quad (16)$$

откуда

$$\xi = \alpha_1 - \alpha_2 \operatorname{tg}(\omega t + \vartheta). \quad (17)$$

Укажем на некоторые следствия (17).

1. Для каждой фазы питающего напряжения поле в заданной области совпадает с электростатическим полем, которое создавалось бы там, если бы область была заполнена неоднородной средой (ϑ зависит от координат

с анизотропией, определяемой тензором с главными значениями 1 и ξ при существующих граничных условиях.

2. В зависимости от фазы питающего напряжения эффективная анизотропия ξ изменяется по закону (17), т.е. пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$ вместе с $\operatorname{tg}(\omega t + \vartheta)$. Подобная зависимость обсуждалась в [4] на примере одного из решений уравнения (9), полученного без учета стационарных во времени граничных условий.

3. Эффективная анизотропия, вообще говоря, зависит от координат, поскольку от координат зависит ϑ .

При исследовании электрооптических deflectоров, описанных в [2], увеличение проводимости кристаллов достигалось нагреванием. При этом, как оказалось, отношения главных значений тензоров ε и σ изменялись незначительно, менялась лишь величина проводимости. Поэтому имеет смысл выяснить, как будет изменяться эффективная анизотропия ξ при следующих условиях:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \varepsilon = \operatorname{const}, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \sigma = \operatorname{const}, \quad \frac{\omega\varepsilon_1}{\sigma_1} = r \in (0, \infty).$$

Представим (13) в виде

$$\alpha_1 + i\alpha_2 = \frac{\sigma_2 - i\omega\varepsilon_2}{\sigma_1 - i\omega\varepsilon_1} = \frac{\sigma + \varepsilon}{2} - \frac{\sigma - \varepsilon}{2} \frac{1 - ir}{1 + ir}.$$

Поскольку $|1 - ir/1 + ir| = 1$, то комплексное число $\alpha_1 + i\alpha_2$ при $0 \leq r < \infty$ пробегает полуокружность с центром в точке $(\sigma + \varepsilon)/2$ и радиусом $(\sigma - \varepsilon)/2$. При $r = 1$ достигается максимальное значение α_2 и зависимость ξ от фазы питающего напряжения, определяемая выражением (17), проявляется наиболее четко.

На рис. 1 представлено изменение ξ в зависимости от фазы питающего напряжения. Область между кривыми 2 ($\vartheta = -13.1^\circ$) и 3 ($\vartheta = 10.5^\circ$) — возможные значения ξ в разных точках апертуры (зависимость ϑ от x и y) при $r = 1.13$. Кроме этого, приведены кривые, близкие к предельным значениям $r \rightarrow 0$ ($f = 0.5$ Hz, кривая 1) и $r \rightarrow \infty$ ($f = 500$ Hz, кривая 4), чтобы показать, как осуществляется переход от среды, одновременно

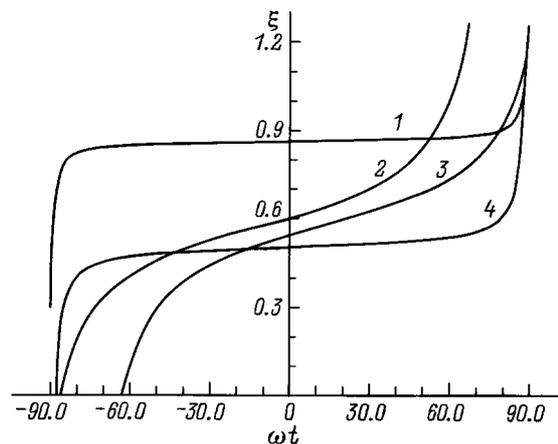


Рис. 1. Зависимость эффективной анизотропии ξ от фазы питающего напряжения.

описываемой двумя тензорами ε_{ik} и σ_{ik} к предельным случаям чистого диэлектрика и чистого проводника.

На основе изложенного можно объяснить картину изменений поля, которая наблюдалась в [2,5] в нагретом электрооптическом дефлекторе. Пусть электроды дефлектора — сопряженные гиперболы выполнены с расчетом на какую-то анизотропию среды. Из рис. 1 видно, что всегда найдется фаза питающего напряжения, когда ξ окажется близкой к анизотропии, заложенной в конструкцию электродов, а при других фазах будет больше или меньше ее. Однако все эти соотношения будут приближительными, поскольку ξ зависит от координат (вертикальное сечение области между кривыми 2 и 3), а значит, поле лишь приблизительно соответствует тому, которое создается в устройстве, если внутрь системы электродов помещается однородный электрооптический кристалл.

Рассмотрим зависимость эффективной анизотропии от координат. Как следует из (17), ξ будет зависеть от координат только в том случае, если от них зависит ϑ . Выясним, существуют ли решения уравнения (9), для которых $\vartheta = \text{const}$, и если они существуют, то какими будут граничные условия для потенциала, гармонически изменяющегося во времени. Заметим, что если для какого-то решения Φ это справедливо, то для $\Phi \exp(-i\vartheta)$, отличающегося на постоянный множитель, а следовательно, также являющегося решением уравнения (9), $\vartheta = 0$. Будем искать такие решения.

Уравнение (9) возьмем в форме (12)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad \Phi = \Phi_1 + i\Phi_2. \quad (18)$$

Из

$$\vartheta = \arg \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \text{arctg} \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} / \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \right) = 0$$

следует

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = 0, \quad (19)$$

а отсюда

$$\Phi_2 = F_1(x)y + F_2(x), \quad (20)$$

где F_1 и F_2 — пока произвольные функции.

Разделим действительную и мнимую части уравнения (18). Учитывая (19) и (20), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} &= -\alpha_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \\ &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} [F_1''(x)y + F_2''(x)], \end{aligned} \quad (21)$$

т. е.

$$\Phi_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} [F_1(x)y + F_2(x)] + f_1(y)x + f_2(y), \quad (22)$$

и наконец, из (21) и (22) имеем

$$[F_1''(x)y + F_2''(x)] = -\alpha_2 [f_1''(y)x + f_2''(y)]. \quad (23)$$

Поскольку в левой части равенства стоит линейная функция по y , а в правой — линейная функция по x , то функции $F_1'', F_2'', f_1'', f_2''$ должны быть линейными. После сравнения коэффициентов при подобных слагаемых и интегрирования получим (a_i, b_j, c_k, d_l — произвольные вещественные постоянные)

$$\begin{aligned} f_1(y) &= a_1 y^3 + b_1 y^2 + c_1 y + d_1, \\ f_2(y) &= a_2 y^3 + b_2 y^2 + c_2 y + d_2, \\ F_1(x) &= -2\alpha_2 [a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4], \\ F_2(x) &= -2\alpha_2 [b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4]. \end{aligned} \quad (24)$$

Выбором произвольных постоянных в (24) ограничены классы решений уравнения (18), для которых выполнено условие (19).

В случае симметричных как по x , так и по y граничных условий (электрооптический квадрупольный дефлектор) в решение могут входить только четные степени координат. Тогда получим

$$\Phi = b_2(\alpha x^2 - y^2) + 2\alpha_2 b_4 - d = A(\alpha x^2 - y^2) + B. \quad (25)$$

Подобное решение уравнения рассматривалось в [4], где показано, что при гармоническом изменении потенциала во времени форма электродов дефлектора должна все время изменяться, что противоречит стационарному во времени граничным условиям реального устройства. Поэтому можно утверждать, что для поля, существующего в дефлекторе, условие (19) не будет выполняться, т. е. ϑ будет зависеть от координат.

Чтобы выяснить зависимость ϑ от координат, необходимо полностью решить задачу о нахождении потенциала электрического поля, удовлетворяющего конкретным граничным условиям и уравнению (9). Для примера

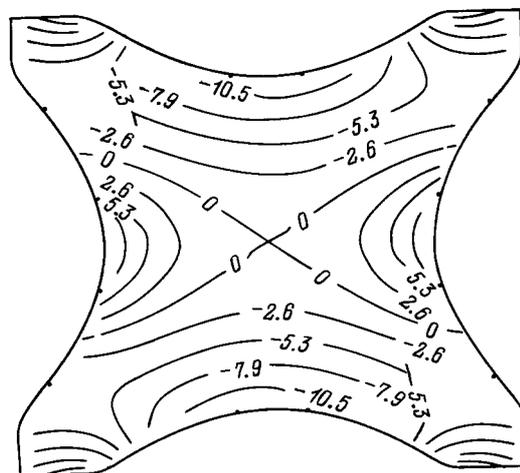


Рис. 2. Линии равных фаз $\vartheta(x, y)$.

методом, изложенным в [6], было рассчитано поле для квадрупольного дефлектора со следующими исходными данными: анизотропия, заложенная в геометрию электродов, 0.79; радиус окружности, касающейся вершин электродов, 1.75 mm; температура 51.8°С; управляющее напряжение 2000 V; параметры кристалла: $\varepsilon_x = 42$, $\varepsilon_z = 21$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-15}$ F/mm, $\varepsilon_z/\varepsilon_x = 0.5$, $\sigma_x = 0.6 \cdot 10^{-10}$ mm⁻¹·Ω⁻¹, $\sigma_z = 0.51 \cdot 10^{-10}$ mm⁻¹·Ω⁻¹, $\sigma_z/\sigma_x = 0.86$, $\omega\varepsilon_x/\sigma_x = 1.13$.

По результатам расчета была построена (рис. 2) карта линий равной фазы $\vartheta(x, y)$ (цифровые значения фазы каждой линии даны в градусах) для равной нулю фазы питающего напряжения (максимум напряжения). Из рис. 2 видно, что наибольшая разность фаз ($\sim 24^\circ$) наблюдается для точек области, близких к электродам. Отметим, что на рис. 1 зависимость анизотропии от фазы приведена именно для этого случая. Как следует из рис. 1, величина неоднородности анизотропии (вертикальные сечения области между кривыми 2 и 3) зависит от фазы управляющего напряжения. Минимальное значение неоднородности анизотропии для устройства с приведенными данными составляет ~ 0.06 .

Исследования профинансированы Фондом фундаментальных исследований Беларуси.

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1958. С. 303.
- [2] Гусак Н.А., Гриб А.Ф. // Физические основы и прикладные вопросы голографии. 1984. С. 223–229.
- [3] Крылов Б.В. // Вести АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1978. № 6. С. 61–65.
- [4] Гусак Н.А. // ДАН БССР. 1984. Т. 28. № 6. С. 527–529.
- [5] Гусак Н.А., Гриб А.Ф. // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 2. С. 415–417.
- [6] Крылов Б.В., Лепарский В.Е., Гурич Н.И. // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 9. С. 95–100.