01;04

Кинетический коэффициент отражения электронов в кнудсеновской низковольтной дуге

© Н.И. Алексеев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 5 мая 1997 г.)

Рассмотрена задача о влиянии выхода быстрых электронов плазмы на функцию распределения электронов (ФРЭ) в цезиевой кнудсеновской низковольтной дуге. Показано, что даже при большом кнудсеновском параметре $l_e/h \sim 5-10$ (h — зазор, l_e — длина свободного пробега электронов с энергией порядка анодного барьера) поток электронов из плазмы на анод незначительно отличается от рассчитываемого с максвелловской ФРЭ.

При расчете цезиевого термоэмиссионного преобразователя, работающего в кнудсеновском режиме [1] (когда длина свободного пробега электронов с энергиями порядка положительного анодного падения φ_2 (рис. 1, a) в несколько раз превышает зазор h), и плазменного ключевого элемента [2] актуальным является вопрос о величине тока тепловых электронов плазмы на анод. В расчетах обоих типов приборов [1–3] полагалось, что, несмотря на постоянное обеднение функции распределения ФРЭ электронов за счет выхода быстрых частиц на анод, этот ток определяется стандартным выражением $(1/4)nv_{Te}\exp(-\varphi_2/T)$ (n и T — электронные концентрация и температура), записанным так, как если бы ФРЭ была максвелловской. Основанием для такого упрощения служит то, что ФРЭ с энергией чуть меньше барьера φ_2 не должна сильно отличаться от максвелловской из-за многократного отражения таких электронов от катодного и анодного барьеров (влияние обеднения ФРЭ быстрыми частицами на выносимый на электрод ток тепловых электронов принято описывать так называемым коэффициентом отражения k_{refl}, определяемым из соотношения $j = (1/4)nv_T\exp(-\varphi_2/T)\cdot(1-k_{\text{refl}})$ [4]). Однако количественные оценки дать достаточно трудно из-за отсутствия в задаче реального малого параметра: как будет видно из последующего рассмотрения, отношение зазора h к длине свободного пробега околобарьерного электрона l_e (в данной задаче оно составляет 0.2–0.5) в качестве такого параметра должно быть настолько малым, что расчет практически не имеет отношения к реальной кнудсеновской дуге. В данной работе расчет делается для условий стационарного проводящего состояния кнудсеновского диода при достаточно высокой концентрации плазмы $\bar{n} \geqslant 10^{13}\,\text{cm}^{-3}$ и давлении газа на уровне $P_{\text{Cs}} \sim 10^{-2}\,\text{Torr}$ (что соответствует при данной n и типичных $T \sim 0.3-0.5\,\text{eV}$ концентрации атомов цезия $N_{\text{Cs}} \sim 3\cdot 10^{13}\,\text{cm}^{-3}$). Такие условия реализуются и в стационарном состоянии катодной и анодной областей ключевого элемента [3,5]. Барьер φ_2 составляет при этом $\varphi_2 = 1.5-2\,\text{eV}$, и доминирующими для электронов с энергией $E \sim \varphi_2$ являются кулоновские столкновения: их характерная длина $l_e = \varphi_2^2/4\pi q^4 n\Lambda$ составляет 1.5–3 mm, что в несколько раз меньше длины l_{ea} электрон-атомных столкновений ($l_{ea} = 1/\sigma_{ea}N_a$, $\sigma_{ea} = 3.5\cdot 10^{-14}\,\text{cm}^{-3}$). Катодный барьер φ_1, превосходящий φ_2 на величину напряжения дуги (рис. 1, a), считается бесконечно большим. Соотношение параметров $l_{ea} \ll l_e$, характерное для нестационарного переходного процесса в анодной области плазменного ключевого элемента при подаче на сетку отрицательного сеточного импульса [6], не будет здесь рассматриваться, так как для расчета ФРЭ при энергиях $E \leqslant \varphi_2$ существенно взаимодействие электронов с нерезонансными ленгмюровскими плазмонами [7], что существенно осложняет решение, не меняя, однако, качественных выводов.

Часть сделанных при решении приближений аналогична расчету k_{refl} в случае $h \gg l_e \gg l_{ea}$ [8], а именно столкновения с электронами плазмы описываются планковским интегралом столкновений, в котором фигурируют, однако, обе компоненты скорости — продольная и поперечная (продольной будем называть скорость вдоль оси разряда, а поперечную — в плоскости электродов). Использование планковского интеграла приемлемо для электронов с энергией порядка φ_2, много большей, чем T (фактор "много больше" составляет, правда, 4–5).

Пренебрегается действием на электроны, движущиеся с такими продольными скоростями, электрического поля в зазоре, учитывая, что перепад потенциала в кнудсенов-

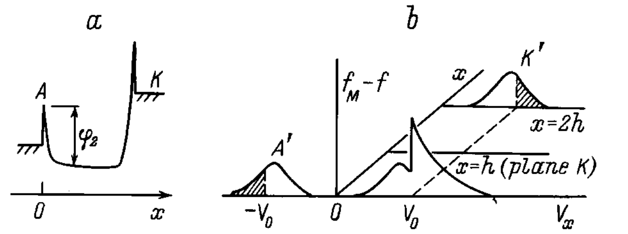

Рис. 1. Схема изменения потенциала в кнудсеновском зазоре от катода K к аноду A (a) и схема изменения функции $\delta f = f_M - f$ (b). A и A' — в реальном зазоре при $x = 0$ (в плоскости анода); от A при $x = 0$ и K' при $x = 2h$ — в эквивалентной постановке задачи при $x = 2h$. Область скоростей, дающая вклад в ток на анод, заштрихована.

ском зазоре составляет максимум несколько десятых В, что на порядок меньше величины анодного барьера. В таких приближениях кинетическое уравнение имеет вид

$$v_x\partial f/\partial x - (v_T^2/2)\mathrm{div}\Big(\nu_e(\nabla f + (m\vec{v} f/T))\Big) + (v/l_{ea})f = 0, \qquad (1)$$

где ν_e — частота кулоновских столкновений быстрых надбарьерных электронов с тепловыми электронами плазмы, координата x отсчитывается от анода, а катод, от которого электроны зеркально отражаются, имеет координату $x = h$.

Раскрывая оператор div и учитывая характер зависимости ν_e от скорости $\nu_e(v) = (2\pi q^4 n\Lambda/m^2v^3)$, получаем

$$\mathrm{div}\Big(\nu_e(\nabla f + (m\vec{v} f/T))\Big) = \nu_e(\Delta f + (\vec{v}\nabla f)(m/T - 3/|v|^2)).$$

Перепишем тогда (1) в виде

$$v_x\partial f/\partial x - (\nu_e v_T^2/2)\Big(\partial^2 f/\partial v_x^2 + v_x\partial f/\partial v_x\left(m/T - 3/|v|^2\right) + \left(\partial^2 f/\partial v_\perp^2\right) + (1/v_\perp)(\partial f/\partial v_\perp)\big(1 + v_\perp^2\left(m/T - 3/|v|^2\right)\big)\Big) + (v/l_{ea})f = 0. \qquad (2)$$

Пространственные граничные условия таковы: при $x = 0$ ФРЭ f симметрична по v_x при $|v_x| < v_0 = (2\varphi_2/m)^{1/2}$ и равна 0 при $v_x > v_0$; при $x = h$ симметрична для любой v_x (рис. 1, b). Полное отражение при $x = h$, отсутствие взаимодействия между быстрыми частицами и малость поля позволяют, кроме того, рассматривать изменение ФРЭ лишь для частиц с положительными при $x = 0$ скоростями, считать, что скорость при $x = h$ не меняется, а граничное условие $f(v_x) = f(-v_x)$ при $|v_x| < v_0$, $x = 0$ сформулировать в виде $f(v_x > 0,\ x = 2h) = f(v_x > 0,\ x = 0)$.

Будем считать вначале, что $l_e \gg l_{ea}$, и последний член в (2) можно отбросить. Очевидно тогда, что максвелловская ФРЭ $f_M = \exp\left(-(v_x^2 + v_\perp^2)/v_T^2\right)$ есть тривиальное решение (2) и может рассматриваться как граничное условие для искомого решения при малых v_x. Функция $\delta f = f_M - f$ также удовлетворяет при этом уравнению (2).

Будем, как и в [8], считать, что δf быстро спадает вправо и влево от точки $v_x = v_0$; "конус выхода" частиц на анод $v_\perp/v_x$, в котором и происходит основное обеднение ФРЭ, мал. В этом случае можно заменить в (2) $|v|$, v_x на v_0.

При $T/\varphi_2 \sim 1/4$ замена v на $v_x \cong v_0$ правомерна при $v_\perp/v_T \ll 1/2^{1/2}$. Однако диапазон скоростей $v_\perp$, охватываемый уравнением (2), можно расширить примерно вдвое, перейдя от δf к

$$g(v_\perp,\ v_x) = \delta f \exp\left((2 - 3T/\varphi_2)u_\perp^2/4\right),$$

где $u_\perp = v_\perp/v_T$.

Функция g удовлетворяет соотношению

$$\left(\partial^2 g/\partial u_\perp^2\right) + (1/u_\perp)(\partial g/\partial u_\perp) \sim \left(\partial^2 f/\partial u_\perp^2\right) + (1/u_\perp) \times(\partial f/\partial u_\perp)\left(1 + Xu_\perp^2\right) + f(X/4)\left(4 + Xu_\perp^2\right),$$

где $X = v_T^2\left(m/T - 3/|v|^2\right) \approx 2 - 3T/\varphi_2$, в правой части которого первые два члена входят в "поперечную" часть в (2), а последний член можно прибавить и вычесть, пренебрегая при этом $Xu_\perp^2$ по сравнению с 4.

Условия на δf вытекают из условий для f при $v_x < v_0$

$$\delta f(x = 2h) = \delta f(x = 0), \qquad (3)$$

при $x = 0$

$$v_x > v_0: \qquad \delta f = f_M = \exp\left(-v_x^2/v_T^2 - u_\perp^2\right). \qquad (4)$$

Будем считать также, как уже сказано, что $\delta f \to 0$ при $v_x \to v_T$. Точка v_T выбрана вполне произвольно, и эффективность выбора определяется качеством локализации δf около $v = v_0$ (тем более, что кулоновские столкновения не описываются при $v \sim v_T$ планковским интегралом столкновений).

При $v_\perp \ll v_x \cong v_0$ в данную схему можно включить и электрон-атомные столкновения. Заменяя v на v_x в интеграле столкновений $(v/l_{ea})f$, видим, что функция $\tilde{f}_M(v_x,\ x) = f_M(v)\exp(-x/l_{ea})$ есть решение (2), однако не подходит в качестве предельного решения (2) при $v \sim v_T$. Действительно, если записать аналог (3) $\delta f(x = 2h) = \delta f(x = 0) + f_M(v)\big(1 - \exp(-2h/l_{ea})\big)$, то $\delta f(x = 2h) - \delta f(x = 0) \neq 0$ нарастает с уменьшением v_x, что неверно. Задача в таком случае требует более строгого рассмотрения, которое должно, однако, внести лишь малые изменения в полученный ниже качественный результат.

Переходя от $g(u_\perp)$ к ее фурье–бесселевскому образу $g_q \equiv g(q_\perp, v_x) = \int\limits_0^\infty g(v_\perp)J_0(u_\perp q_\perp)u_\perp du_\perp$, беря в качестве продольной переменной энергию E_x вместо v_x (при замене E_x на $E_0 = \varphi_2$ относительная ошибка меньше, чем при замене v_x на v_0) и используя вместо E_x и координаты x безразмерные $\varepsilon_x = E_xT_e$ и $\xi = x/h$, получаем для $g(q_\perp)$

$$\partial g_q/\partial\xi - a^2\left(\partial^2 g_q/\partial\varepsilon_x^2 + \Xi\partial g_q/\partial\varepsilon_x - g_q\gamma\right) = 0, \qquad (5)$$

где $\varepsilon_0 = \varphi_2/T$, $a^2 = 2\varepsilon_0 h\nu_e(v_0)/v_0$, $\gamma = \left(q_\perp^2 + X\right)/4\varepsilon_0$, $\Xi = (\varepsilon_0 - 1)/\varepsilon_0$.

Переходя от функции g_q к $F(\xi, \eta, q_\perp) = g_q \times \exp(-\lambda\xi - \mu(\eta + \varepsilon_0))$, где $\lambda = -a^2\left(\gamma + \Xi^2/4\right)$, $\mu = -\Xi/2$, $\eta = \varepsilon_x - 1$, получаем для F уравнение теплопроводности в стандартном виде $\partial F/\partial\xi - a^2\partial^2 F/\partial\eta^2 = 0$. Граничное условие для F, как видно из (3), имеет вид

$$F(\xi = 2) = \exp(-2\lambda)\cdot F(\xi = 0). \qquad (6)$$

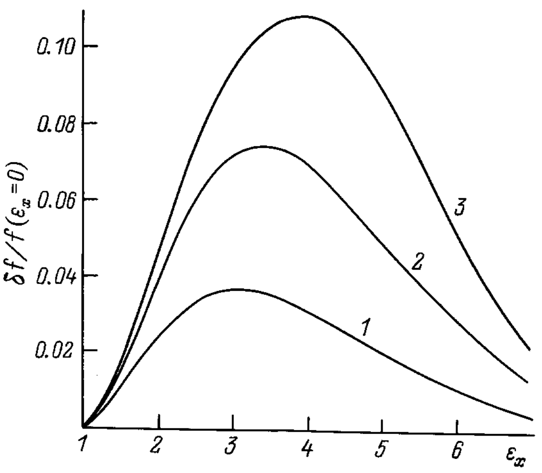

Рис. 2. Отличие $\delta f = f_M - f$ ФРЭ от максвелловской в зависимости от продольной энергии ε_x при $u_\perp = 0$ и нескольких значениях параметра h/l_e. *1* — 0.2, *2* — 0.1, *3* — 0.05. Отношение $\varepsilon_0 = \varphi_2/T$ равно 4, $u_\perp = 0$.

Переменная η вместо ε_x взята исходя из вида условия $F(\varepsilon_x \to 1) \to 0$.

Функция $F(\xi)$ пределяется известным пропагатором уравнения теплопроводности на полубесконечной оси $G(\eta, \eta') = (1/2a(\pi\xi)^{1/2}) \times [\exp(-(\eta - \eta')^2/4a^2\xi) - \exp(-(\eta + \eta')^2/4a^2\xi)]$ и функцией $F(\eta, \xi = 0)$

$$F = \Big(\int_0^{\eta_0} + \int_{\eta_0}^{\infty}\Big) G(\eta, \eta') F(\eta', \xi = 0) d\eta'. \qquad (7)$$

При $\eta > \eta_0 = \varepsilon_0 - 1$ функция $F(\xi = 0, \eta)$, как следует из (4), равна $F = F_M = \delta \cdot \varphi_M$, где

$$\delta = \exp\left\{-q_\perp^2/(4 - X)\right\}/[2 \cdot (1 - X/4)];$$

$$\varphi_M = \exp\{-(\mu + 1)(\eta + 1)\}. \qquad (8)$$

Подставляя (6), (8) в (7), получим для области $\eta < \eta_0$

$$F(\xi = 0, \eta) = \alpha\left(\hat{K}F(\xi = 0, \eta) + \delta\hat{K}_2\varphi_M\right), \qquad (9)$$

где

$$\alpha = C\exp\left(-a^2q_\perp^2/2\varepsilon_0\right),$$

$$C = \left(1/2a(2\pi)^{1/2}\right)\exp\left[-a^2/\left(2 \cdot \left(\Xi^2 + X/\varepsilon_0\right)\right)\right],$$

$$\hat{K}_2\varphi_M = \int_{\eta_0}^{\infty} \exp(-(\eta' + 1)(\mu + 1))\left[\exp\left(-(\eta - \eta')^2/8a^2\right)\right.$$
$$\left. - \exp\left(-(\eta + \eta')^2/8a^2\right)\right] d\eta',$$

$$\hat{K}F = \int_0^{\eta_0} F(\eta', \xi = 0)\left[\exp\left(-(\eta - \eta')^2/8a^2\right)\right.$$
$$\left. - \exp\left(-(\eta + \eta')^2/8a^2\right)\right] d\eta'.$$

Записывая решение (9) в виде ряда $F = \delta\sum_{n=0}\alpha^{n+1}\left(\hat{K}^n\hat{K}_2\right)\varphi_M$, переходя к g_q, применяя обратное преобразование Фурье–Бесселя и возвращаясь к искомой функции $\delta f(\varepsilon_x)$, получаем в области $\eta < \eta_0$,

$$\delta f(\varepsilon_x) = C\exp(\mu(\eta + 1))\Big[\exp\left(-u_\perp^2/d_1\right)\hat{K}_2\varphi_M/\zeta_1$$
$$+ \sum_{n=1} C^n \exp\left(-u_\perp^2/d_n\right)\hat{K}^n\hat{K}_2\varphi_M/\zeta_n\Big], \qquad (10)$$

где $\zeta_n = 1 + a^2n(4 - X)/2\varepsilon_0$ $(n > 0)$, $d_n = \left(1 + Xa^2n \times (4 - X)/8\varepsilon_0\right)/\zeta_n$.

Зная $F(\xi = 0, \eta)$ в области $[0, \eta_0]$, можно восстановить по общей формуле теории теплопроводности с пропагатором G $F(\xi = 2, \varepsilon_x > \varepsilon_0)$ определяющую ток через барьер φ_2 и отсюда δf. Нетрудно показать, что $\delta f(\varepsilon_x > \varepsilon_0)$ определяется тем же выражением (10).

Построенное в виде ряда решение быстро сходится даже при $h/l_e \sim 0.01$, что соответствует чрезвычайно слабоионизованной плазме (реально при столь редких кулоновских столкновениях необходимо учитывать, однако, столкновения с атомами). Роль малого параметра играет при этом величина C.

На рис. 2 дано изменение $\delta f(\xi = 0, \varepsilon_x = \eta + 1)$ при $u_\perp = 0$ для нескольких значений параметра h/l_e. Видно, что $\delta f(\varepsilon_x)$ меняется при $\varepsilon_x = \varepsilon_0$ гладко и непрерывно, так же как и функция $f(u_x)$ при $u_x = -u_0$. При $u_x = u_0$ функция f испытывает в плоскости $\xi = 0$ скачок, так как $f(u_x = u_0 + 0) = 0$, а $f(u_x = u_0 - 0) = f(u_x = -u_0 + 0) \neq 0$ (рис. 1, *b*) и определяет выносимый на анод электронный ток. Заметим, что максимум функции δf несколько смещен левее точки ε_0. По мере уменьшения h/l_e максимум смещается вправо, полуширина кривой несколько уменьшается, однако степень локализации решения около точки $\varepsilon_x = \varepsilon_0$ даже при $h/l_e \sim 0.1$ оставляет, к сожалению, желать лучшего.

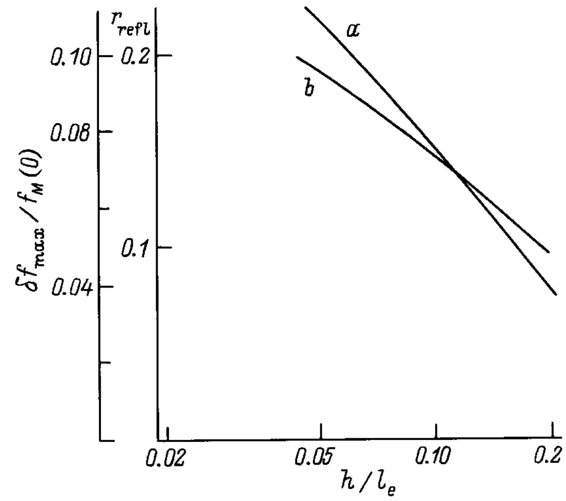

Рис. 3. Зависимость максимума функции δf от h/l_e при $u_\perp = 0$, $\varepsilon_0 = \varphi_2/T = 4$ (*a*) и аналогичная зависимость коэффициента отражения (*b*).

Тем не менее представленное решение дает качественную оценку коэффициента отражения, равного, как следует из данного определения,

$$k_{\text{refl}} = \int\limits_{u_0}^{\infty} du_x u_x \int\limits_{0}^{\infty} \delta f(u_x, u_\perp) u_\perp du_\perp \Big/ \int\limits_{u_0}^{\infty} du_x u_x$$

$$\times \int\limits_{0}^{\infty} f_M(u_x, u_\perp) u_\perp du_\perp.$$

Зависимость k_{refl} от параметра h/l_e показана на рис. 3 вместе с зависимостью максимума функции δf в точке $u_\perp = 0$. Видно, что кривые качественно соответствуют одна другой.

Основным результатом является то, что даже при весьма большом отношении $l_e/h \sim 10$ коэффициент отражения остается малым и не превышает 20%, что позволяет при построении расчета параметров плазмы в зазоре использовать простейшее выражение для выносимого тока тепловых электронов в широком диапазоне параметров плазмы.

Автор благодарен Л.Д. Цендину, указавшему на необходимость рассмотрения данной задачи, за плодотворные обсуждения.

Список литературы

[1] *Бакшт Ф.Г., Дюжев Г.А., Костин А.А.* и др. // ЖТФ. 1977. Т. 47. Вып. 2. С. 263–273.

[2] *Murray S., El-Genk M., Wernsman B., Kaibyshev V.* // J. Appl. Phys. 1993. Vol. 74. N 1. P. 68–75.

[3] *Бакшт Ф.Г., Каплан В.Б., Костин А.А.* и др. // ЖТФ. 1978. Т. 48. С. 2273–2294.

[4] *Бакшт Ф.Г., Дюжев Г.А., Марциновский А.М.* и др. Термоэмиссионные преобразователи и низкотемпературная плазма. М.: Энергоатомиздат, 1973. 324 с.

[5] *Алексеев Н.И., Каплан В.Б., Марциновский А.М.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 9. С. 70–83.

[6] *Бакшт Ф.Г., Костин А.А.* // ЖТФ. 1984. Т. 44. Вып. 1. С. 1–12.

[7] *Бакшт Ф.Г., Костин А.А., Марциновский А.М., Юрьев В.Г.* // Письма в ЖТФ. 1979. Т. 5. С. 905–910.

[8] *Бакшт Ф.Г., Мойжес Б.Я., Немчинский В.А.* // ЖТФ. 1967. Т. 37. Вып. 4. С. 729–739.