Журнал технической физики, 1998, том 68, № 5

01

К решению плоских задач теории упругости о действии сил Лоренца на проводники с однородным током

© Е.А. Девяткин

Институт проблем механики РАН,
117526 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 12 сентября 1997 г.)

Показано, что при решении первой основной задачи линейной теории упругости о действии сил Лоренца на длинный проводник с однородным продольным током при неизвестном априори распределении магнитного поля задача может быть сведена к решению однородных уравнений.

При расчете напряженного состояния проводников, обусловленного действием на них сил Лоренца, определяют магнитное поле в области, занимаемой токами (если оно неизвестно), и пространственное распределение объемных сил. Стандартный метод решения первой основной задачи линейной теории упругости состоит в нахождении частного решения неоднородных уравнений и сведении их к однородным. Определение частного решения в общем случае сложной формы проводика и/или сложного распределения внешнего поля может показаться непростой, если неразрешимой задачей. Однако для плоской задачи о действии сил Лоренца на длинный проводник произвольного сечения с протекающим вдоль него однородным током, используя тензор натяжений Максвелла, можно найти частное решение неоднородных уравнений, не вычисляя поля. Ниже показан способ нахождения такого решения.

Рассмотрим длинный неферромагнитный линейно-упругий изотропный однородный проводник с продольным однородно распределенным по его сечению током плотностью $\mathbf{j}$, находящийся в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$. Пусть ось $0z$ прямоугольной декартовой системы координат xyz направлена параллельно образующим поверхности проводника, его поперечное сечение представляет собой односвязную область с границей Γ и внешнее магнитное поле $\mathbf{B}_a$, как и поле токов проводника $\mathbf{B}_j$, не зависит от координаты z, т.е. $\mathbf{B}_a = \mathbf{B}_a(x, y)$ и $\mathbf{B}_j = \mathbf{B}_j(x, y)$. Следовательно, действующая на проводник сила Лоренца $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_j$) также не зависит от z. Будем считать, что проводник находится в состоянии плоской деформации и к его боковой поверхности приложена внешняя нагрузка $\mathbf{P}$, уравновешивающая действие объемных сил $\mathbf{f}$ (если они не самоуравновешены).

Уравнения равновесия, совместности и граничные условия в рассматриваемом случае имеют вид [1]

$$\sigma_{ij,j} = f_j = 0, \quad \Delta\sigma_{jj} = -\frac{1}{1-\nu}\operatorname{div}\mathbf{f}, \quad (i, j = x, y), \quad (1)$$

$$P_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{при} \quad x, y \in \Gamma. \quad (2)$$

Здесь по повторяющимся индексам производится суммирование, Δ — лапласиан, ν — коэффициент Пуассона, n_j — компоненты единичного вектора $\mathbf{n}$ внешней нормали к поверхности проводника. Запятая в выражении $\sigma_{ij,j}$ означает дифференцирование по следующей за ней координате. При плоской деформации $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$.

Тензор натяжений Максвелла S_{ij} для неферромагнитной среды можно записать в виде [2]

$$S_{ij} = \mu_0^{-1}\left(B_i B_j - \delta_{ij}\frac{B^2}{2}\right), \quad (3)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, μ_0 — магнитная постоянная.

Тензор S_{ij} удовлетворяет уравнениям равновесия ($S_{ij,j} = f_i$) и в общем случае не удовлетворяет уравнению совместности, так как, вообще говоря, $\operatorname{div}\mathbf{f} \neq 0$. Используя уравнение Максвелла для неферромагнитных проводников $\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0 j$, получаем $\operatorname{div}\mathbf{f} = \mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{j} - \mu_0 j^2$. Если $j = \mathrm{const}$, то $\operatorname{div}\mathbf{f} = -\mu_0 j^2$. Будем искать решение уравнений (1) в виде $\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} - S_{ij}$. В уравнении совместности $\sigma_{jj} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \tilde{\sigma}_{xx} - S_{xx} + \tilde{\sigma}_{yy} - S_{yy} = \tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{yy}$, так как[1] $S_{xx} = -S_{yy} = (B_x^2 - B_y^2)/(2\mu_0)$. Тогда для напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}$ из (1) имеем уравнения равновесия без объемных сил и уравнение совместности с постоянной правой частью

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} = 0, \quad \Delta\tilde{\sigma}_{jj} = \frac{\mu_0 j^2}{1-\nu}. \quad (4)$$

Граничные условия (2) примут вид

$$P_i + S_{ij} n_j = \tilde{\sigma}_{ij} n_j \quad \text{при} \quad x, y \in \Gamma. \quad (5)$$

Для продольных напряжений имеем $\tilde{\sigma}_{zz} = \nu(\tilde{\sigma}_{xx} + (\tilde{\sigma}_{yy})$.

Если для задачи (4), (5) ввести функцию напряжений Эри φ, связанную с компонентами напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}$ зависимостями $\tilde{\sigma}_{xx} = \varphi_{,yy}$, $\tilde{\sigma}_{yy} = \varphi_{,xx}$, $\tilde{\sigma}_{xy} = -\varphi_{,xy}$, то уравнения равновесия будут удовлетворены, а из уравнения совместности получим следующее неоднородное уравнение с постоянной правой частью:

$$\Delta\Delta\varphi = \frac{\mu_0 j^2}{1-\nu}. \quad (6)$$

Решения уравнения (6) хорошо изучены при рассмотрении задач статического прогиба пластинок (см., например, [3] и цитированную там литературу), где правая

[1] Без ограничения общности считаем, что продольной составляющей магнитного поля нет ($B_{az} = 0$).

его часть представляет собой распределение плотности внешней силы, действующей на пластину. Взяв какое-нибудь частное решение $\varphi^{(0)}$ уравнения (6), которому соответствуют напряжения $\tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}$ и, представляя решение исходной задачи (1), (2) в виде $\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)} - S_{ij}$, для напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}$ имеем уравнения равновесия и совместности без объемных сил (т.е. их функция напряжений является бигармонической) и условия на границе в виде

$$P_i + (S_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)})n_j = \tilde{\sigma}_{ij}n_i \quad \text{при} \quad x, y \in \Gamma. \tag{7}$$

Таким образом, исходную неоднородную задачу для любого удовлетворяющего уравнениям Максвелла для неферромагнитных проводников распределения магнитного поля можно свести к случаю отсутствия объемных сил. При $B_a \gg B_j$ можно считать, что $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}_a$. Следовательно, $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ (так как внутри проводника $j = \text{const}$, $\operatorname{rot} \mathbf{B}_a = 0$) и тензор $-S_{ij}$ в этом случае является решением уравнений (1). При известном внешнем поле для определения напряжений в точке проводника, в которой $\mathbf{B}_j = 0$, не требуется вычислять поле $\mathbf{B}_j$ во всей области проводника, а достаточно знать его на границе.

Если потребовать обращения в нуль на границе Γ нормальных и касательных к ней компонент тензора $\tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}$, то вид граничных условий (7) упростится. В качестве такого частного решения уравнения (6) для проводника радиуса R можно взять функцию $\varphi^{(0)} = \mu_0 j^2(r^2 - R^2)^2/[64(1-\nu)]$ $(r^2 = x^2 + y^2)$ [1,4], используемую в задаче поперечного изгиба круглой, защемленной по краю пластины под действием равномерно распределенной на ней нагрузки. Соответствующие ей компоненты напряжений в полярной системе координат равны $\tilde{\sigma}_{rr}^{(0)} = \mu_0 j^2(r^2 - R^2)/[16(1-\nu)]$, $\tilde{\sigma}_{\Theta\Theta}^{(0)} = \mu_0 j^2(3r^2 - R^2)/[16(1-\nu)]$, $\tilde{\sigma}_{r\Theta}^{(0)} = 0$. На границе имеем $\tilde{\sigma}_{rr}^{(0)}(R) = 0$, $\tilde{\sigma}_{r\Theta}^{(0)} \equiv 0$ и граничные условия примут вид $\tilde{\sigma}_{rr}(R) = P_r(R) + S_{rr}(R)$, $\tilde{\sigma}_{r\Theta}(R) = P_\Theta(R) + S_{r\Theta}(R)$. Используя это решение, можно легко получить напряжения в круглом проводе при взаимодействии протекающего вдоль него тока со своим собственным магнитным полем ($\mathbf{P} = 0$, $\mathbf{B}_a = 0$). Поле тока имеет лишь круговую составляющую и в проводнике равно $B_j = \mu_0 jr/2$. Решение задачи записываем в виде $\sigma_{rr} = \tilde{\sigma}_{rr} + \tilde{\sigma}_{rr}^{(0)} - S_{rr}$, $\sigma_{\Theta\Theta} = \tilde{\sigma}_{\Theta\Theta} + \tilde{\sigma}_{\Theta\Theta}^{(0)} - S_{\Theta\Theta}$, $\sigma_{r\Theta} = \tilde{\sigma}_{r\Theta} - S_{r\Theta}$. Диагональные элементы тензора натяжений Максвелла по величине равны плотности энергии магнитного поля $W = -S_{rr} = S_{\Theta\Theta} = B_j^2/(2\mu_0)$ и $S_{r\Theta} = 0$. Решение $\tilde{\sigma}_{ij}$ (здесь $i, j = r, \Theta$) должно удовлетворять уравнениям равновесия и совместности без объемных сил и граничным условиям с равномерно распределенным давлением $\tilde{\sigma}_{rr}(R) = S_{rr}(R) = W(R)$, $\tilde{\sigma}_{r\Theta}(R) = 0$. Таким решением является $\tilde{\sigma}_{rr}(R) = \tilde{\sigma}_{\Theta\Theta} = -W(R)$, $\tilde{\sigma}_{r\Theta} = 0$ [1,4], т.е. имеем постоянное всестороннее давление ("гидростатическое" решение). Окончательно получаем $\sigma_{rr} = \mu_0 j^2(3 - 2\nu)(R^2 - r^2)/[16(1-\nu)]$, $\sigma_{\Theta\Theta} = -\mu_0 j^2[(3 - 2\nu)R^2 - (1 + 2\nu)r^2]/[16(1-\nu)]$, $\sigma_{r\Theta} = 0$, что совпадает с решением, полученным в [5].

Рассмотренный пример аналогичен известной задаче о вращающемся цилиндре, в которой инерционный член также линейно зависит от r (см., например, [4]).

Результаты работы могут быть использованы при решении плоских задач теории упругости численными методами и решении обратных задач.

Список литературы

[1] *Амензаде Ю.А.* Теория упругости. М.: Высшая школа, 1976. 272 с.
[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1982. 620 с.
[3] *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: ГИФМЛ, 1962. 708 с.
[4] *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
[5] *Кузнецов А.А.* // ЖТФ. 1960. Т. 30. Вып. 5. С. 589–592.