01

Мультипольные решения волнового уравнения

© В.В. Зашквара, Н.Н. Тындык

Физико-технический институт АН Казахстана,
480082 Алма-Ата, Казахстан

(Поступило в Редакцию 22 марта 1996 г.)

Метод разделения оператора, предложенный в работе [1], применен к решению волнового уравнения. В цилиндрической системе координат получены решения, описывающие эволюцию полей со структурой круговых мультиполей.

В работах [1–3] предложен и обоснован новый подход к решению уравнения Лапласа методом разделения переменных, состоящий в построении решения в виде суммы парных произведений функций одного переменного, которые удовлетворяют цепочкам обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и нулевым граничным условиям на окружности. Дифференциальные операторы этих уравнений являются разделенными по координатам частями лапласиана. С помощью метода разделения оператора получен класс круговых мультиполей в цилиндрической и сферической системах координат [4].

В работе [5] новый подход применен к решению уравнения Пуассона. Показано, что если правая часть уравнения Пуассона в цилиндрической системе безразмерных координат $R = r/r_0$, $\xi = z/r_0$ (r_0 — радиус осевой окружности) представлена функцией

$$\mathcal{F}(R,\xi) = \xi^N \omega(R), \tag{1}$$

где N — целое число, $\omega(R)$ — некоторая гладкая функция от R, то решением уравнения Пуассона является сумма

$$V_n(R,\xi) = \sum_{m=0}^{n} \varphi_m(\xi)\cdot F_{n-m}(R). \tag{2}$$

В этой сумме $n = N/2$, если N четно, и $n = (N-1)/2$, если N нечетно. Множество радиальных функций $F_i(R)$ удовлетворяет цепочке из n дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &TF_0 = N!\omega(R),\\ &TF_1 = -F_0,\\ &\dots\dots\dots,\\ &TF_n = -F_{n-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$T = \frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left[R\frac{d}{dR}\right]$$

— дифференциальный оператор второго порядка, являющийся радиальной частью оператора Лапласа.

Множество аксиальных функций $\varphi_i(\xi)$ суть

$$\varphi_n(\xi) = \frac{1}{(2n)!}\xi^{2n},$$

$$n = 0,1,2,\dots,N/2, \ \text{если } N \text{ четно},$$

$$\varphi_n(\xi) = \frac{1}{(2n+1)!}\xi^{2n+1},$$

$$n = 0,1,2,\dots,(N-1)/2, \ \text{если } N \text{ нечетно}. \tag{4}$$

Функции $F_i(R)$ и $\varphi_i(\xi)$ и их производные в точке $R = 1$, $\xi = 0$ удовлетворяют граничным условиям

$$F_i(1) = \frac{dF_i}{dR}\Big|_{R=1} = 0, \quad i = 0,1,2,\dots,$$

$$\varphi_i(0) = \frac{d\varphi_i}{d\xi}\Big|_{\xi=0} = 0, \quad i = 1,2,\dots. \tag{5}$$

В работе [5] установлено, что для различных значений n решения уравнения Пуассона $V_n(R,\xi)$ имеют структуру видоизмененных круговых мультиполей, которые были названы нелапласовыми. Условимся о том, что в дальнейшем $f_i(R)$ и $F_i(R)$ будут обозначать радиальные функции лапласовых и соответственно нелапласовых круговых мультиполей.

Цель настоящей работы — применить метод разделения оператора к решению в цилиндрической системе координат волнового уравнения, в рамках мультипольного подхода получить частные решения и установить характер протекания временны́х процессов, описываемых этими решениями.

Волновое уравнение в безразмерных цилиндрических координатах R, ξ и безразмерной временно́й $t = ct_1/r_0$ (t_1 — размерное время, c — скорость распространения возмущения в однородной среде) имеет вид

$$(\Delta - \chi)U(R,\xi,t) = 0, \tag{6}$$

где Δ — оператор Лапласа, $\chi = \partial^2/(\partial t^2)$ — временно́й оператор.

Согласно методу разделения оператора [1,2], решением уравнения (6) будет сумма из парных произведений координатных и временны́х функций $\nu_i(R,\xi)$, $\Phi_i(t)$

$$U_n(R,\xi,t) = \sum_{s=0}^{n} \nu_s(R,\xi)\cdot\Phi_{n-s}(t), \tag{7}$$

если эти функции удовлетворяют цепочкам уравнений

$$\begin{aligned}
&\Delta\nu_0 = 0,\\
&\Delta\nu_1 = \nu_0,\\
&\Delta\nu_2 = \nu_1,\\
&\dots\dots\dots,\\
&\Delta\nu_n = \nu_{n-1},
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&\chi\Phi_0 = 0,\\
&\chi\Phi_1 = \Phi_0,\\
&\chi\Phi_2 = \Phi_1,\\
&\dots\dots\dots,\\
&\chi\Phi_n = \Phi_{n-1}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Действительно, воздействуя оператором $[\Delta - \chi]$ на сумму (7), получаем

$$\begin{aligned}
(\Delta - \chi)\sum_{s=0}^{n} \nu_s(R,\xi)\Phi_{n-s}(t)
&= \sum_{s=0}^{n} (\Delta\nu_s)\Phi_{n-s} - \sum_{s=0}^{n}\nu_s(\chi\Phi_{n-s})\\
&= \sum_{s=1}^{n}\nu_{s-1}\Phi_{n-s} - \sum_{s=0}^{n-1}\nu_s\Phi_{n-s-1}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Сместим индекс суммирования в первой сумме на единицу $s-1=k$, $\nu_{s-1}=\nu_k$, $\Phi_{n-s}=\Phi_{n-k-1}$, тогда получим

$$\sum_{s=1}^{n}\nu_{s-1}\Phi_{n-s} = \sum_{k=0}^{n-1}\nu_k\Phi_{n-k-1}.$$

Таким образом, суммы в (10) равны и уравнение (6) удовлетворяется. Решением системы уравнений (9) являются функции

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{(2n)!}t^{2n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{11}$$

если $\Phi_0(0) = 1$, $\Phi_n(0) = 0$, $(n \neq 0)$; $\partial\Phi_n/\partial t|_{t=0} = 0$. Или функции

$$\Phi_n = \frac{1}{(2n+1)!}t^{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{12}$$

если $\Phi_n(0) = 0$; $\partial\Phi_0/\partial t|_{t=0} = 1$, $\partial\Phi_n/\partial t|_{t=0} = 0$ $(n \neq 0)$.

Согласно (8), для нахождения координатных функций $\nu_i(R,\xi)$ следует решить цепочку уравнений в частных производных, состоящую из уравнения Лапласа для функций ν_0 и уравнений Пуассона для остальных функций ν_i. Прежде чем приступить к выполнению этой задачи, мы дополним результаты работы [5] и найдем решение уравнения Пуассона в случае, если правая часть этого уравнения является полиномом по ξ с произвольными коэффициентами, зависящими от R. Пусть это будет четный полином степени $2N$

$$\mathcal{F}(R,\xi) = \sum_{n=0}^{N}\omega^{(n)}(R)\xi^{2n}, \tag{13}$$

тогда решением уравнения Пуассона будет сумма

$$V(R,\xi) = \sum_{n=0}^{N} V^{(n)}(R,\xi). \tag{14}$$

В соответствии с (2)

$$V^{(n)}(R,\xi) = \sum_{m=0}^{n}\varphi_m F_{n-m}^{(n)}. \tag{15}$$

Подставим (15) в (14) и, выполнив преобразования, придем к решению в форме, облегчающей дальнейшее рассмотрение нашей задачи,

$$\begin{aligned}
V(R,\xi) &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\varphi_m F_{n-m}^{(n)}\\
&= \sum_{m=0}^{N}\varphi_m\sum_{n=m}^{N}F_{n-m}^{(n)} = \sum_{m=0}^{N}\varphi_m\sum_{s=0}^{N-m}F_s^{(m+s)}.
\end{aligned} \tag{16}$$

К формуле (16) приводят две последовательно проводимые операции: изменение порядка суммирования по m и n, затем замена суммирования по n суммированием по $s = n - m$. Радиальные функции $F_s^{(m)}$ составляют треугольную матрицу

$$\begin{array}{cccccccc}
s\to & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & . \quad N\\
m\downarrow & & & & & & & \\
0 & F_0^{(0)}, & & & & & & \\
1 & F_0^{(1)} & F_1^{(1)}, & & & & & \\
2 & F_0^{(2)} & F_1^{(2)} & F_2^{(2)}, & & & & \\
3 & F_0^{(3)} & F_1^{(3)} & F_2^{(3)} & F_3^{(3)}, & & & \\
4 & F_0^{(4)} & F_1^{(4)} & F_2^{(4)} & F_3^{(4)} & F_4^{(4)}, & & \\
5 & F_0^{(5)} & F_1^{(5)} & F_2^{(5)} & F_3^{(5)} & F_4^{(5)} & F_5^{(5)}, & \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .., & \\
N & F_0^{(N)} & F_1^{(N)} & F_2^{(N)} & F_3^{(N)} & .. & .. & F_N^{(N)}.
\end{array}$$

В строках матрицы ($m = \text{const}$) расположены функции $F_g^{(m)}$, совокупность которых формирует решения (15), соответствующие отдельным слагаемым полинома (13). Решение уравнения Пуассона с правой частью в виде полинома (13), согласно (16), построено из парных произведений φ_m на суммы функций F_s^{m+s}. Эти функции находятся на диагоналях матрицы, заданием значения m определяется вершина диагонали, вдоль которой индекс s изменяется в интервале $0, 1, 2, \dots, N - m$. Набор функций, формирующих диагональ, есть

$$F_0^{(m)},\ F_1^{(m+1)},\ F_2^{(m+2)},\ \dots\ F_{N-m}^{(N)}. \tag{17}$$

Оставаясь в границах мультипольного подхода, решим систему уравнений (8), выбрав в качестве $\nu_0(R,\xi)$ круговой мультиполь порядка $2N$, являющийся гармоническим полиномом по ξ [1,2]. Тогда

$$\omega^{(n)}(R) = \frac{1}{(2n)!} f_{N-n}(R), \quad n = 0, 1, \dots, N, \tag{18}$$

где f_{N-n} — радиальные функции первого или второго типа, рассмотренные в работе [4].

Покажем, что в этом случае функции $F_s^{(m+s)}$, расположенные на одной диагонали матрицы, равны и решение цепочки уравнений (8) легко находится. Будем воздействовать оператором T на функции (17), примем во внимание дифференциальные уравнения (3) для F_i, а также систему дифференциальных уравнений, которым подчиняются радиальные функции f_i [1,2]

$$T f_{i+1} = -f_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \tag{19}$$

Найдем, к примеру, $\nu_1(R,\xi)$. Согласно (3) и (18), $TF_0^{(m)} = \omega^{(m)}(R) = f_{N-m}$, в соответствии с (19) из этого соотношения получаем

$$F_0^{(m)} = -f_{N-m+1}. \tag{20}$$

Согласно (3) и (20), $TF_1^{(m+1)} = -F_0^{(m+1)} = f_{N-m}$, и на основании (19) имеем

$$F_1^{(m+1)} = -f_{N-m+1}. \tag{21}$$

Согласно (3) и (21), $TF_2^{(m+2)} = -F_1^{(m+2)} = f_{N-m}$, на основании (19) имеем

$$F_2^{(m+2)} = -f_{N-m+1} \tag{22}$$

и т. д. Действительно, все диагональные элементы $F_s^{(m+s)}$ равны и составляют $-f_{N-m+1}$, число их $N-m+1$. Возвращаясь к формуле (16), заключаем: если правая часть уравнения Пуассона представлена круговым мультиполем $\nu_0(R,\xi)$ порядка $2N$, то решение этого уравнения $\nu_1(R,\xi)$ является полиномом того же порядка по ξ и имеет вид

$$\nu_1(R,\xi) = -\sum_{m=0}^{N}(N-m+1)\varphi_m(\xi) f_{N-m+1}(R). \tag{23}$$

Обобщая (23), можно убедиться в том, что решением произвольного звена цепочки дифференциальных уравнений (8) $\Delta\nu_s = \nu_{s-1}$ является функция

$$\nu_s(R,\xi) = \frac{(-1)^s}{s!}\sum_{m=0}^{N}\frac{(N-m+s)!}{(N-m)!} \times \varphi_m(\xi) f_{N-m+s}(R). \tag{24}$$

Подставив (24) в (7), запишем решение волнового уравнения (6) в следующем виде:

$$U_n(R,\xi,t) = \sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{s!}\Phi_{n-s}(t) \times \sum_{m=0}^{N}\frac{(N-m+s)!}{(N-m)!}\varphi_m(\xi) f_{N-m+s}(R). \tag{25}$$

Пространственно-временну́ю структуру решения (7) или (25) вблизи осевой окружности $R=1$, $\xi=0$ задают главные части функций (24). Для нахождения их следует выделить главные части входящих в (24) радиальных функций f_i. Оказалось, что как следствие цепочечной структуры системы дифференциальных уравнений [1,2], которым удовлетворяют f_i при нулевых граничных условиях, выполняется предельное соотношение

$$f_{i+1}/f_i \sim \rho^2 \ \text{ при } \ \rho \to 0 \ \ (\rho = R-1). \tag{26}$$

Из этого соотношения следует, что главные части f_i равны

$$f_i \quad (-1)^i \rho^{2i+1}$$

для радиальных функций первого типа,

$$f_i \quad (-1)^i \rho^{2i}$$

для радиальных функций второго типа,

$$i = 0, 1, \dots\ . \tag{27}$$

Ограничимся радиальными функциями второго типа. Тогда главные части $\nu_s(R,\xi)$ (24) представимы формулой

$$\nu_s^*(R,\xi) \sim \frac{1}{s!}\rho^{2s}\sum_{m=0}^{N}(-1)^{N-m} \times \frac{(N-m+s)!}{(N-m)!(2m)!}\left[\xi^m\rho^{N-m}\right]^2. \tag{28}$$

Характерным здесь является то, что сумма есть однородный полином по ρ и ξ степени $2N$, содержащий знакопеременные коэффициенты. Сам по себе этот полином описывает мультипольную структуру с узловой точкой $R=1$, $\xi=0$, в которой сходятся $2N$ нулевых эквипотенциальных линий. Множитель ρ^{2s} перед суммой вносит в структуру поля дополнительную нулевую эквипотенциаль, совпадающую с осью ξ, которая разделяет однопотенциальную область еще на две симметричные части, тем самым увеличивая порядок мультипольности на две единицы. В работе [5] подобные структуры были названы неполными нелапласовыми круговыми мультиполями. Выясним также пространственно-временну́ю структуру поля (25) в сечении плоскостью $\xi=0$ вблизи $R=1$. В соответствии с (4) для четных функций $\varphi_n(\xi)$ имеем

$$\varphi_m(0) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m = 0, \\ 0, & \text{если} \quad m = 1, 2, \dots\ . \end{cases} \tag{29}$$

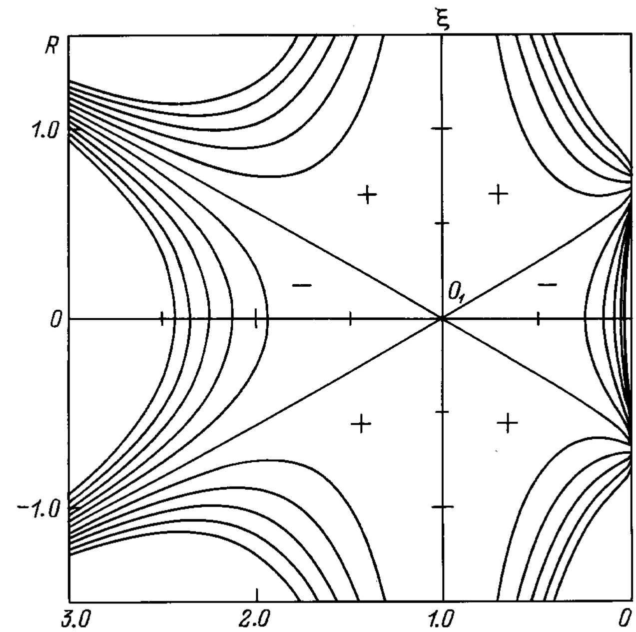

Рис. 1.

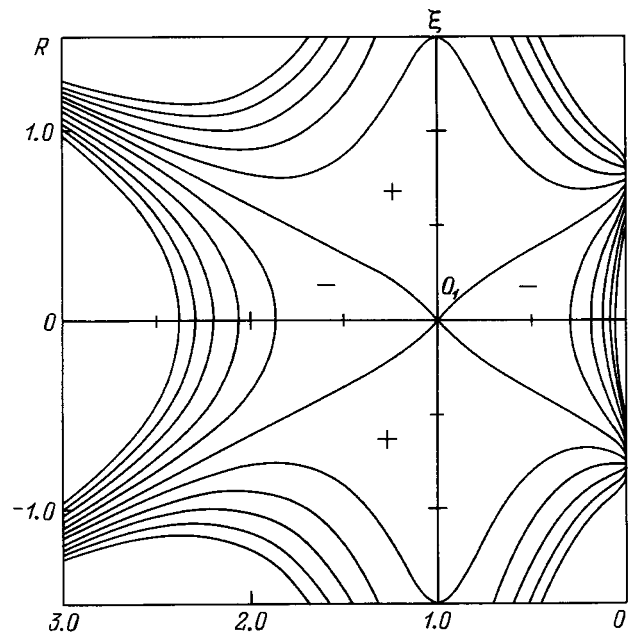

Рис. 2.

По формуле (25) получаем

$$U_n(R,0,t) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s f_s(R)\Phi_{n-s}(t). \qquad (30)$$

В выборе $\Phi_n(t)$, к примеру, остановимся на четных функциях, тогда

$$\Phi_{n-s}(t) = \frac{1}{[2(n-s)]!} t^{2(n-s)}. \qquad (31)$$

Подставим (27) и (31) в (30), придем к следующему выражению для оценки пространственно-временно́й структуры поля в сечении $\xi = 0$

$$U_n(R,0,t) = \sum_{s}^{n} \frac{1}{[2(n-s)]!} \rho^{2s} t^{2(n-s)}. \qquad (32)$$

Из формулы (32) следует, что $U_n(R,0,t)$ является однородным полиномом по R и t степени $2n$ с коэффициентами одного знака. Вблизи точки $R = 1$, $t = 0$ эквипотенциали волнового поля $U_n(R,0,t)$ представляют собой систему замкнутых кривых, охватывающих эту точку. Поле $U_n(R,0,t)$ не является мультипольным, но если сделать замену $t = i\tau$ и перейти в (32) к мнимому времени τ, то в координатах R, τ поле переходит в круговой мультиполь с узловой точкой $R = 1$, $\xi = 0$, $\tau = 0$.

Таким образом, пространственно-волновую структуру волнового поля (7) во всем пространстве определяет временно́й полином, коэффициентами которого $\nu_s(R,\xi)$ являются круговые мультиполи. В начале процесса ($t = 0$) структура волнового поля $U_n(R,\xi,t)$ будет представлена нелапласовым круговым мультиполем $\nu_n(R,\xi)$ ($n \neq 0$), при $t \to \infty$ — лапласовым круговым мультиполем $\nu_0(R,\xi)$.

В качестве примера рассмотрим структуру мультипольного решения волнового уравнения (7) для случая $N = 1$.

Лапласов круговой мультиполь суть

$$\nu_0(R,\xi) = f_1\varphi_0 + f_0\varphi_1. \qquad (33)$$

Согласно (24), нелапласовые круговые мультиполи рассчитываем по формуле

$$\nu_s(R,\xi) = \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{m=0}^{1} \frac{(s+1-m)!}{(1-m)!} \varphi_m(\xi) f_{s+1-m}(R); \qquad (34)$$

$$s = 1, \quad \nu_1 = -[2\varphi_0 f_2 + \varphi_1 f_1],$$
$$s = 2, \quad \nu_2 = 3\varphi_0 f_3 + \varphi_1 f_2,$$
$$s = 3, \quad \nu_3 = -[4\varphi_0 f_4 + \varphi_1 f_3] \qquad (35)$$

и т.д. По формуле (7) для четных функций $\Phi_n(t)$ имеем

$$n = 0, \quad U_0(r,\xi,t) = \nu_0\Phi_0 = f_1\varphi_0 + f_0\varphi_1, \qquad (36)$$

$$n = 1, \quad U_1(R,\xi,t) = \sum_{s=0}^{1} \nu_s \Phi_{1-s}$$
$$= \frac{1}{2!}(f_1\varphi_0 + f_0\varphi_1)t^2 - [2\varphi_0 f_2 + \varphi_1 f_1], \qquad (37)$$

$$n = 2, \quad U_2(R,\xi,t) = \sum_{s=0}^{2} \nu_s \Phi_{2-s} = \frac{1}{4!}(f_1\varphi_0 + f_0\varphi_1)t^4$$
$$- \frac{1}{2!}[2\varphi_0 f_2 + \varphi_1 f_1]t^2 + 3\varphi_0 f_3 + \varphi_1 f_2 \qquad (38)$$

и т.д.

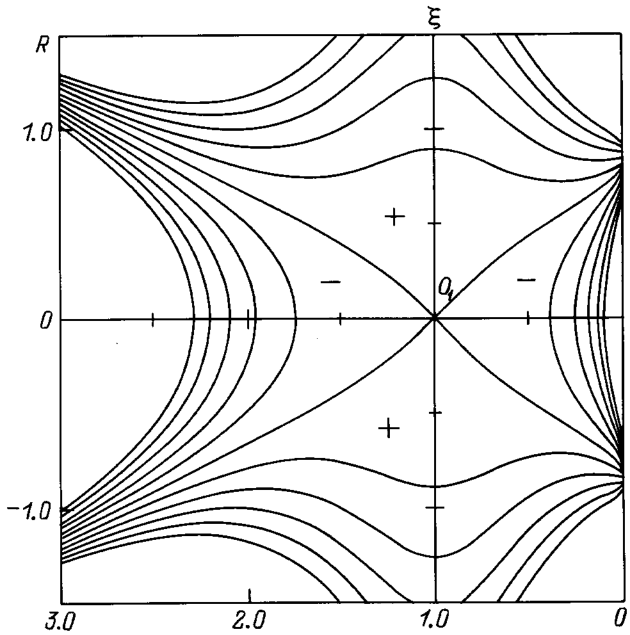

Рис. 3.

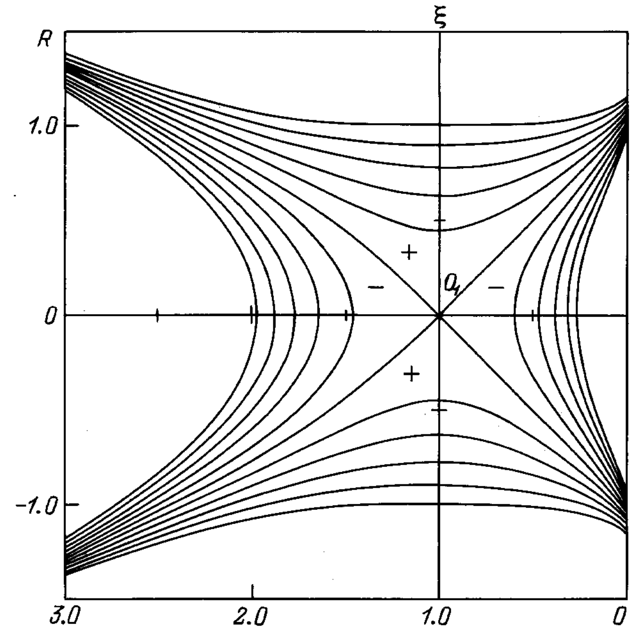

Рис. 5.

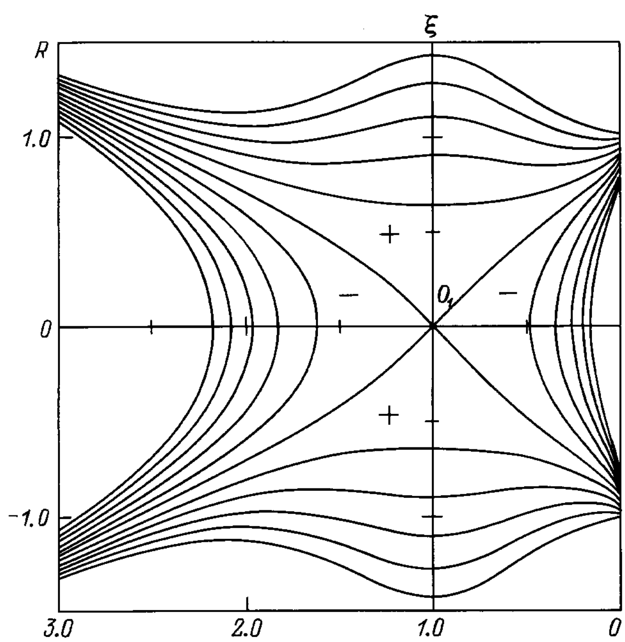

Рис. 4.

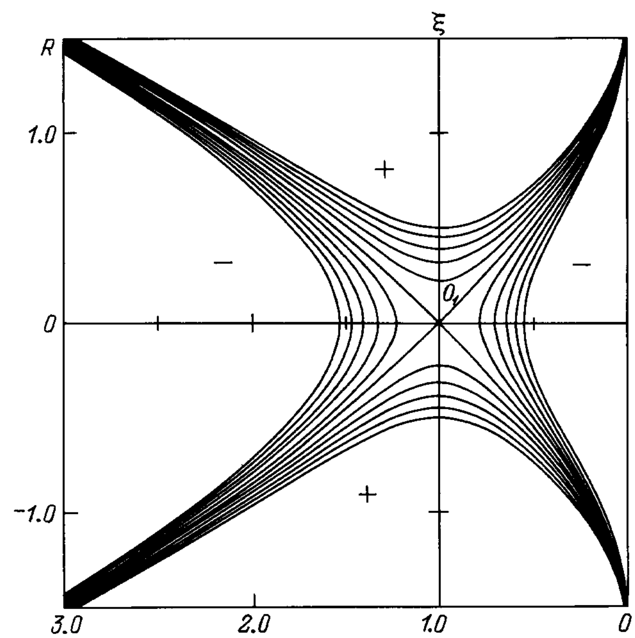

Рис. 6.

Для расчета U_1 в качестве $f_i(R)$ были выбраны радиальные функции второго типа [4], в качестве $\varphi_i(\xi)$ — четные по ξ функции [4]

$$f_0(R) = 1, \quad f_1(R) = \frac{1}{4}[2\ln R + 1 - R^2],$$

$$f_2(R) = \frac{1}{64}\left[-(4 + 8R^2)\ln R - 5 + 4R^2 + R^4\right]. \quad (39)$$

$$\varphi_0(\xi) = 1, \quad \varphi_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2. \quad (40)$$

Тогда, согласно (37),

$$U_1(R, \xi, t) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(2\ln R + 1 - R^2) + \xi^2\right] t^2$$

$$- \frac{1}{32}\left[-(4 + 8R^2)\ln 5 + 4R^2 + R^4\right]$$

$$- \frac{1}{8}\xi^2\left[2\ln R + 1 - R^2\right]. \quad (41)$$

Результаты расчетов $U_1(R,\xi,t)$ по формуле (41) представлены на рис. 1–6, которые фиксируют отдельные моменты развития пространственно-временнóго процесса, описываемого волновым мультиполем $U_1(R,\xi,t)$: $t = 0, 0.3, 0.5, 0.7, 1.2$ соответственно. При $t = 0$ волновой мультиполь является неполным нелапласовым круговым секступолем (рис. 1). Уже при малых t вклад квадруполя $\frac{1}{2}(2\ln R+1-R^2)+\xi^2$ устраняет нулевую эквипотенциаль $R = 1$ и разрушает нелапласов секступоль. Из этих рисунков видно, что с ходом времени развитие этого процесса приводит к формированию структуры, близкой к круговому лапласовому квадруполю (рис. 5, 6).

В других рассмотренных нами случаях процесс протекает аналогичным образом. Из всего вышеизложенного можно заключить, что метод разделения оператора позволяет получить мультипольное решение волнового уравнения, которое описывает поле, эволюционирующее от более сложной структуры к простой.

Список литературы

[1] *Зашквара В.В., Тындык Н.Н.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 4. С. 148–157.
[2] *Zashkvara V.V., Tyndyk N.N.* // Nucl. Instr. and Meth. 1992. Vol. A313. P. 315–327.
[3] *Zashkvara V.V., Tyndyk N.N.* // Nucl. Instr. and Meth. 1992. Vol. A321. P. 339–446.
[4] *Zashkvara V.V.* // Nucl. Instr. and Meth. 1995. Vol. 354. P. 171–174.
[5] *Зашквара В.В., Тындык Н.Н.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 7. С. 154–166.