01;09

Термофорез касающихся твердых сфер вдоль линии их центров

© С.Н. Дьяконов, Ю.И. Яламов

Московский педагогический университет,
107005 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 3 февраля 1997 г.)

В гидродинамическом режиме со скольжением при малых числах Рейнольдса и Пекле построена теория установившегося движения агрегата двух твердых нелетучих низкотеплопроводных касающихся сферических частиц вдоль линии их центров в неоднородно нагретом вязком газе. В линейном по малым параметрам приближении определена скорость термофоретического переноса агрегата. В качестве малых параметров выбираются относительные отклонения коэффициентов удельной теплопроводности частиц агрегата от удельной теплопроводности внешней среды.

Введение

Известно, что изучение динамики частиц в неоднородной по температуре вязкой среде представляет интерес в связи с исследованиями термофоретического движения в физике аэродисперсных систем при рассмотрении взаимодействия горящих частиц, в механике и реологии суспензии, а также в ряде других задач. Наиболее подробно к настоящему времени изучены особенности термофоретического движения в вязких средах одиночных твердых и жидких аэрозольных частиц. Обобщающая библиография по этим вопросам приведена в монографии [1].

Изучение движения ансамбля частиц более важно, поскольку на достаточно близком удалении друг от друга частицы оказывают существенное влияние на процесс их взаимного движения. В аэрозольных системах на практике наибольшей вероятностью обладают сближения пар частиц. В силу этого представляет интерес изучение динамики таких пар.

Термофорез двух сферических аэрозольных частиц вдоль линии их центров исследовался в работах [2–5]. Точные аналитические решения для частиц, находящихся на произвольном расстоянии, но достаточно далеко друг от друга, были получены в бисферической системе координат на базе линеаризованных стационарных уравнений гидродинамики и теплопереноса. Численное сравнение этих решений с приближенными, которые получены методом отражений, обнаруживает ухудшение сходимости приближенных решений для близкорасположенных частиц. В предельном случае их касания точные аналитические решения пригодны только как оценки мгновенных скоростей установившегося движения частиц. Эти оценки сильно ограничены условиями применимости линейных стационарных уравнений медленного течения.

В данной работе в рамках гидродинамического анализа построена теория движения двух твердых нелетучих контактирующих сфер вдоль линии их центров в неоднородно нагретом вязком газе. Необходимость работы обусловлена тем, что предельная задача о двух сферах в случае их касания не может быть решена в рамках теорий, использующих бисферическую систему координат и подход Стимсона и Джеффри к гидродинамической проблеме [6]. Попытка аналитического решения этой задачи для линеаризованных стационарных уравнений гидродинамики и теплопереноса позволяет получить более надежные результаты для бóльших перепадов температуры, чем оценки, полученные ранее в предельном случае касания частиц.

Постановка задачи

Рассмотрим медленное движение агрегата двух твердых нелетучих низкотеплопроводных сферических касающихся частиц вдоль линии их центров в неоднородной по температуре вязкой газовой среде.

Задача определения скорости $\mathbf{U}_T$ термофореза агрегата решается в тангенциально-сферических координатах (ζ, η, φ), которые связаны с круговыми цилиндрическими координатами (γ, z, φ)

$$\gamma = \frac{2\zeta}{\zeta^2+\eta^2}, \quad z = \frac{2\eta}{\zeta^2+\eta^2}, \quad \varphi = \varphi. \qquad (1)$$

Начало цилиндрической системы координат жестко связано с точкой контакта частиц. Тогда в этой системе координат центр тяжести внешней среды перемещается относительно покоящегося агрегата с искомой скоростью $\mathbf{U} = -\mathbf{U}_T$.

На бесконечности от агрегата частиц в газе поддерживается постоянным градиент $\mathbf{A}_T = (\nabla T^{(e)})_\infty$ температуры. Здесь и в дальнейшем верхние индексы e и i характеризуют физические величины в областях вне и внутри агрегата соответственно, а индекс α внизу $(\alpha = 1, 2)$ относится к определенной частице.

Пусть ось $z = (r\cos\theta)$ проходит через центры касающихся сфер и направлена вдоль вектора $\mathbf{A}_T$. Неоднородное распределение температуры в окрестности частиц приводит к появлению направленного (термофоретического) движения агрегата (в силу теплового скольжения газа вдоль поверхностей твердых сфер).

Внешняя среда рассматривается как однокомпонентная, изотропная, несжимаемая, сплошная — число Кнудсена $\mathrm{Kn} = \lambda/R_0 \ll 1$ (где λ, $R_0 = R_1 + R_2$, $R_1 = \eta_1^{-1}$,

$R_2 = \eta_2^{-1}$ есть средняя длина свободного пробега молекул газа, единица измерения длины, радиусы кривизны поверхностей $\eta = \eta_1 > 0$, $\eta = -\eta_2 < 0$ частиц агрегата соответственно).

Предполагаем, что каждая из частиц образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом.

Термофорез агрегата происходит при малых числах Рейнольдса и Пекле $\mathrm{Re}^{(e)} = UR_0/\nu^{(e)} \ll 1$, $\mathrm{Re}_T^{(e)} = UR_0/\chi^{(e)} \ll 1$. Это позволяет опустить нелинейные (инерционный и конвективный) члены в уравнениях гидродинамики и теплопереноса. Действием внешных массовых сил пренебрегаем. Источники тепла вне и внутри частиц отсутствуют.

Относительные перепады температуры в условиях задачи малые и можно пренебрегать температурным изменением коэффициентов молекулярного переноса. Плотность, кинематическая вязкость, удельная теплопроводность считаются постоянными величинами ($\rho_0^{(e,i)}$, $\nu_0^{(e)}$, $\varkappa_0^{(e,i)}$) при невозмущенной температуре $T_0^{(e)}$ (температуре внешней среды в месте нахождения точки контакта частиц агрегата в его отсутствие). Однако имеющиеся перепады температуры достаточны, чтобы в сравнении с ними можно было не рассматривать в уравнении теплопереноса изменения температуры, обусловленные выделением тепла, связанным с диссипацией энергии путем внутреннего трения.

В силу малости времен тепловой и гидродинамической релаксации системы движения агрегата описываются в квазистационарном приближении (осесимметричное медленное движение газовой среды и распределение температуры вне и внутри частиц установившееся).

На бесконечности и поверхности частиц имеют место условия

$$r \to \infty: \qquad \mathbf{v}^{(e)} = U\mathbf{i}_z, \quad T^{(e)} = T_0^{(e)} + A_z z, \tag{2}$$

$$S_\alpha \quad (\alpha = 1, 2): \qquad (\mathbf{i}_\eta \mathbf{v}^{(e)}) = 0, \tag{3}$$

$$(\mathbf{i}_\zeta \mathbf{v}^{(e)}) = K_{TSL}^{(e)} \frac{\nu_0^{(e)}}{T_o^{(e)}} (\mathbf{i}_\zeta \nabla T^{(e)}), \tag{4}$$

$$T^{(e)} = T_\alpha^{(i)}, \tag{5}$$

$$\varkappa_0^{(e)} (\mathbf{i}_\eta \nabla T^{(e)}) = \varkappa_{0\alpha}^{(i)} (\mathbf{i}_\eta \nabla T_\alpha^{(i)}), \tag{6}$$

$$F_z \text{ (aggregate)} = 0. \tag{7}$$

Условия (2)–(7) физически означают следующее.

На бесконечности осесимметричный газовый поток однороден в пространстве и имеет скорость $\mathbf{U}$ в направлении положительных значений оси z, а внешнее температурное поле невозмущено.

На непроницаемой для газа поверхности S_α твердых нелетучих частиц нормальная составляющая скорости $v_\eta^{(e)}$ внешней среды обращается в нуль, а касательная компонента $v_\zeta^{(e)}$ равна скорости теплового скольжения (характеризуется коэффициентом $K_{TSL}^{(e)}$, определяемым методами кинетической теории газов); нормальный поток тепла и температура непрерывны.

Результирующая сила $\mathbf{F}$, действующая на агрегат со стороны набегающего потока внешней среды, равна нулю.

В дальнейшем уравнения гидродинамики, теплопереноса и граничные условия удобно записать в приведенном виде. Входящие туда физические величины обезразмериваются так:

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{R_0}, \quad \tilde{z} = \frac{r}{R_0}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{R_0}, \quad \tilde{\zeta} = \zeta R_0, \quad \tilde{\eta} = \eta R_0,$$

$$\tilde{v}_\zeta^{(e)} = \frac{v_\zeta^{(e)}}{U_{[0]}}, \quad \tilde{v}_\eta^{(e)} = \frac{v_\eta^{(e)}}{U_{[0]}}, \quad \tilde{U} = \frac{U}{U_{[0]}}, \quad \tilde{\Psi}^{(e)} = \frac{\Psi^{(e)}}{R_0^2 U_{[0]}},$$

$$\tilde{F}_z = \frac{F_z}{6\pi\eta_0^{(e)} R_0 U_{[0]}}, \quad \tilde{T}^{(e)} = \frac{T^{(e)} - T_0^{(e)}}{A_T R_0},$$

$$\tilde{T}_\alpha^{(i)} = \frac{T_\alpha^{(i)} - T_0^{(e)}}{A_T R_0},$$

$\Psi^{(e)}$ — функция тока, $U_{[0]}$ — скорость потока газа на бесконечности в нулевом по малым параметрам приближении (определяется в ходе решения).

Ниже волнистая линия сверху опускается и исходные уравнения, граничные условия в приведенном виде запишутся следующим образом:

$$E^4 \Psi^{(e)} = 0, \tag{8}$$

$$\Delta T^{(e)} = \Delta T_\alpha^{(i)} = 0, \tag{9}$$

$$r \to \infty: \qquad \Psi^{(e)} = -\frac{1}{2}\gamma^2 U, \tag{10}$$

$$T^{(e)} = Z, \tag{11}$$

$$S_\alpha \quad (\alpha = 1, 2): \qquad \Psi^{(e)} = 0, \tag{12}$$

$$U_{[0]} \frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial \eta} = -K_{TSL}^{(e)} \frac{\nu_0^{(e)}}{T_0^{(e)}} A_T \gamma \frac{\partial T^{(e)}}{\partial \zeta}, \tag{13}$$

$$T^{(e)} = T_\alpha^{(i)}, \tag{14}$$

$$\frac{\varkappa_0^{(e)}}{\varkappa_{0\alpha}^{(i)}} \nabla_\eta T^{(e)} = \nabla_\eta T_\alpha^{(i)}, \tag{15}$$

$$F_z \text{ (aggregate)} = 0,$$

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{16}$$

Приведенная скорость U газового потока на бесконечности ищется в виде ряда по степеням малых параметров ε_1 и ε_2

$$0 \leqslant \varepsilon_1 = (\varkappa_{01}^{(i)} - \varkappa_0^{(e)})/\varkappa_{01}^{(i)} \ll 1,$$

$$0 \leqslant \varepsilon_2 = (\varkappa_{02}^{(i)} - \varkappa_0^{(e)})/\varkappa_{02}^{(i)} \ll 1,$$

$$U(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1 + \varepsilon_1 U_{[1]}^{(1)} + \varepsilon_2 U_{[1]}^{(2)} + \varepsilon_1^2 U_{[2]}^{(1)}$$

$$+ \varepsilon_1 \varepsilon_2 U_{[2]}^{(2)} + \varepsilon_2^2 U_{[3]}^{(2)} + \ldots\,. \tag{17}$$

В дальнейшем ограничимся определением величин $U_{[0]}, U^{(1)}_{[1]}, U^{(2)}_{[1]}$, которые характеризуют скорость термофореза агрегата в нулевом и первом приближениях (индекс в квадратных скобках внизу).

Тепловая задача

Для произвольных значений приведенных коэффициентов удельной теплопроводности $\varkappa_1 = \varkappa^{(e)}_0/\varkappa^{(i)}_{01}$, $\varkappa_2 = \varkappa^{(e)}_0/\varkappa^{(i)}_{02}$ точно аналитически решить тепловую задачу (9), (11), (14), (15) не удается. Приближенное решение тепловой (гидродинамической) задачи строится методом последовательных приближений по малым параметрам ε_1 и ε_2 (случай агрегата касающихся низкотеплопроводных частиц $\varkappa_1 \sim \varkappa_2 \sim 1$). Осесимметричное распределение приведенной температуры вне и внутри частиц ищется в виде

$$T^{(e)}(\zeta,\eta) = T^{(e)}_{[0]}(\zeta,\eta) + T^{(e)}_{[1]}(\zeta,\eta) + T^{(e)}_{[2]}(\zeta,\eta) + \dots ,$$

$$T^{(i)}_{\alpha}(\zeta,\eta) = T^{(i)}_{\alpha,[0]}(\zeta,\eta) + T^{(i)}_{\alpha,[1]}(\zeta,\eta) + T^{(i)}_{\alpha,[2]}(\zeta,\eta) + \dots .$$

Здесь возмущения $T^{(e)}_{[1]}(\zeta,\eta)$, $T^{(i)}_{\alpha,[1]}(\zeta,\eta)$ температурного поля в линейном по малым параметрам приближении записываются так:

$$T^{(e)}_{[1]}(\zeta,\eta) = \varepsilon_1 t^{(e)}_1(\zeta,\eta) + \varepsilon_2 t^{(e)}_2(\zeta,\eta),$$

$$T^{(i)}_{\alpha,[1]}(\zeta,\eta) = \varepsilon_1 t^{(i)}_{\alpha,1}(\zeta,\eta) + \varepsilon_2 t^{(i)}_{\alpha,2}(\zeta,\eta).$$

В силу линейности оператора Лапласа функции

$$T^{(e)}_{[0]}(\zeta,\eta),\ T^{(i)}_{\alpha,[0]}(\zeta,\eta),$$

$$t^{(e)}_1(\zeta,\eta),\quad t^{(e)}_2(\zeta,\eta),\quad t^{(i)}_{\alpha,1}(\zeta,\eta),\quad t^{(i)}_{\alpha,2}(\zeta,\eta)$$

являются решениями уравнений (9) в тангенциально-сферической системе (ζ,η,φ) координат вращения [7]

$$T^{(e)}_{[0]}(\zeta,\eta) = z + (\zeta^2+\eta^2)^{\frac12}\int\limits_0^\infty \big(A_{[0]}(\lambda)\operatorname{ch}(\lambda\eta) + B_{[0]}(\lambda)\operatorname{sh}(\lambda\eta)\big)J_0(\lambda\zeta)d\lambda, \tag{18}$$

$$T^{(i)}_{1,[0]}(\zeta,\eta) = (\zeta^2+\eta^2)^{\frac12}\int\limits_0^\infty C_{[0]}(\lambda)e^{-\lambda\eta}J_0(\lambda\zeta)d\lambda, \tag{19}$$

$$T^{(i)}_{2,[0]}(\zeta,\eta) = (\zeta^2+\eta^2)^{\frac12}\int\limits_0^\infty D_{[0]}(\lambda)e^{+\lambda\eta}J_0(\lambda\zeta)d\lambda, \tag{20}$$

$$t^{(e)}_j(\zeta,\eta) = (\zeta^2+\eta^2)^{\frac12}\int\limits_0^\infty \big(A^{(j)}_{[1]}(\lambda)\operatorname{ch}(\lambda\eta) + B^{(j)}_{[1]}(\lambda)\operatorname{sh}(\lambda\eta)\big)J_0(\lambda\zeta)d\lambda, \tag{21}$$

$$t^{(i)}_{1,j}(\zeta,\eta) = (\zeta^2+\eta^2)^{\frac12}\int\limits_0^\infty C^{(j)}_{[1]}(\lambda)e^{-\lambda\eta}J_0(\lambda\zeta)d\lambda, \tag{22}$$

$$t^{(i)}_{2,j}(\zeta,\eta) = (\zeta^2+\eta^2)^{\frac12}\int\limits_0^\infty D^{(j)}_{[1]}(\lambda)e^{+\lambda\eta}J_0(\lambda\zeta)d\lambda \quad (j=1;2). \tag{23}$$

Функции (18)–(20) удовлетворяют условиям

$$T^{(e)}_{[0]}(\zeta,\eta)\Big|_{S_\alpha} = T^{(i)}_{\alpha,[0]}(\zeta,\eta)\Big|_{S_\alpha}, \tag{24}$$

$$\big(\nabla_\eta T^{(e)}_{[0]}(\zeta,\eta)\big)\Big|_{S_\alpha} = \big(\nabla_\eta T^{(i)}_{\alpha,[0]}(\zeta,\eta)\big)\Big|_{S_\alpha}, \tag{25}$$

$$T^{(e)}_{[0]}(\zeta,\eta)\Big|_{r\to\infty} = z,\quad T^{(i)}_{\alpha,[0]}(\zeta,\eta)\Big|_{\substack{\zeta\to\infty\\ \eta\to\infty}} < \infty. \tag{26}$$

Из граничных условий (24), (25) с учетом интегральных преобразований (П2), (П3) в Приложении следуют алгебраические уравнения

$$2\lambda\exp(-\lambda\eta_1) + A_{[0]}(\lambda)\operatorname{ch}(\lambda\eta_1) + B_{[0]}(\lambda)\operatorname{sh}(\lambda\eta_1) = C_{[0]}(\lambda)\exp(-\lambda\eta_1),$$

$$-2\lambda\exp(-\lambda\eta_1) + A_{[0]}(\lambda)\operatorname{sh}(\lambda\eta_1) + B_{[0]}(\lambda)\operatorname{ch}(\lambda\eta_1) = -C_{[0]}(\lambda)\exp(-\lambda\eta_1),$$

$$-2\lambda\exp(-\lambda\eta_2) + A_{[0]}(\lambda)\operatorname{ch}(\lambda\eta_2) - B_{[0]}(\lambda)\operatorname{sh}(\lambda\eta_2) = D_{[0]}(\lambda)\exp(-\lambda\eta_2),$$

$$2\lambda\exp(-\lambda\eta_2) + A_{[0]}(\lambda)\operatorname{sh}(\lambda\eta_2) - B_{[0]}(\lambda)\operatorname{ch}(\lambda\eta_2) = -D_{[0]}(\lambda)\exp(-\lambda\eta_2).$$

Откуда имеем

$$A_{[0]}(\lambda) = B_{[0]}(\lambda) = 0,\quad C_{[0]}(\lambda) = -D_{[0]}(\lambda) = 2\lambda, \tag{27}$$

$$T^{(e)}_{[0]}(\zeta,\eta) = T^{(i)}_{\alpha,[0]}(\zeta,\eta) = z. \tag{28}$$

Итак, в нулевом приближении $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ в пространстве везде сохраняется постоянный градиент температуры.

Функции (21)–(23) удовлетворяют условиям

$$t^{(e)}_1(\zeta,\eta)\Big|_{S_1} = t^{(i)}_{1,1}(\zeta,\eta)\Big|_{S_1}, \tag{29}$$

$$\big(\nabla_\eta t^{(e)}_1(\zeta,\eta) - \nabla_\eta T^{(e)}_{[0]}(\zeta,\eta)\big)\Big|_{S_1} = \big(\nabla_\eta t^{(i)}_{1,1}(\zeta,\eta)\big)\Big|_{S_1}, \tag{30}$$

$$t^{(e)}_2(\zeta,\eta)\Big|_{S_1} = t^{(i)}_{1,2}(\zeta,\eta)\Big|_{S_1}, \tag{31}$$

$$\big(\nabla_\eta t^{(e)}_2(\zeta,\eta)\big)\Big|_{S_1} = \big(\nabla_\eta t^{(i)}_{1,2}(\zeta,\eta)\big)\Big|_{S_1}, \tag{32}$$

$$t^{(e)}_1(\zeta,\eta)\Big|_{S_2} = t^{(i)}_{2,1}(\zeta,\eta)\Big|_{S_2}, \tag{33}$$

$$\big(\nabla_\eta t^{(e)}_1(\zeta,\eta)\big)\Big|_{S_2} = \big(\nabla_\eta t^{(i)}_{2,1}(\zeta,\eta)\big)\Big|_{S_2}, \tag{34}$$

$$t_2^{(e)}(\zeta,\eta)\Big|_{S_2} = t_{2,2}^{(i)}(\zeta,\eta)\Big|_{S_2}, \tag{35}$$

$$\left(\nabla_\eta t_2^{(e)}(\zeta,\eta) - \nabla_\eta T_{[0]}^{(e)}(\zeta,\eta)\right)\Big|_{S_2} = \left(\nabla_\eta t_{2,2}^{(i)}(\zeta,\eta)\right)\Big|_{S_2}, \tag{36}$$

$$t_j^{(e)}(\zeta,\eta)\Big|_{r\to\infty} = 0, \quad t_{1,j}^{(i)}(\zeta,\eta)\Big|_{\substack{\zeta\to\infty\\ \eta\to\infty}} < \infty,$$

$$t_{2,j}^{(i)}(\zeta,\eta)\Big|_{\substack{\zeta\to\infty\\ \eta\to\infty}} < \infty. \tag{37}$$

Из граничных условий (29)–(36) с учетом соотношений (П2), (П3) нетрудно получить алгебраические уравнения

$$A_{[1]}^{(1)}(\lambda)\,\mathrm{ch}(\lambda\eta_1) + B_{[1]}^{(1)}(\lambda)\,\mathrm{sh}(\lambda\eta_1) - C_{[1]}^{(1)}(\lambda)\exp(-\lambda\eta_1) = 0,$$

$$A_{[1]}^{(1)}(\lambda)\,\mathrm{sh}(\lambda\eta_1) + B_{[1]}^{(1)}(\lambda)\,\mathrm{ch}(\lambda\eta_1) + C_{[1]}^{(1)}(\lambda)\exp(-\lambda\eta_1) = -\frac{2}{3}\left(2\lambda - \frac{1}{\eta_1}\right)\exp(-\lambda\eta_1),$$

$$A_{[1]}^{(2)}(\lambda)\,\mathrm{ch}(\lambda\eta_1) + B_{[1]}^{(2)}(\lambda)\,\mathrm{sh}(\lambda\eta_1) - C_{[1]}^{(2)}(\lambda)\exp(-\lambda\eta_1) = 0,$$

$$A_{[1]}^{(2)}(\lambda)\,\mathrm{sh}(\lambda\eta_1) + B_{[1]}^{(2)}(\lambda)\,\mathrm{ch}(\lambda\eta_1) + C_{[1]}^{(2)}(\lambda)\exp(-\lambda\eta_1) = 0,$$

$$A_{[1]}^{(1)}(\lambda)\,\mathrm{ch}(\lambda\eta_2) - B_{[1]}^{(1)}(\lambda)\,\mathrm{sh}(\lambda\eta_2) - D_{[1]}^{(1)}(\lambda)\exp(-\lambda\eta_2) = 0,$$

$$A_{[1]}^{(1)}(\lambda)\,\mathrm{sh}(\lambda\eta_2) - B_{[1]}^{(1)}(\lambda)\,\mathrm{ch}(\lambda\eta_2) + D_{[1]}^{(1)}(\lambda)\exp(-\lambda\eta_2) = 0,$$

$$A_{[1]}^{(2)}(\lambda)\,\mathrm{ch}(\lambda\eta_2) - B_{[1]}^{(2)}(\lambda)\,\mathrm{sh}(\lambda\eta_2) - D_{[1]}^{(2)}(\lambda)\exp(-\lambda\eta_2) = 0,$$

$$A_{[1]}^{(2)}(\lambda)\,\mathrm{sh}(\lambda\eta_2) - B_{[1]}^{(2)}(\lambda)\,\mathrm{ch}(\lambda\eta_2) + D_{[1]}^{(2)}(\lambda)\exp(-\lambda\eta_2) = \frac{2}{3}\left(2\lambda - \frac{1}{\eta_2}\right)\exp(-\lambda\eta_2),$$

Откуда имеем

$$A_{[1]}^{(1)}(\lambda) = B_{[1]}^{(1)}(\lambda) = D_{[1]}^{(1)}(\lambda) = -\frac{1}{3}\left(2\lambda - \frac{1}{\eta_1}\right)\exp(-2\lambda\eta_1), \tag{38}$$

$$C_{[1]}^{(1)}(\lambda) = -\frac{1}{3}\left(2\lambda - \frac{1}{\eta_1}\right), \tag{39}$$

$$A_{[1]}^{(2)}(\lambda) = -B_{[1]}^{(2)}(\lambda) = C_{[1]}^{(2)}(\lambda) = \frac{1}{3}\left(2\lambda - \frac{1}{\eta_2}\right)\exp(-2\lambda\eta_2), \tag{40}$$

$$D_{[1]}^{(2)}(\lambda) = \frac{1}{3}\left(2\lambda - \frac{1}{\eta_2}\right). \tag{41}$$

С учетом результатов (28), (38), (40) имеем

$$T^{(e)}(\zeta,\eta) = z - \frac{1}{3}\varepsilon_1(\zeta^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^\infty\left(2\lambda - \frac{1}{\eta_1}\right)\times\exp(-2\lambda\eta_1 + \lambda\eta)J_0(\lambda\zeta)d\lambda + \frac{1}{3}\varepsilon_2(\zeta^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^\infty\left(2\lambda - \frac{1}{\eta_2}\right)\times\exp(-2\lambda\eta_2 - \lambda\eta)J_0(\lambda\zeta)d\lambda. \tag{42}$$

Гидродинамическая задача

Решение уравнения (8) Стокса ищется в виде

$$\Psi^{(e)}(\zeta,\eta) = -\frac{1}{2}\gamma^2 U + \tilde{\Psi}^{(e)}(\zeta,\eta).$$

Выражение для искажения $\tilde{\Psi}^{(e)}(\zeta,\eta)$ стационарного поля скоростей в окрестности агрегата, ограниченное на оси $(\zeta = 0)$ симметрии течения и исчезающее на бесконечности $(\zeta = \eta = 0)$, было впервые получено в [8]

$$\tilde{\Psi}^{(e)}(\zeta,\eta) = \frac{\zeta}{(\zeta^2+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^\infty W(\lambda,\eta)J_1(\lambda\zeta)d\lambda,$$

$$W(\lambda,\eta) = \left[a(\lambda) + \eta c(\lambda)\right]\mathrm{sh}(\lambda\eta) + \left[b(\lambda) + \eta d(\lambda)\right]\mathrm{ch}(\lambda\eta).$$

Функции $X(\lambda) = a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda), d(\lambda)$ параметра λ ищем в виде ряда по степеням ε_1 и ε_2

$$X(\lambda,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = X_{[0]}(\lambda) + \varepsilon_1 X_{[1]}^{(1)}(\lambda) + \varepsilon_2 X_{[1]}^{(2)}(\lambda) + \dots\ .$$

Каждый член этих разложений определяется из граничных условий на поверхности агрегата касающихся частиц. Очевидно, можно записать

$$W(\lambda,\eta,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = W_{[0]}(\lambda,\eta) + \varepsilon_1 W_{[1]}^{(1)}(\lambda,\eta) + \varepsilon_2 W_{[1]}^{(2)}(\lambda,\eta) + \dots\ ,$$

$$W_{[0]}(\lambda,\eta) = \left(a_{[0]}(\lambda) + \eta c_{[0]}(\lambda)\right)\mathrm{sh}(\lambda\eta) + \left(b_{[0]}(\lambda) + \eta d_{[0]}(\lambda)\right)\mathrm{ch}(\lambda\eta),$$

$$W_{[1]}^{(j)}(\lambda,\eta) = \left(a_{[1]}^{(j)}(\lambda) + \eta c_{[1]}^{(j)}(\lambda)\right)\mathrm{sh}(\lambda\eta) + \left(b_{[1]}^{(j)}(\lambda) + \eta d_{[1]}^{(j)}(\lambda)\right)\mathrm{ch}(\lambda\eta).$$

В работе [8] приводится выражение для результирующей силы, действующей со стороны внешней среды на агрегат касающихся сфер, движущихся вдоль линии их центров,

$$F_z(\text{aggregate}) = \int_0^\infty \lambda b(\lambda) d\lambda.$$

Тогда из условия (16) равномерного движения агрегата в силу произвольности малых параметров $\varepsilon_1 \ll 1$ и $\varepsilon_2 \ll 1$ имеем

$$\int_0^\infty \lambda b_{[0]}(\lambda) d\lambda = 0, \tag{43}$$

$$\int_0^\infty \lambda b_{[1]}^{(1)}(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \lambda b_{[1]}^{(2)}(\lambda) d\lambda = 0. \tag{44}$$

В дальнейшем используется распределение температуры (42) в окрестности агрегата соприкасающихся твердых сфер. Из граничных условий (12), (13) с помощью равенств (П4), (П5) находим

$$W_{[0]}(\lambda, \eta)\Big|_{\eta=\eta_1} = 2(\eta_1 + \lambda^{-1}) \exp(-\lambda\eta_1), \tag{45}$$

$$\frac{\partial W_{[0]}(\lambda, \eta)}{\partial \eta}\Big|_{\eta=\eta_1} = 2\delta\eta_1\lambda \exp(-\lambda\eta_1), \tag{46}$$

$$W_{[0]}(\lambda, \eta)\Big|_{\eta=-\eta_2} = 2(\eta_2 + \lambda^{-1}) \exp(-\lambda\eta_2), \tag{47}$$

$$\frac{\partial W_{[0]}(\lambda, \eta)}{\partial \eta}\Big|_{\eta=-\eta_2} = -2\delta\eta_2\lambda \exp(-\lambda\eta_2), \tag{48}$$

$$\delta = 4\frac{K_{TSL}^{(e)} \frac{\nu_0^{(e)}}{T_0^{(e)}} A_T}{U_{[0]}} - 1. \tag{49}$$

Величина размерной скорости $\mathbf{U}_{[0]}^T = -\mathbf{U}_{[0]}$ термофореза в нулевом приближении определяется из решения системы (45)–(48) линейных неоднородных алгебраических уравнений с учетом (43)

$$\mathbf{U}_{[0]}^T = -\frac{4}{1+\delta} K_{TSL}^{(e)} \frac{\nu_0^{(e)}}{T_0^{(e)}} \mathbf{A}_T, \quad \delta = \frac{\int_0^\infty \frac{\lambda}{D}\Phi_1(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{D}\Phi(\lambda) d\lambda}, \tag{50}$$

$$\Phi_1(\lambda) = (\eta_1+\lambda^{-1}) \exp(-\lambda\eta_1)\tilde{D}_1 + (\eta_2+\lambda^{-1}) \exp(-\lambda\eta_2)\tilde{D}_3,$$

$$\Phi(\lambda) = \eta_1 \exp(-\lambda\eta_1)\tilde{D}_2 - \eta_2 \exp(-\lambda\eta_2)\tilde{D}_4,$$

$$D = -\operatorname{sh}^2\big(\lambda(\eta_1+\eta_2)\big) + (\eta_1+\eta_2)^2\lambda^2,$$

$$\tilde{D} = -2(\eta_1+\lambda^{-1}) \exp(-\lambda\eta_1)\tilde{D}_1 + 2\delta\eta_1\lambda \exp(-\lambda\eta_1)\tilde{D}_2$$
$$- 2(\eta_2+\lambda^{-1}) \exp(-\lambda\eta_2)\tilde{D}_3 - 2\delta\eta_2\lambda \exp(-\lambda\eta_2)\tilde{D}_4,$$

$$\tilde{D}_1 = -\eta_2\lambda\Big\{(\eta_1+\eta_2)\lambda \operatorname{ch}(\lambda\eta_1) + \operatorname{sh}(\lambda\eta_1)\Big\}$$
$$+ \Big\{\eta_1\lambda \operatorname{ch}\big(\lambda(\eta_1+\eta_2)\big) + \operatorname{sh}\big(\lambda(\eta_1+\eta_2)\big)\Big\} \operatorname{sh}(\lambda\eta_2),$$

$$\tilde{D}_2 = -(\eta_1+\eta_2)\eta_2\lambda \operatorname{sh}(\lambda\eta_1) + \eta_1 \operatorname{sh}\big(\lambda(\eta_1+\eta_2\big) \operatorname{sh}(\lambda\eta_2),$$

$$\tilde{D}_3 = -\eta_1\lambda\Big\{(\eta_1+\eta_2)\lambda \operatorname{ch}(\lambda\eta_2) + \operatorname{sh}(\lambda\eta_2)\Big\}$$
$$+ \Big\{\eta_2\lambda \operatorname{ch}\big(\lambda(\eta_1+\eta_2)\big) + \operatorname{sh}\big(\lambda(\eta_1+\eta_2)\big)\Big\} \operatorname{sh}(\lambda\eta_1),$$

$$\tilde{D}_4 = (\eta_1+\eta_2)\eta_1\lambda \operatorname{sh}(\lambda\eta_2) - \eta_2 \operatorname{sh}\big(\lambda(n_1+\eta_2)\big) \operatorname{sh}(\lambda\eta_1).$$

Поправки $\varepsilon_1 U_{[1]}^{(1)}$ и $\varepsilon_2 U_{[1]}^{(2)}$ (обусловлены различием удельных теплопроводностей внешней среды и вещества частиц агрегата) находятся с помощью преобразований (П1), (П2), (П4)–(П6) окончательно из системы (51)–(58) алгебраических уравнений

$$W_{[1]}^{(1)}(\lambda, \eta)\Big|_{\eta=\eta_1} = 2U_{[1]}^{(1)}(\eta_1 + \lambda^{-1}) \exp(-\eta_1\lambda), \tag{51}$$

$$\frac{\partial W_{[1]}^{(1)}(\lambda, \eta)}{\partial \eta}\Big|_{\eta=\eta_1} = -2\eta_1\Big\{\frac{1}{3}(1+\delta) + U_{[1]}^{(1)}\Big\}$$
$$\times \lambda \exp(-\eta_1\lambda), \tag{52}$$

$$W_{[1]}^{(1)}(\lambda, \eta)\Big|_{\eta=-\eta_2} = 2U_{[1]}^{(1)}(\eta_2 + \lambda^{-1}) \exp(-\eta_2\lambda), \tag{53}$$

$$\frac{\partial W_{[1]}^{(1)}(\lambda, \eta)}{\partial \eta}\Big|_{\eta=-\eta_2} = 2U_{[1]}^{(1)}\eta_2\lambda \exp(-\eta_2\lambda)$$
$$- \frac{2}{3}(1+\delta)(\eta_1+\eta_2)\Big\{2 + \frac{\eta_1}{\eta_1+\eta_2} - 2\eta_1\lambda\Big\}$$
$$\times \lambda \exp(-\alpha_1\lambda), \tag{54}$$

$$W_{[1]}^{(2)}(\lambda, \eta)\Big|_{\eta=\eta_1} = 2U_{[1]}^{(2)}(\eta_1 + \lambda^{-1}) \exp(-\eta_1\lambda), \tag{55}$$

$$\frac{\partial W_{[1]}^{(2)}(\lambda, \eta)}{\partial \eta}\Big|_{\eta=\eta_1} = -2U_{[1]}^{(2)}\eta_1\lambda \exp(-\eta_1\lambda)$$
$$+ \frac{2}{3}(1+\delta)(\eta_1+\eta_2)\Big\{2 + \frac{\eta_2}{\eta_1+\eta_2} - 2\eta_2\lambda\Big\}\lambda$$
$$\times \exp(-\alpha_2\lambda), \tag{56}$$

$$W_{[1]}^{(2)}(\lambda, \eta)\Big|_{\eta=-\eta_2} = 2U_{[1]}^{(2)}(\eta_2 + \lambda^{-1}) \exp(-\eta_2\lambda), \tag{57}$$

$$\frac{\partial W_{[1]}^{(2)}(\lambda, \eta)}{\partial \eta}\Big|_{\eta=-\eta_2} = -2\eta_2\Big\{\frac{1}{3}(1+\delta) + U_{[1]}^{(2)}\Big\}\lambda \exp(-\eta_2\lambda),$$
$$\alpha_1 = 2\eta_1 + \eta_2, \quad \alpha_2 = \eta_1 + 2\eta_2. \tag{58}$$

Дополнительные условия (44) позволяют записать

$$U_{[1]}^{(j)} = (-1)^j \frac{1+\delta}{3}\beta^j, \quad \beta^j = \frac{\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{D}\Omega_j(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \frac{\lambda}{D}\Omega(\lambda) d\lambda}, \tag{59}$$

$$\Omega(\lambda) = (\eta_1 + \lambda^{-1}) \exp(-\lambda\eta_1)\tilde{D}_1 + \eta_1\lambda \exp(-\lambda\eta_1)\tilde{D}_2$$
$$+ (\eta_2 + \lambda^{-1}) \exp(-\lambda\eta_2)\tilde{D}_3 - \eta_2\lambda \exp(-\lambda\eta_2)\tilde{D}_4,$$

Таблица 1.

R_1/R_2	δ	$\beta^{(1)}$	$\beta^{(2)}$
1	4.69309	$7.61846 \cdot 10^{-2}$	$-7.61846 \cdot 10^{-2}$
2	4.77724	$1.31308 \cdot 10^{-1}$	$-2.54592 \cdot 10^{-2}$
3	4.85906	$1.49923 \cdot 10^{-1}$	$-1.08006 \cdot 10^{-2}$
4	4.90815	$1.57435 \cdot 10^{-1}$	$-5.50003 \cdot 10^{-3}$
5	4.93750	$1.61028 \cdot 10^{-1}$	$-3.16567 \cdot 10^{-3}$
6	4.95576	$1.62964 \cdot 10^{-1}$	$-1.98498 \cdot 10^{-3}$
7	4.96762	$1.64103 \cdot 10^{-1}$	$-1.32536 \cdot 10^{-3}$
8	4.97563	$1.64816 \cdot 10^{-1}$	$-9.28434 \cdot 10^{-4}$
9	4.98121	$1.65287 \cdot 10^{-1}$	$-6.75435 \cdot 10^{-4}$
10	4.98522	$1.65610 \cdot 10^{-1}$	$-5.06618 \cdot 10^{-4}$
20	4.99735	$1.66499 \cdot 10^{-1}$	$-7.22619 \cdot 10^{-5}$
30	4.99911	$1.66613 \cdot 10^{-1}$	$-2.24074 \cdot 10^{-5}$
40	4.99960	$1.66643 \cdot 10^{-1}$	$-9.67350 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2.

R_2/R_1	δ	$\beta^{(1)}$	$\beta^{(2)}$
1	4.69309	$7.61846 \cdot 10^{-2}$	$-7.61846 \cdot 10^{-2}$
2	4.77724	$2.54592 \cdot 10^{-2}$	$-1.31308 \cdot 10^{-1}$
3	4.85906	$1.08006 \cdot 10^{-2}$	$-1.49923 \cdot 10^{-1}$
4	4.90815	$5.50003 \cdot 10^{-3}$	$-1.57435 \cdot 10^{-1}$
5	4.93750	$3.16567 \cdot 10^{-3}$	$-1.61028 \cdot 10^{-1}$
6	4.95576	$1.98498 \cdot 10^{-3}$	$-1.62964 \cdot 10^{-1}$
7	4.96762	$1.32536 \cdot 10^{-3}$	$-1.64103 \cdot 10^{-1}$
8	4.97563	$9.28434 \cdot 10^{-4}$	$-1.64816 \cdot 10^{-1}$
9	4.98121	$6.75435 \cdot 10^{-4}$	$-1.65287 \cdot 10^{-1}$
10	4.98522	$5.06618 \cdot 10^{-4}$	$-1.65610 \cdot 10^{-1}$
20	4.99735	$7.22619 \cdot 10^{-5}$	$-1.66499 \cdot 10^{-1}$
30	4.99911	$2.24074 \cdot 10^{-5}$	$-1.66613 \cdot 10^{-1}$
40	4.99960	$9.67350 \cdot 10^{-6}$	$-1.66643 \cdot 10^{-1}$

$$\Omega_1(\lambda) = \eta_1 \exp(-\lambda\eta_1)\tilde{D}_2 + (\eta_1 + \eta_2) \times \left(2 + \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} - 2\eta_1\lambda\right) \exp(-\alpha_1\lambda)\tilde{D}_4,$$

$$\Omega_2(\lambda) = (\eta_1 + \eta_2)\left(2 + \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} - 2\eta_2\lambda\right) \times \exp(-\alpha_2\lambda)\tilde{D}_2 + \eta_2 \exp(-\lambda\eta_2)\tilde{D}_4.$$

Анализ результатов

В некотором виде размерная скорость термофореза агрегата в линейном по малым параметрам приближении запишется с учетом выражений (50), (59) так:

$$\mathbf{U}^T = -4K_{TSL}^{(e)} \frac{\nu_0^{(e)}}{T_0^{(e)}} \mathbf{A}_T \left\{ \frac{1}{1+\delta} - \frac{1}{3}\varepsilon_1\beta^{(1)} + \frac{1}{3}\varepsilon_2\beta^{(2)} \right\}. \quad (60)$$

Представляет интерес проверить в ходе численного анализа согласие формулы (60) в предельных случаях термофореза агрегата касающихся твердых нелетучих сфер ($R_1 \gg R_2$ или $R_2 \gg R_1$) с ранее полученным и приведенным в [1] для одиночной частицы результатом

$$\mathbf{U}^T = -\frac{2\varkappa_\alpha}{1 + 2\varkappa_\alpha} K_{TSL}^{(e)} \frac{\nu_0^{(e)}}{T_0^{(e)}} \mathbf{A}_T. \quad (61)$$

Разложим выражение $2\varkappa_\alpha/(1+2\varkappa_\alpha)$ в ряд по степеням ε_α

$$\frac{2\varkappa_\alpha}{1 + 2\varkappa_\alpha} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\varepsilon_\alpha - \frac{2}{9}\varepsilon_\alpha^2 - \dots\right).$$

Тогда из сравнения правых частей (60) и (61) для предельных случаев $R_1 \gg R_2$ или $R_1 \ll R_2$ должны выполняться следующие равенства: в нулевом приближении

$$\frac{4}{1+\delta} = \frac{2}{3} \quad (\text{откуда} \quad \delta = 5), \quad (62)$$

в первом приближении

$$\varepsilon_1\beta^{(1)} - \varepsilon_2\beta^{(2)} = \frac{1}{6}\begin{cases} \varepsilon_1 & \text{при} \quad R_1 \gg R_2, \\ \varepsilon_2 & \text{при} \quad R_2 \gg R_1. \end{cases} \quad (63)$$

Предельные случаи (62), (63) подтверждаются результатами численного анализа (приведены в табл. 1, 2).

Следует заметить, что в нулевом приближении по малым параметрам (соответствует одинаковой теплопроводности внешней среды и касающихся твердых нелетучих сфер) скорость термофоретического переноса агрегата не меняется в результате перемены мест частиц ($R_1 \to R_2$, $R_2 \to R_1$). В случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ величина скорости движения агрегата по сравнению с таковой для любой одиночной частицы увеличивается и влияние формы агрегации оказывается наибольшим при касании равных сфер (составляет не менее 5%).

Очевидно, построенная в рамках гидродинамического анализа теория термофореза справедлива также для агрегата контактирующих гидрозольных твердых частиц и высоковязких чистых капель. Этот случай практически наиболее важен.

Приложение

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda\eta) J_0(\lambda\zeta) d\lambda = (\zeta^2 + \eta^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{П1})$$

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda\eta) J_0(\lambda\zeta) \lambda d\lambda = \eta(\zeta^2 + \eta^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad (\text{П2})$$

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda\eta) J_0(\lambda\zeta) \lambda^2 d\lambda = 3\eta^2(\zeta^2 + \eta^2)^{-\frac{5}{2}} - (\zeta^2 + \eta^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad (\text{П3})$$

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda\eta)(\eta+\lambda^{-1})J_1(\lambda\zeta)d\lambda = \frac{\zeta}{(\zeta^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{П}4)$$

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda\eta)J_1(\lambda\zeta)\lambda d\lambda = \frac{\zeta}{(\zeta^2+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{П}5)$$

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda\eta)J_1(\lambda\zeta)\lambda^2 d\lambda = 3\frac{\zeta\eta}{(\zeta^2+\eta^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (\text{П}6)$$

Список литературы

[1] *Яламов Ю.И., Галоян В.С.* Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.

[2] *Яламов Ю.И., Гайдуков М.Н., Мелехов А.П.* // ДАН СССР. 1986. Т. 287. № 2. С. 337–341.

[3] *Яламов Ю.И., Щукин Е.Р., Гращенков С.И.* Термофорез и диффузиофорез двух аэрозольных частиц с учетом внутренних источников тепла. М.: МОПИ, 1989. 118 с. Деп. в ВИНИТИ. № 7212-В89.

[4] *Яламов Ю.И., Гайдуков М.Н., Левин В.В.* Термофорез двух частиц при малых числах Кнудсена. М.: МПУ, 1993. 9 с. Деп. в ВИНИТИ. № 1029-В93.

[5] *Reed L.D., Morrison F.A.* // J. Aerosol. Sci. 1975. Vol. 6. P. 349–365.

[6] *Stimson M., Jeffery G.B.* // Proc. Roy. Soc. 1926. Vol. A111. N 757. P. 110–116.

[7] *Олару О.О.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 3. С. 73–76.

[8] *Cooley M.D.A., O'Neill M.E.* // Proc. Canb. Phil. Soc. 1969. Vol. 66. P. 407–415.