

01;03

Определение нелинейных аэродинамических характеристик по траекторным данным объекта: модификация метода для сложных случаев

© А.Б. Подласкин

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 26 марта 1997 г.)

Известен метод вычисления нелинейных аэродинамических характеристик объектов по траекторным данным, основанный на принципе дифференциальной коррекции [1,3]. Предлагается модификация этого метода, в которой выбрано представление решения в форме сплайна. Отработанный на модельных задачах новый подход может обеспечить более надежную гарантию адекватности решений и выигрыш в точности в случаях сложных форм искомых зависимостей.

Введение

Одной из задач эксперимента на баллистических установках является определение аэродинамических характеристик (АДХ), т.е. сил и моментов, действующих на тело в свободном полете. При этом в распоряжении исследователя оказываются траекторные данные — упорядоченная совокупность отсчетов координат объекта в фиксированные моменты времени. Эти координаты и искомые функции аэродинамических сил и моментов связаны системой нелинейных дифференциальных уравнений [1], аналитически не интегрируемых. Таким образом, задача принимает общий вид

$$Az(x) = u(x), \quad (1)$$

где $u(x) = x$ — вектор измеряемых координат, z — вектор искомых функций аэродинамических коэффициентов — эта некорректная задача задается операторным уравнением первого рода [2].

Аналитически может быть записан лишь обратный интегральному оператору A оператор A^{-1} . Для решения этой задачи традиционно используется метод подбора, т.е. для ряда приближений искомых функций решается прямая задача и вычисляется отклонение расчетной траектории от экспериментальной. Начальное приближение выбирается на основе априорной экспертной оценки. В качестве алгоритма построения минимизирующей последовательности положительно зарекомендовал себя метод дифференциальной коррекции [3] (также известный как метод Гаусса–Ньютона). Класс функций, среди которого следует проводить поиск устойчивого решения (класс корректности задачи) можно ограничивать различным образом. Единственное условие — рассматриваемое функциональное подпространство должно представлять собой компакт [2]. Сходимость метода на классе степенных полиномов, содержащих конечное число членов четных или нечетных степеней, подтверждается в [1], где представлены примеры успешного определения аэродинамических коэффициентов по баллистическим экспери-

ментам с острыми конусами. Там же продемонстрирована практическая важность статистического оценивания полученных результатов, которое проводится по дисперсионной матрице коэффициентов регрессии искомых функций. Известна и сложность вопроса об адекватности найденного методом подбора решения, ибо эффективность в данном случае определяется погрешностями экспериментальных данных.

Постановка задачи

Среди объектов баллистических исследований встречаются некоторые, обладающие достаточно сложной формой зависимости $z(x)$ аэродинамических коэффициентов от обобщенной координаты. Хотя АДХ, как правило, описываются гладкими функциями, они, например, могут быть существенно немонотонными. Такого рода сложности обычно проявляются при увеличении рассматриваемой области изменения независимой переменной. В подобных случаях можно предположить неэффективность описания модели движения объекта с использованием отрезков степенных рядов как формы регрессии функций $z(x)$. Чем сложнее форма искомой функции, тем длиннее должен быть отрезок аппроксимирующего ее ряда. С увеличением числа членов ряда ухудшается обусловленность матриц метода наименьших квадратов. Это — факт, известный в регрессионном анализе [4]. Существуют вычислительные алгоритмы (например, [5]), позволяющие разрешать соответствующие плохо определенные системы уравнений. Однако другие недостатки полиномов высоких степеней не позволяют идти этим путем в случаях сложной формы $z(x)$. Опыт показывает, что доверительный интервал для суммы отрезка ряда в конце интервала аппроксимации многократно увеличивается за счет погрешностей коэффициентов при высоких степенях независимой переменной. Кроме того, поскольку степенной базис не является ортогональным, то введение членов высоких степеней при аппроксимации искомой функции на больших ин-

тервалах изменяет величины коэффициентов регрессии при младших степенях. Наличие большого числа членов может привести к появлению нефизических осцилляций. Все это склоняет искать иные формы представления искомым функций при подборе решения рассматриваемой некорректной задачи. В качестве варианта было предложено, разбивая диапазон изменения x , строить регрессию из отрезков степенных рядов, "сшитых" на границах интервалов по величине и первой производной. В этом случае в пределах сравнительно небольших интервалов по x искомая функция будет описываться существенно более короткими полиномами.

Построение методики

В силу указанных выше соображений относительно сложности выяснения адекватности искомой модели и влияния трудно контролируемых погрешностей эксперимента на этапе отработки алгоритма исследовались модельные задачи, т.е. траекторные данные, рассчитанные по заданным аэродинамическим характеристикам "объекта". Обратимся к рис. 1. В качестве частного случая $z(x)$ на нижнем графике представлена функция коэффициента статического аэродинамического момента в зависимости от угла атаки $C_m(\alpha)$. Эта функция

$$C_m(\alpha) = \text{sign}(\alpha) \left[C_{\max} \sin^3(|\alpha| + \alpha_0) + C_0 \right],$$

использованная нами как модельный пример, вообще не может быть описана конечным числом членов степенного ряда. Применительно к рассматриваемой задаче это означает, что алгоритм Чепмена–Кирка [3] не дает возможности подобрать решение, которое бы адекватным образом описывало данную функцию момента. При увеличении степени полинома до 13 адекватность модели не была достигнута, хотя элементы матрицы нормальных уравнений уже достигали предела машинного представления. Если же рассматривать фрагменты области ее определения, например, как это показано штриховыми линиями, то очевидно, что на этих отрезках функция вполне может быть аппроксимирована полиномами низких степеней. Верхняя кривая соответствует "траектории" колебаний тела в полете, т.е. зависимости угла атаки от продольной координаты вдоль трассы. По условию сшивки фрагментов искомой функции при использовании квадратичной параболы как функции регрессии $C_m(\alpha)$ на области $|\alpha| \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ имеем

$$C_m(\alpha) = \text{sign}(\alpha) C_m(\alpha_i) + [dC_m(\alpha_i)/d\alpha] (\alpha - \alpha_i) + \text{sign}(\alpha) k_{i+1} (\alpha - \alpha_i)^2 \quad (2)$$

(функция знака введена по физическому смыслу нечетности статического аэродинамического момента).

Таким образом, принятая форма регрессии, обладающая кусочно-непрерывной второй производной, соответствует сплайну 1-го порядка.

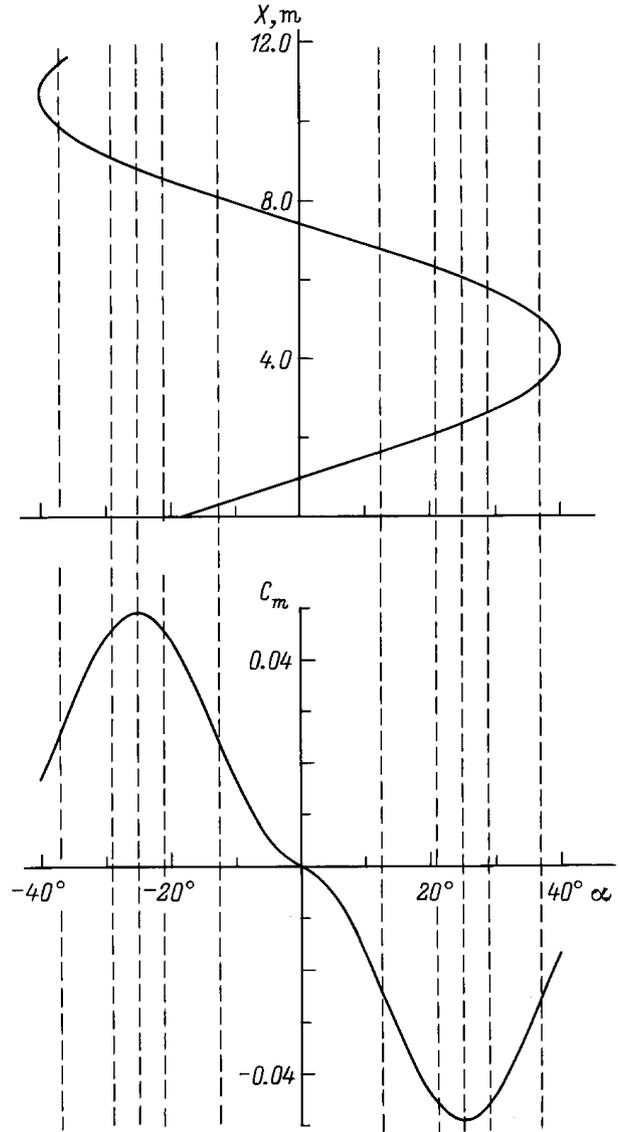


Рис. 1. Модельная функция коэффициента статического аэродинамического момента (нижний график) и пример соответствующих ей колебаний объекта по углу атаки (верхний график). Штриховые линии — разбиение области $\{\alpha\}$ на интервалы.

Многие достоинства отработанной прежде методики нахождения АДХ определили факторы преимущества. Только что отмеченное использование функции $\text{sign}(\alpha)$ соответствует применению полиномов четных либо нечетных степеней в алгоритме Чепмена–Кирка — пример необходимого в методе подбора привлечения априорной информации о природе искомого решения $z(x)$. Как и в случае со сквозной полиномиальной аппроксимацией АДХ, желаемое число степеней свободы можно получать, обрабатывая совместно данные нескольких экспериментов с одной моделью. При этом число новых узлов аппроксимации увеличивается быстрее, чем число неизвестных (коэффициенты регрессии остаются

общими, добавляются лишь считающиеся неизвестными начальные условия пусков). К тому же совместная обработка данных нескольких пусков одного объекта с разными амплитудами колебаний по углу атаки позволяет использовать неизохронность таких колебаний, дающую большую информацию о нелинейных характеристиках момента, нежели может дать анализ формы колебаний.

По-прежнему основной логический стержень алгоритма состоит в построении последовательности приближений искомого решения, минимизирующих отклонение расчетной траектории от экспериментальной по квадратичной метрике. Для линеаризации целевой функции — остаточной суммы квадратов разностей угла атаки α производится ее разложение в многомерный ряд Тейлора по искомым параметрам в окрестности решения, усеченный на уровне линейных членов. В таком представлении отклонение записывается через производные α по коэффициентам регрессии искомой функции и начальным условиям. Значения производных находятся из уравнений чувствительности, которые получены дифференцированием уравнения движения по всем неизвестным и интегрируются совместно с уравнением движения. Этот прием позволяет составить систему нормальных уравнений метода наименьших квадратов — линейных алгебраических уравнений на основе уравнений движения и чувствительности для всех точек плана. Однако решение такой системы уравнений, записанной приближенно для нелинейной задачи, дает лишь совокупность поправок к коэффициентам. Поэтому поиск решения осуществляется за несколько итераций. Вычисление дисперсионной матрицы [6] метода наименьших квадратов позволяет в ходе дифференциальной коррекции оценивать погрешности найденных приближений коэффициентов и судить об их значимости.

Новая форма представления искомой функции вызвала определенные изменения в алгоритме. В процессе подбора решения операторного уравнения (1), когда идет решение прямой задачи, интегрирование уравнений движения, на каждом шаге контролируется текущее значение α с целью определения, к какому из назначенных интервалов оно относится. В соответствии с выясненной принадлежностью аргумента в процедурах, рассчитывающих значения $C_m(\alpha)$, вычисления проводятся по формулам соответствующего интервала. Поскольку на разных интервалах $\{\alpha\}$ на целевую функцию по-разному влияют коэффициенты регрессии: какие-то непосредственно, какие-то через посредство своего влияния на предыдущих участках (соответственно формуле (2)), то вычисление коэффициентов уравнений чувствительности производится также в соответствии с принадлежностью α тому или иному интервалу. Однако из вычисленных таким образом производных строится единая матрица нормальных уравнений метода наименьших квадратов, ведь она относится к единому уравнению, задающему движение объекта, и все коэффициенты, привлеченные для описания искомой функции, оказываются коррелированы.

Анализ решения

Варьируя количество и положение границ интервалов α_i , можно достичь приемлемых результатов определения $C_m(\alpha)$. Приемлемость определяется, с одной стороны, по погрешностям найденных коэффициентов регрессии с учетом их корреляции (когда относительная погрешность коэффициента при квадрате независимой переменной превышает 100% при заданной доверительной вероятности, следует отказаться от такого незначимого коэффициента и считать момент на данном отрезке линейным). С другой стороны, адекватность найденного решения для модельной задачи легко контролируема, так как известен точный вид искомой функции. Опыт показал, что задача имеет не единственное решение в рассматриваемом классе функций и при неудачном выборе разбиения области $\{\alpha\}$ возможно нахождение постороннего решения. Практическим путем было установлено, что хорошие результаты в плане эффективности дает назначение границ в точках экстремумов и перегибов искомой функции. Для названного примера (рис. 1, момент задан кубом синуса угла атаки), где в диапазоне $|\alpha| \leq 40^\circ$ с положительной и с отрицательной стороны имеются два перегиба ($\alpha \cong \pm 13.25^\circ$ и $\alpha \cong \pm 36.75^\circ$) и один экстремум ($\alpha = \pm 25^\circ$), приемлемые результаты достигаются, начиная не с 4 интервалов модуля α , а лишь с 6: пришлось симметрично выделить области большой кривизны функции вблизи экстремума (увеличение количества интервалов свыше минимально необходимого смысла не имеет). Использованы были траекторные данные четырех "пусков" с амплитудами колебаний по углу атаки 7, 14, 27 и 38°.

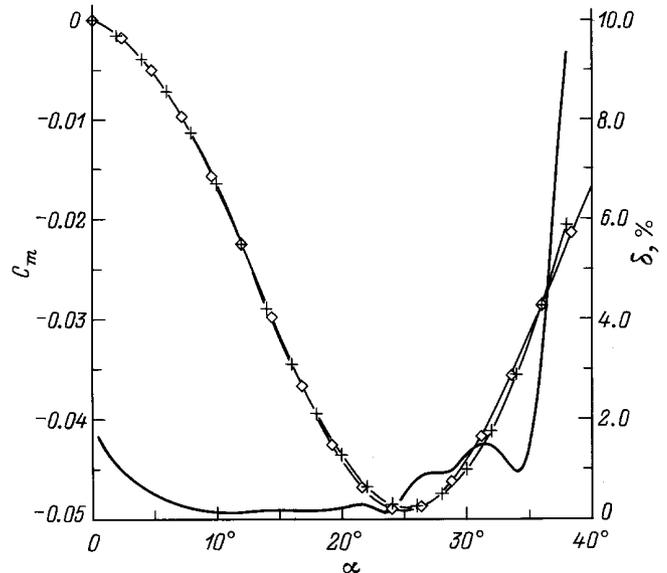


Рис. 2. Восстановленная методом сплайн-аппроксимации зависимость (крестики) коэффициента статического аэродинамического момента с рис. 1. Исходная функция — квадраты. Сплошная линия — оценка относительной погрешности δ -аппроксимации.

План "эксперимента" насчитывал 34 точки. Аппроксимация квадратичными парабололами на 6 интервалах имела 14 степеней свободы. Накопление погрешности найденных нелинейных коэффициентов регрессии k_i происходило от 1 ($|\alpha| \leq \alpha_1$) до 65% ($|\alpha| \geq \alpha_5$). При этом достигнутая точность определения статического момента была в пределах 9% (рис. 2). Погрешность рассчитана по дисперсионной матрице коэффициентов регрессии с учетом их ковариаций.

Нахождение методом подбора решения некорректной задачи [2] эквивалентно минимизации расстояния ρ (по квадратичной метрике) промежуточного приближенного решения z_δ от точного решения z_T . Результат этого процесса, как правило, выглядит таким образом, что на краях области аппроксимации и в ее средней части локальные отклонения имеют противоположные знаки, тогда как его интеграл $\rho(z_\delta, z_T)$ по всей области аппроксимации стремится к нулю. В данном случае на каждом интервале $\alpha_i < |\alpha| \leq \alpha_{i+1}$ старший (один) коэффициент аппроксимирующего отрезка параболы ищется независимо. Это находит выражение в сложном характере поведения функции погрешности найденного коэффициента момента от угла атаки: погрешность отражает характер локального отклонения z_δ от z_T . Рассмотрение модельной задачи (когда известно точное решение) дает возможность наглядно отследить собственно ρ по взаимному положению кривых заданной и найденной функций $C_m(\alpha)$.

Также был проведен анализ примера с четырьмя пусками острого конуса с полным углом при вершине 30° , рассматривавшийся в [1]. В этом случае возможно сравнение результатов при сквозной аппроксимации искомого коэффициента момента по Чепмену–Кирку (нечетный полином 5-й степени) и при кусочно-полиномиальной аппроксимации. Однако от использования имеющихся экспериментальных данных пришлось отказаться в силу чувствительности метода к содержащимся в них систематическим и аномальным ошибкам при относительно малом объеме выборки и прибегнуть к моделированию исходных данных. Модельные траектории, рассчитанные по характеристикам, взятым из [1], "зашумлялись" прибавлением нормально распределенной случайной ошибки со среднеквадратичным отклонением 0.5° , что соответствует погрешности реальных измерений. Для этой функции $C_m(\alpha)$ достаточным оказалось использовать 4 интервала (отмечены вертикальными засечками на рис. 3). Сравнение полученных кривых показывает хорошее согласование (найденно одно и то же решение). Оценка остаточных среднеквадратичных отклонений α траекторий, рассчитанных по двум методикам ($\sigma_\alpha \cong 0.51^\circ$ для сквозной аппроксимации и $\sigma_\alpha \cong 0.13^\circ$ для новой методики), свидетельствует в пользу кусочно-полиномиальной аппроксимации. Построение дисперсионной матрицы коэффициентов регрессии в обоих случаях позволяет оценить полную погрешность величины момента в пределах заданного диапазона $\{\alpha\}$. Величины доверительного интервала статического момента для

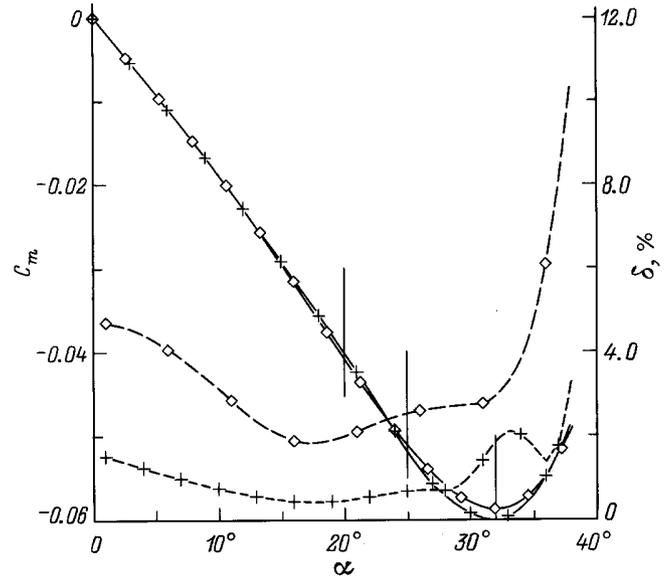


Рис. 3. Сравнение результатов сквозной (квадраты) и кусочной (крестики) аппроксимаций при восстановлении нелинейного статического аэродинамического момента острого конуса. Сплошные линии — значения коэффициента момента, штриховые — оценка относительной погрешности δ соответствующих аппроксимаций.

доверительной вероятности 95% показаны на рис. 3. Видно, что кусочное описание функции момента позволяет найти ее с меньшей погрешностью. Однако нахождение сопряжено с большими трудностями, нежели нахождение сквозной полиномиальной аппроксимации. Дополнительные проблемы связаны с выбором границ участков, на которые следует разделить диапазон изменения $\{\alpha\}$. Преодоление этих трудностей требует времени, но, вероятно, по мере накопления опыта возможно сокращение его затрат.

Заключение

Анализируя трудности, возникавшие в процессе отработки алгоритма определения АДХ по траекторным измерениям с использованием сплайнов как формы описания искомым функций, можно сформулировать следующие соображения относительно применения метода к реальным экспериментальным данным. Подбор начального приближения в той форме, которая предполагается при данном подходе, нереально осуществить, располагая лишь первичными данными. Поэтому целесообразно начинать обработку результатов эксперимента, например, с помощью алгоритма Чепмена–Кирка. Получив представление об искомым функциях, можно перейти к новому алгоритму и провести сравнительную оценку решений, найденных двумя способами по их адекватности (насколько о ней можно судить вообще) и погрешностям. Выявленные в ходе аппроксимаций по

Чепмену–Кирку особенности искомой функции помогут построить начальные приближения сплайнов. Здесь возникает дополнительный фактор оптимизации — назначение количества и положения границ интервалов независимой переменной. Как уже отмечалось, по имеющимся наблюдениям наиболее удачными в смысле сходимости оказываются варианты размещения границ в точках экстремумов и перегибов искомой функции. При работе с экспериментальными данными поиск таких точек придется проводить последовательно. Проверка результативности предложенного подхода в этом случае возможна в будущем по мере получения качественных экспериментальных данных.

Автор выражает глубокую благодарность Н.П. Менде за постановку задачи и ценные обсуждения, а также С.В. Бобашеву за полезные замечания.

Список литературы

- [1] Менде Н.П. Препринт ФТИ им. А.Ф. Иоффе. № 1326. Л., 1989. 44 с.
- [2] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 228 с.
- [3] Чепмен, Кирк. // Ракетная техника и космонавтика. 1970. Т. 8. № 4. С. 182–188.
- [4] Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980. 456 с.
- [5] Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A. et al. Numerical Recipes in Pascal. The Art of Scientific Programming. Cambridge University Press, 1989. 759 p.
- [6] Ермаков С.М., Жиглявский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента. Учебное пособие. М.: Наука, 1987. 320 с.