

01;05

Устойчивость нормальной фазы в ограниченной сверхпроводящей пленке с током

© А.С. Рудый

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 30 июля 1996 г. В окончательной редакции 27 июня 1997 г.)

Рассмотрены двухфазные состояния равновесия тонкой сверхпроводящей пленки с током при конвективном теплообмене на свободной поверхности и исследована их устойчивость по первому приближению. Показано, что из двух состояний равновесия устойчиво состояние с большей протяженностью области нормальной фазы. В предельном случае бесконечно длинной пленки устойчивое двухфазное состояние равновесия стремится к пространственно однородному нормальному состоянию, а неустойчивое остается локализованным. В определенном диапазоне значений параметров системы время релаксации такого образования может быть достаточно велико и его следует рассматривать как квазиустойчивое состояние равновесия.

Введение

Одной из проблем, связанных с разработкой и эксплуатацией криоэлектронных устройств, является тепловое разрушение сверхпроводящего состояния, сопровождающееся образованием в сверхпроводнике области нормальной фазы. В работе [1] подобные неоднородные состояния равновесия рассматривались применительно к одномерным и планарным структурам как наиболее распространенным элементам криоэлектроники. В частности, в [1], где исследовалась идеализированная модель тонкой сверхпроводящей пленки с переменным током, находящейся в охлаждающей среде, было показано следующее. При значениях параметра Стекли σ , превышающих его критическое значение σ_c , наряду с однородным сверхпроводящим состоянием существуют неоднородные состояния равновесия, в которых центральная часть пленки находится в нормальной фазе. В силу так называемой внешней нелинейности системы (разрывность параметров и плотности источников на фазовой границе) при $\sigma > \sigma_c$ имеются два таких неоднородных двухфронтовых состояния равновесия.

В ситуации, когда неоднородное состояние какого-либо элемента криоэлектронного устройства является необходимым условием его работы, как например в болометре В. Франца [2], возникает проблема устойчивости локализованной нормальной фазы, которая в [1] не исследовалась. Настоящая работа посвящена анализу устойчивости полученных в [1] стационарных решений к симметричным возмущениям температурного поля и исследованию асимптотики обоих состояний равновесия.

Динамическая модель системы

Рассмотрим показанную на рис. 1 тонкую сверхпроводящую пленку с переменным током, центральная часть которой находится в нормальном состоянии. Пусть плен-

ка помещена в термостат наполненный жидкостью или газом и вся система, за исключением пленки, имеет температуру ниже критической и находится в тепловом равновесии. Исследуем случай, когда неоднородное температурное поле пленки одномерно. Введем следующие обозначения для отклонения температуры сверхпроводящей пленки от температуры термостата $T_s(x, t)$ — отклонение температуры в сверхпроводящей области; $T_n(x, t)$ — в области нормальной фазы. Очевидно, что стационарное распределение температуры симметрично относительно плоскости, проходящей через середину пленки $x = \delta$. Пусть в начальный момент времени система отклонена от состояния равновесия так, что распределение температуры по-прежнему остается симметричным. В этом случае краевая задача для

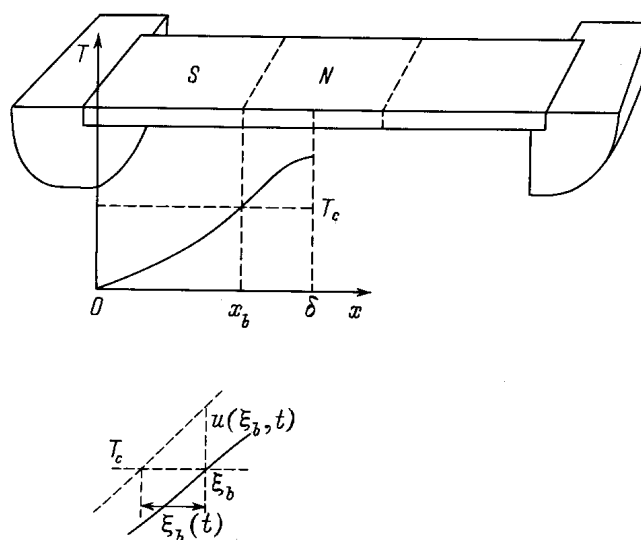


Рис. 1. Сверхпроводящая пленка в цепи источника переменного тока при конвективном теплообмене на свободной поверхности. Показано отклонение температуры пленки в двухфазном состоянии от температуры термостата. На вставке — смещение фазовой границы при возмущении температурного поля.

определения температурного поля сверхпроводящей S и нормальной N фазы имеет вид

$$\begin{aligned} c_{Vs}\dot{T}_s &= \lambda_s T_s'' - 2\frac{\alpha}{h}T_s, \\ c_{Vn}\dot{T}_n &= \lambda_n T_n'' + \rho_0(1 + \beta T_n)\overline{j^2} - 2\frac{\alpha}{h}T_n, \\ T_s(0, t) &= 0, \quad T_n'(x, t)|_{x=\delta} = 0, \\ T_s[x_b(t), t] &= T_n[x_b(t), t] = T_c, \\ \lambda_s T_s'(x, t)|_{x=x_b(t)} &= \lambda_n T_n'(x, t)|_{x=x_b(t)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь c_{Vs} , c_{Vn} , λ_s , λ_n — объемные теплоемкости и теплопроводности сверхпроводящей и нормальной фаз соответственно; ρ_0 — сопротивление нормальной фазы; β — температурный коэффициент сопротивления; $\overline{j^2}$ — среднее за период значение квадрата плотности тока; α — коэффициент теплоотдачи; h — толщина пленки; x_b — координата фазовой границы; T_c — критическая температура. Последние слагаемые в правых частях уравнений (1) учитывают тепловые потери за счет конвективного теплообмена на поверхности. При этом ввиду малости h считаем, что тепловое сопротивление и температурный градиент в направлении нормали к поверхности отсутствуют.

Переходя к нормированным переменным $\Theta = T/T_c$, $\xi = x/\delta$, приведем задачу (1) к безразмерному виду

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{a_s}\dot{\Theta}_s(\xi, t) &= \Theta_s''(\xi, t) - 2\text{Bi}_s\Theta_s(\xi, t), \\ \frac{\delta^2}{a_n}\dot{\Theta}_n(\xi, t) &= \Theta_n''(\xi, t) - \kappa\Theta_n(\xi, t) + K, \\ \Theta_s(0, t) &= 0, \quad \Theta_n'(\xi, t)|_{\xi=1} = 0, \\ \Theta_s[\xi_b(t), t] &= \Theta_n[\xi_b(t), t] = 1, \\ \lambda_s\Theta_s'[\xi, t]|_{\xi=\xi_b(t)} &= \lambda_n\Theta_n'[\xi, t]|_{\xi=\xi_b(t)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\text{Bi} = \alpha\delta^2/h\lambda$ — произведение собственного критерия Био $\alpha\delta/\lambda$ на критерий подобия параметрического вида δ/h , а $\kappa = 2\text{Bi}_n - \beta\rho_0\overline{j^2}\delta^2/\lambda_n$ и $K = \rho_0\overline{j^2}\delta^2/\lambda_n T_c$ — вспомогательные параметры. Решение задачи (2) ищем в виде суммы стационарного и нестационарного решений

$$\Theta(\xi, t) = \bar{\Theta}(\xi) + u(\xi, t), \quad \xi_b(t) = \bar{\xi}_b + \xi_b(t), \quad (3)$$

где $u(\xi, t)$ — малое

$$u(\bar{\xi}_b, t)/\bar{\Theta}(\bar{\xi}_b) \ll 1, \quad (4)$$

симметричное возмущение состояния равновесия. Нелегко показать (рис. 1), что для подобного возмущения температурного поля смещение координаты фазовой границы $\xi_b(t)$ будет также малым. Тогда условия непрерывности задачи (2), предварительно записанные как

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_s[\bar{\xi}_b + \xi_b(t)] + u_s[\bar{\xi}_b + \xi_b(t), t] \\ = \bar{\Theta}_n[\bar{\xi}_b + \xi_b(t)] + u_n[\bar{\xi}_b + \xi_b(t), t] = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_s\{\bar{\Theta}'_s[\bar{\xi}_b + \xi(t)] + u'_s[\bar{\xi}_b + \xi(t), t]\} \\ = \lambda_n\{\bar{\Theta}'_n[\bar{\xi}_b + \xi(t)] + u'_n[\bar{\xi}_b + \xi(t), t]\}, \end{aligned} \quad (5)$$

можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $\bar{\xi}_b$ по переменной $\xi_b(t)$ [3]. Отбросив нелинейные относительно возмущений члены, получим линейное приближение условий непрерывности

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_s(\bar{\xi}_b) + \bar{\Theta}'_s(\bar{\xi}_b)\xi_b(t) + u_s(\bar{\xi}_b, t) \\ = \bar{\Theta}_n(\bar{\xi}_b) + \bar{\Theta}'_n(\bar{\xi}_b)\xi_b(t) + u_n(\bar{\xi}_b, t) = 1, \\ \lambda_s[\bar{\Theta}'_s(\bar{\xi}_b) + \bar{\Theta}''_s(\bar{\xi}_b)\xi_b(t) + u'_s(\bar{\xi}_b, t)] \\ = \lambda_n[\bar{\Theta}'_n(\bar{\xi}_b) + \bar{\Theta}''_n(\bar{\xi}_b)\xi_b(t) + u'_n(\bar{\xi}_b, t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Разделяя стационарные и нестационарные составляющие в задаче (2), с учетом (6) имеем

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_s''(\xi) = -2\text{Bi}_s\bar{\Theta}_s(\xi) = 0, \quad \bar{\Theta}_n''(\xi) - \kappa\bar{\Theta}_n(\xi) + K = 0, \\ \bar{\Theta}_s(0) = 0, \quad \bar{\Theta}_n'(\xi)|_{\xi=1} = 0, \\ \bar{\Theta}_s(\bar{\xi}_b) = \bar{\Theta}_n(\bar{\xi}_b) = 1, \quad \lambda_s\bar{\Theta}_s'(\xi)|_{\xi=\bar{\xi}_b} = \lambda_n\bar{\Theta}_n'(\xi)|_{\xi=\bar{\xi}_b}; \quad (7) \\ \frac{\delta^2}{a_s}\dot{u}_s(\xi, t) = u_s''(\xi, t) - 2\text{Bi}_s u_s(\xi, t), \\ \frac{\delta^2}{a_n}\dot{u}_n(\xi, t) = u_n''(\xi, t) - \kappa u_n(\xi, t), \\ u_s(0, t) = 0, \quad u_n'(\xi, t)|_{\xi=1} = 0, \\ u_s(\bar{\xi}_b, t) + \bar{\Theta}'_s(\bar{\xi}_b)\xi_b(t) \\ = u_n(\bar{\xi}_b, t) + \bar{\Theta}'_n(\bar{\xi}_b)\xi_b(t) = 0, \\ \lambda_s[u'_s(\bar{\xi}_b, t) + \bar{\Theta}''_s(\bar{\xi}_b)\xi_b(t)] \\ = \lambda_n[u'_n(\bar{\xi}_b, t) + \bar{\Theta}''_n(\bar{\xi}_b)\xi_b(t)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Стационарная задача (7) рассматривалась в работе [1], где было показано, что при значениях параметра $\sigma = K/\kappa$, меньших критического σ_c , система имеет только однородное решение $\bar{\Theta}(\xi) = 0$, соответствующее сверхпроводящему состоянию пленки. При $\sigma \gg \sigma_c$ у задачи (7) появляются неоднородные решения вида

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_s(\xi) = \frac{\text{sh}\sqrt{2\text{Bi}_s}\xi}{\text{sh}\sqrt{2\text{Bi}_s}\bar{\xi}_b^{(m)}}; \quad \xi < \bar{\xi}_b^{(m)}, \\ \bar{\Theta}_n(\xi) = \sigma + (1 - \sigma)\frac{\text{ch}\sqrt{\kappa}(1 - \xi)}{\text{ch}\sqrt{\kappa}(1 - \bar{\xi}_b^{(m)})}; \quad \xi > \bar{\xi}_b^{(m)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где комплекс $\sigma = K/\kappa$ имеет тот же смысл, что и параметр Стекли¹ $\sigma_0 = \overline{j^2}\rho_0 h/2\alpha T_c$ для классического

¹ Параметром Стекли называется безразмерная величина σ_0 , которая служит мерой отношения характерной мощности тепловыделения $\overline{j^2}\rho_0 dV$ к теплоотводу $\alpha(T_c - T_0)dS$ в сверхпроводниках с транспортным током. В частности, для тонких пленок на основе классических сверхпроводников $\sigma_0 = \overline{j^2}\rho_0 h/2\alpha(T_c - T_0)$. Для материалов с большим температурным коэффициентом сопротивления роль параметра Стекли, как показано в [1], выполняет комплекс $\sigma = K/\kappa$.

сверхпроводника, с которым он связан соотношением $\sigma = \sigma_0 / (1 - \beta T_c \sigma_0)$.

Координата фазовой границы $\bar{\xi}_0^{(m)}$ определяется как корень уравнения

$$\text{cth} \sqrt{2\text{Bi}_n \frac{\sigma_0}{\sigma}} (1 - \bar{\xi}_b) \text{cth} \sqrt{2\text{Bi}_s \bar{\xi}_b} = (\sigma - 1) \sqrt{\frac{\lambda_n \sigma_0}{\lambda_s \sigma}}. \quad (10)$$

Для планарных структур на основе классических сверхпроводников число состояний равновесия m в за- критической области ($\sigma > \sigma_c$) равно двум. Для высо- котемпературных сверхпроводников, согласно [1], воз- можно более двух стационарных состояний. Следует уточнить, что речь идет о многофронтовых двухфазных состояниях, анализ которых требует соответствующей постановки краевой задачи.

Исследование устойчивости неоднородных стационарных состояний

Для определения устойчивости двухфазных состояний по первому приближению ищем решения задачи (8). Два последних граничных условия этой задачи задают непрерывность нестационарных компонент температуры и теплового потока на фазовой границе. Рассмотрим эти условия более подробно.

Подстановка искомого решения в виде $u(\xi, t) = V(\xi) \exp(\nu t)$ в условие непрерывности температуры приводит к следующему закону движения фазовой гра- ницы

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_b(t) &= - \frac{V_s(\bar{\xi}_b)}{\bar{\Theta}'_s(\bar{\xi}_b)} \exp(\nu t), \\ \dot{\xi}_b(t) &= - \frac{V_n(\bar{\xi}_b)}{\bar{\Theta}'_n(\bar{\xi}_b)} \exp(\nu t). \end{aligned} \quad (11)$$

Исключая $\dot{\xi}_b(t)$ из (11) и принимая во внимание, что

$$\frac{\bar{\Theta}'_s(\bar{\xi}_b)}{\bar{\Theta}'_n(\bar{\xi}_b)} = \frac{\lambda_n}{\lambda_s}, \quad (12)$$

преобразуем первое из условий непрерывности в более простое

$$\frac{V_s(\bar{\xi}_b)}{V_n(\bar{\xi}_b)} = \frac{\lambda_n}{\lambda_s}. \quad (13)$$

Условие непрерывности теплового потока с уче- том (11) запишем как

$$\left[\frac{V'_s(\xi)}{V_s(\xi)} = \frac{\bar{\Theta}''_s(\xi)}{\bar{\Theta}'_s(\xi)} \right]_{\xi=\bar{\xi}_b} = \left[\frac{V'_n(\xi)}{V_n(\xi)} - \frac{\bar{\Theta}''_n(\xi)}{\bar{\Theta}'_n(\xi)} \right]_{\xi=\bar{\xi}_b}. \quad (14)$$

Разделяя переменные в (8) и заменяя условия непре- рывности на (13), (14) приходим к задаче Штурма– Лиувилля

$$V_s''(\xi) = \mu_s^2 V_s(\xi), \quad V_n''(\xi) = \mu_n^2 V_n(\xi),$$

$$V_s(0) = 0; \quad V'(\xi)|_{\xi=1} = 0, \quad \frac{V_s(\bar{\xi}_b)}{V_n(\bar{\xi}_b)} = \frac{\lambda_n}{\lambda_s},$$

$$\left[\frac{V'_s(\xi)}{V_s(\xi)} = \frac{\bar{\Theta}''_s(\xi)}{\bar{\Theta}'_s(\xi)} \right]_{\xi=\bar{\xi}_b} = \left[\frac{V'_n(\xi)}{V_n(\xi)} - \frac{\bar{\Theta}''_n(\xi)}{\bar{\Theta}'_n(\xi)} \right]_{\xi=\bar{\xi}_b}, \quad (15)$$

где

$$\mu_s^2 = \frac{\delta^2}{a_s} \nu + 2\text{Bi}_s, \quad \mu_n^2 = \frac{\delta^2}{a_n} \nu + \kappa.$$

Ее решения, удовлетворяющие первым трем гранич- ным условиям, имеют вид

$$V_s(\xi) = C \text{sh} \mu_s \xi, \quad (16)$$

$$V_n(\xi) = C \frac{\lambda_s}{\lambda_n} \frac{\text{sh} \mu_s \bar{\xi}_b}{\text{ch} \mu_n (1 - \bar{\xi}_b)} \text{ch} \mu_n (1 - \xi), \quad (17)$$

где C — константа.

Подставив (9), (16) и (17) в последнее граничное условие, получим уравнение на собственные числа опе- раторов (15)

$$\begin{aligned} &\mu_s \text{cth} \mu_s \bar{\xi}_b + \mu_n \text{th} \mu_n (1 - \bar{\xi}_b) \\ &= \sqrt{2\text{Bi}_s} \text{th} \sqrt{2\text{Bi}_s} \bar{\xi}_b + \sqrt{\kappa} \text{cth} \sqrt{\kappa} (1 - \bar{\xi}_b). \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, для определения устойчивости ста- ционарных решений (9) необходимо найти корни ха- рактеристического уравнения (18) для соответствующих значений параметра $\bar{\xi}_b$.

Дальнейшая идеализация математической модели

Анализ уравнения (18) в его общем виде представляет достаточно сложную задачу, поэтому ограничимся ис- следованием двухфазного состояния сверхпроводника с низким температурным коэффициентом сопротивления в малой окрестности точки перехода. Очевидно, что в этом случае теплопроводности сверхпроводящей и нормальной фаз, а также критерии Био можно полагать равными $\lambda_s = \lambda_n$, $\text{Bi}_s = \text{Bi}_n \equiv \text{Bi}$. Ввиду малости $\rho_0 \beta$ допустимо принять $\kappa = 2\text{Bi}$ и положить $\mu_n = \mu_s \equiv \mu$, тем самым значительно упростив уравнение (18),

$$\mu [\text{cth} \mu \bar{\xi}_b + \text{th} \mu (1 - \bar{\xi}_b)] = A, \quad (19)$$

где

$$A = \sqrt{2\text{Bi}} \left(\text{th} \sqrt{2\text{Bi}} \bar{\xi}_b + \text{cth} \sqrt{2\text{Bi}} (1 - \bar{\xi}_b) \right). \quad (20)$$

Теперь доказательство устойчивости стационарных ре- шений сводится к вычислению μ для заданных $\bar{\xi}_b$ и Bi и определению знака параметра

$$\nu = \frac{a}{\delta^2} (\mu^2 - 2\text{Bi}). \quad (21)$$

Левая часть уравнения (20) является функцией ком- плексного переменного $\mu = \mu' + i\mu''$, в то время как

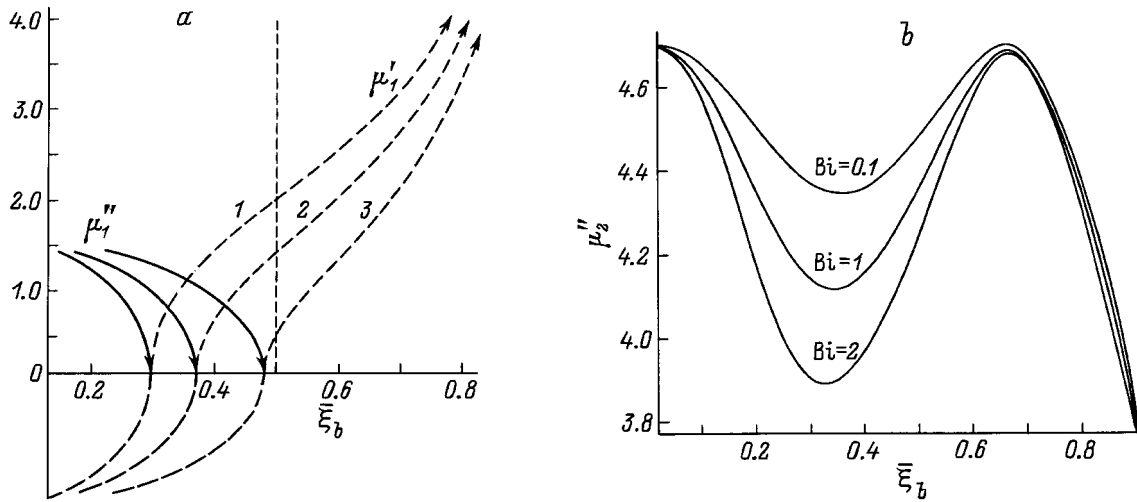


Рис. 2. Зависимость корней характеристического уравнения от координаты фазовой границы. *a* — сплошная линия в верхней полуплоскости соответствует положению первого корня уравнения (23) на мнимой числовой оси, пунктирная — на вещественной оси. Критерий Био: 1 — 2, 2 — 1, 3 — 0.1; *b* — второй корень уравнения (23).

правая часть уравнения — неявная функция управляющего параметра $A = A[\bar{\xi}_b(\sigma)]$ от μ не зависит. Разделив в (20) действительную и мнимую части и исключив из полученных выражений A , приходим к уравнению

$$\frac{\mu'' \operatorname{ch} \mu' \cos \mu'' + \mu' \operatorname{sh} \mu' \sin \mu''}{\mu' \operatorname{ch} \mu' \cos \mu'' - \mu'' \operatorname{sh} \mu' \sin \mu''} = \frac{\operatorname{ch} \mu' \sin \mu'' + \operatorname{ch} \mu'(2\bar{\xi}_b - 1) \sin \mu''(2\bar{\xi}_b - 1)}{\operatorname{sh} \mu' \cos \mu'' + \operatorname{sh} \mu'(2\bar{\xi}_b - 1) \cos \mu''(2\bar{\xi}_b - 1)}. \quad (22)$$

Результаты численного поиска корней уравнения (22) свидетельствуют, что комплексных корней уравнение не имеет, а все точки спектра лежат или на вещественной, или на мнимой оси. Поочередно полагая в (21) $\mu = i\mu''$ и $\mu = \mu'$, приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} & \frac{2\mu'' \cos \mu''}{\sin \mu'' + \sin(2\bar{\xi}_b - 1)\mu''} \\ &= \sqrt{2\operatorname{Bi}} \left(\operatorname{th} \sqrt{2\operatorname{Bi}}\bar{\xi}_b + \operatorname{cth} \sqrt{2\operatorname{Bi}}(1 - \bar{\xi}_b) \right), \\ & \frac{2\mu' \operatorname{ch} \mu''}{\operatorname{sh} \mu' + \operatorname{sh}(2\bar{\xi}_b - 1)\mu'} \\ &= \sqrt{2\operatorname{Bi}} \left(\operatorname{th} \sqrt{2\operatorname{Bi}}\bar{\xi}_b + \operatorname{cth} \sqrt{2\operatorname{Bi}}(1 - \bar{\xi}_b) \right). \quad (23) \end{aligned}$$

Первое из уравнений (23) имеет бесконечное число корней μ''_k , два из которых показаны на рис. 2, *a, b*. На рис. 2, *a* видно, что с ростом $\bar{\xi}_b$ первая пара комплексно сопряженных корней $\pm i\mu''_1$ стремится к нулю. При определенном значении параметра Стекли, когда $\bar{\xi}_b = \xi_c$, где ξ_c — корень уравнения

$$\sqrt{2\operatorname{Bi}}\bar{\xi}_b [\operatorname{th} \sqrt{2\operatorname{Bi}}\bar{\xi}_b + \operatorname{cth} \sqrt{2\operatorname{Bi}}(1 - \bar{\xi}_b)] = 1, \quad (24)$$

первая пара корней переходит на вещественную числовую ось. При этом отрицательный корень переходит

на положительную полуось и наоборот. Таким образом, появляется единственная пара корней у второго из уравнений (23).

Устойчивость состояний равновесия (9) определяется дальнейшим ходом кривой $\mu'(\bar{\xi}_b)$. Как показано на рис. 3, кривая зависимости $\bar{\xi}_b(\sigma_0)$ симметрична относительно $\xi = 0.5$, поэтому в одном из состояний равновесия, например $m = 1$, всегда $\bar{\xi}_b < 0.5$, во втором состоянии равновесия $\bar{\xi}_b > 0.5$. Легко убедиться, что при переходе вещественного корня через точку $\xi = 0.5$, т.е. при переходе от одного состояния равновесия к другому, параметр ν меняет знак при любых Bi . Для этого во втором из уравнений (23) необходимо положить $\bar{\xi}_b = 0.5$ и численно разрешить его относительно μ^2 . Предста-

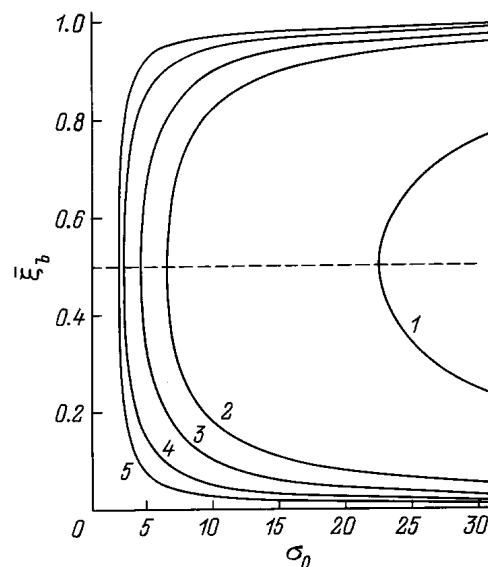


Рис. 3. Зависимости координаты фазовой границы от параметра Стекли. Bi : 1 — 0.1, 2 — 0.5, 3 — 1, 4 — 3, 5 — 7.

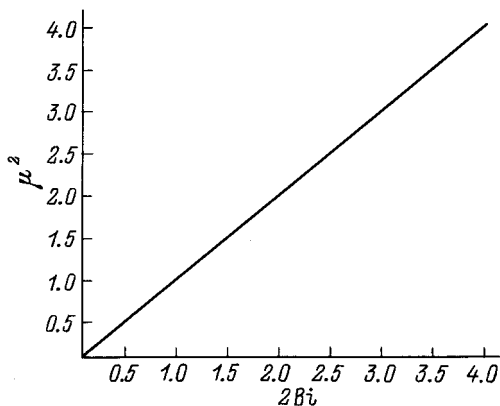


Рис. 4. Зависимость $\mu^2(2Bi)$ в точке ветвления стационарных решений при $\sigma = \sigma_c$.

Вспомогательный на рис. 4 график зависимости $\mu^2 = \mu^2(2Bi)$ доказывает, что независимо от критерия Био смена знака параметра ν_1 всегда происходит в точке $\xi_b = 0.5$ и, следовательно, второе состояние равновесия всегда неустойчиво.

В области $\bar{\xi}_b < \bar{\xi}_c$, когда все собственные числа оператора (16) мнимые $\mu_k = i\mu_k''(\bar{\xi}_b)$, решения (17), (18) краевой задачи (8), имеют вид

$$\Theta_s(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(\mu_k'' \xi) \exp(\nu_k t),$$

$$\Theta_n(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\lambda_s}{\lambda_n} \frac{\sin(\mu_k'' \bar{\xi}_b)}{\cos \mu_k'' (1 - \bar{\xi}_b)} \times \cos \mu_k'' (1 - \xi) \exp(\nu_k t), \quad (25)$$

где $\nu_k = -\frac{a_s}{\delta^2}(\mu_k''^2 + 2Bi)$ — отрицательно и состояния равновесия устойчивы.

При $\bar{\xi}_b > \bar{\xi}_c$ первое собственное значение оператора (16) становится вещественным $\mu_1 = \mu_1'(\bar{\xi}_b)$, а решения (25) преобразуются в

$$\Theta_s(\xi, t) = C \operatorname{sh}(\mu_1' \xi) \exp(\nu_1 t) + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \sin(\mu_k'' \xi) \exp(\nu_k t),$$

$$\Theta_n(\xi, t) = C \frac{\lambda_s}{\lambda_n} \frac{\operatorname{sh}(\mu_1' \bar{\xi}_b)}{\operatorname{ch} \mu_1' (1 - \bar{\xi}_b)} \operatorname{ch} \mu_1' (1 - \xi) \times \exp(\nu_1 t) + \sum_{k=2}^{\infty} C_k \frac{\lambda_s}{\lambda_n} \times \frac{\sin(\mu_k'' \bar{\xi}_b)}{\cos \mu_k'' (1 - \bar{\xi}_b)} \cos \mu_k'' (1 - \xi) \exp(\nu_k t). \quad (26)$$

При $\bar{\xi}_b > 0.5$ параметр ν меняет знак и решение (26) становится экспоненциально неустойчивым.

Исследование асимптотики стационарных решений

В заключение остановимся на физической природе неустойчивого состояния равновесия. Из соображений удобства переместим начало координат в центр пленки. Тогда стационарные решения (9) преобразуются в

$$\bar{\Theta}_s(\xi) = \frac{\operatorname{ch} \sqrt{2Bi_s}(1 - \xi)}{\operatorname{sh} \sqrt{2Bi_s}(1 - \bar{\xi}_b^{(m)})},$$

$$\bar{\Theta}_n(\xi) = \sigma + (1 - \sigma) \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\kappa_s} \xi}{\operatorname{ch} \sqrt{\kappa_s} \bar{\xi}_0^{(m)}}, \quad (27)$$

а условие (10) примет вид

$$\operatorname{cth} \sqrt{2Bi_n} \frac{\sigma_0}{\sigma} \bar{\xi}_b \operatorname{cth} \sqrt{2Bi_s}(1 - \bar{\xi}_b) = (\sigma - 1) \sqrt{\frac{\lambda_n \sigma_0}{\lambda_s \sigma}}. \quad (28)$$

Полагая $\bar{\xi}_b^{(1)} < \bar{\xi}_b^{(2)}$, рассмотрим состояние $m = 2$. При стремлении длины пленки к бесконечности, т. е. при вырождении системы по параметру δ координата свободной границы $\bar{\xi}_b^{(2)}$ также стремится к бесконечности, а температура нормальной фазы (27) — к пространственному однородному распределению

$$\bar{\Theta}_n(\xi) = \sigma. \quad (29)$$

Из (29) следует, что решение (27) соответствует состоянию, неоднородность которого обусловлена только близостью границы. При ее удалении на бесконечность система стремится к нормальному состоянию с однородным распределением температуры.

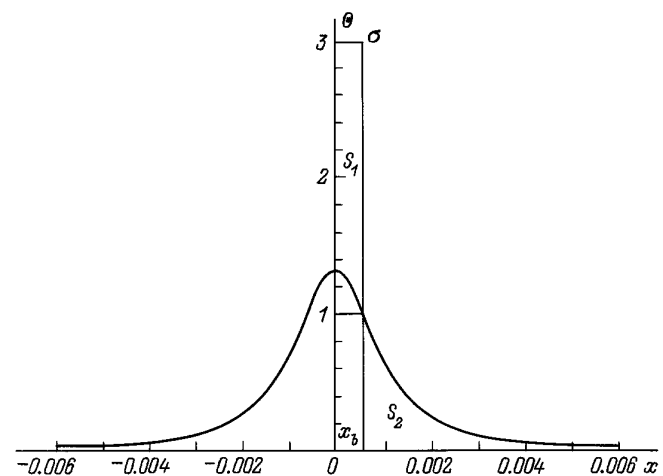


Рис. 5. Локально неоднородное состояние равновесия сверхпроводящей тонкой бесконечной пленки. Температурное поле соответствует параметрам системы $\beta = 0, \sigma = 3, 2\alpha/h\lambda_n = 10^6$. Дополнительные построения служат иллюстрацией к закону равных площадей.

В случае $m = 1$ предельный переход $\bar{x}_b \rightarrow \infty$ приводит к выражениям

$$\bar{\Theta}_s(x) = \exp \sqrt{\frac{2\alpha}{h\lambda_s}} (\bar{x}_b^{(1)} - x),$$

$$\bar{\Theta}_n(x) = \sigma + (1 - \sigma) \frac{\text{ch} \sqrt{2\alpha\sigma_0/h\lambda_n\sigma x}}{\text{ch} \sqrt{2\alpha\sigma_0/h\lambda_n\sigma \bar{x}_b^{(1)}}}, \quad (30)$$

где

$$\bar{x}_b^{(1)} = \sqrt{\frac{h\lambda_n\sigma}{2\alpha}} \text{arcth}(\sigma - 1) \sqrt{\frac{\lambda_n\sigma}{\lambda_s\sigma_0}}. \quad (31)$$

Те же самые выражения были получены в [4] как автомодельные решения, описывающие локализованное пространственно неоднородное состояние равновесия сверхпроводящей бесконечно длинной пленки (рис. 5).

Интересно отметить, что соотношение (31), так же как и (10), непосредственно вытекает из закона сохранения энергии. Их несложно получить, уравнив полное тепловыделение и тепловые потери в системе. Для пленки бесконечной длины соотношение (31) допускает следующую простую геометрическую интерпретацию. Найдем площади S_1, S_2 заштрихованных фигур на рис. 5

$$S_1 = \int_0^{\bar{x}_b} \bar{\Theta}_n(x) dx = (\sigma - 1) \sqrt{\frac{h\lambda_n\sigma}{2\alpha}} \text{th} \sqrt{\frac{2\alpha\sigma_0}{h\lambda_n\sigma}} \bar{x}_b,$$

$$S_2 = \int_{\bar{x}_b}^{\infty} \bar{\Theta}_s(x) dx = \sqrt{\frac{h\lambda_s}{2\alpha}}. \quad (32)$$

Приравняв S_1 и S_2 , вновь получаем соотношение (31), откуда следует, что $S_1 = S_2$. Последнее соотношение является своеобразным дополнением к закону равных площадей [5].

Самоподдерживающиеся локализованные неоднородные образования в диссипативных системах принято называть автосолитонами. В работе [4] состояние равновесия (30), (31) трактуется как автосолитон нормальной фазы, поскольку вопрос о его устойчивости на тот момент не был исследован. Выше то же самое состояние было получено как асимптотика неустойчивого решения при вырождении системы, поэтому можно ожидать, что оно останется неустойчивым и в случае пленки бесконечной длины.

Исследуем асимптотику характеристического уравнения (19), (20). При смещении начала координат в точку $\xi = 1$ уравнения (19), (20), записанные для правой

полуплоскости ($\xi > 0$), преобразуются в

$$\begin{aligned} & \bar{x}_b \sqrt{\frac{c_{vs}}{\lambda_s} \nu + \frac{2\alpha}{\lambda_s h}} \text{cth} \sqrt{\frac{c_{vs}}{\lambda_s} \nu + \frac{2\alpha}{\lambda_s h}} (\delta - \bar{x}_b) \\ & - \bar{x}_b \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda_s h}} \text{th} \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda_s h}} (\delta - \bar{x}_b) \\ & = -\bar{x}_b \sqrt{\frac{c_{vn}}{\lambda_n} \nu + \frac{2\alpha}{\lambda_n h}} \text{th} \sqrt{\frac{c_{vn}}{\lambda_n} \nu + \frac{2\alpha}{\lambda_n h}} \bar{x}_b \\ & + \bar{x}_b \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda_n h}} \text{cth} \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda_n h}} \bar{x}_b. \end{aligned} \quad (33)$$

Будем считать, что теплопроводности обеих фаз равны $\lambda_s = \lambda_n = \lambda$, а теплоемкость претерпевает скачок при переходе в сверхпроводящее состояние $c_{vs} = c_{vn} + \Delta c$. Введя обозначения

$$z = \bar{x}_b \sqrt{\frac{c_{vn}}{\lambda} \nu + \frac{2\alpha}{\lambda h}}, \quad y = \bar{x}_b \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda h}}$$

и устремив длину пленки к бесконечности $\delta \rightarrow \infty$, получим

$$z \left[\text{th} z \pm \sqrt{1 + \frac{\Delta c}{c_{vn}} \left(1 - \frac{y^2}{z^2}\right)} \right] - y(\text{cth} y \pm 1) = 0, \quad (34)$$

где знак "плюс" соответствует правой фазовой границе.

Уравнение (34), как и (22), не имеет комплексных корней, а для вещественных z существует только один корень, причем такой, что $z > y$. Отсюда следует, что параметр

$$\nu = \frac{\lambda}{c_{vn} \bar{x}_b^2} (z^2 - y^2)$$

всегда положителен, а решение (30), (31) неустойчиво.

Этот результат означает, что локализованное неоднородное состояние равновесия, рассмотренное в [4], не является стационарным автосолитоном. Оно не может возникнуть самопроизвольно, а искусственно созданное распределение температуры (30), (31) будет неустойчиво. С другой стороны, очевидно, что при больших значениях переменных неявно заданная функция (34) стремится к явному виду $y = z$. Положив $z - y = \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$, несложно получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} \varepsilon & \approx \frac{4}{2 + \Delta c/c_{nv}} z \exp(-2z), \\ \nu & = \frac{\lambda}{\bar{x}_b^2} \frac{8}{2c_n + \Delta c} z^2 \exp(-2z), \end{aligned} \quad (35)$$

согласно которой при значениях $y \gg 1$ характеристический показатель решения (26) практически равен нулю. Такое квазиустойчивое неоднородное образование может оставаться долгоживущим даже при сравнительно небольших размерах нормальной области $\bar{x}_b \sim 10^{-3}$ м.

Заключение

Результаты проведенного анализа позволяют утверждать, что из найденных в [2] неоднородных состояний равновесия тонкой сверхпроводящей пленки с током устойчиво состояние, которому отвечает область нормальной фазы большей протяженности. То обстоятельство, что устойчивость исследовалась только по отношению к симметричным возмущениям, в данном случае несущественно, поскольку из двух состояний равновесия, как правило, неустойчиво лишь одно.

В состоянии равновесия с меньшими размерами нормальной фазы условия на границе пленки слабо влияют на тепловой баланс и неоднородное решение остается локализованным при переходе к пленке бесконечной длины. В бесконечно длинной пленке это решение также неустойчиво, но при определенных параметрах системы время релаксации к локально-однородному состоянию равновесия может достигать большой величины. Неустойчивость данного состояния равновесия означает невозможность самопроизвольной локализации нормальной фазы (образования стационарного автосолитона) в рассматриваемой системе. Более перспективными в этом смысле могут оказаться тонкие пленки на основе новых сверхпроводников. Как было показано в [2], в пленках с большим температурным коэффициентом сопротивления возможно более двух состояний равновесия, поэтому представляется интересным исследовать асимптотику соответствующих устойчивых решений.

Список литературы

- [1] Рудый А.С. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 9. С. 85–92.
- [2] Franzen W. // J. Optic. Soc. Amer. 1963. Vol. 53. P. 596.
- [3] Rudy A.S., Kolesov A.Yu. // Nonlinear Analysis. 1997. Vol. 1.
- [4] Рудый А.С. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 20. С. 62–67.
- [5] Гуревич А.Вл., Миц Р.Г., Рахманов А.Л. Физика композитных сверхпроводников. М.: Наука, 1987. 240 с.