

01;12

## Математическое моделирование нестационарных режимов работы термоэлектрических источников тока

© Ю.И. Дударев, М.З. Максимов

Сухумский физико-технический институт АН Республики Абхазия,  
Сухуми, Абхазия

(Поступило в Редакцию 14 апреля 1997 г.)

Термоэлектрический способ преобразования энергии, основанный на использовании эффектов Зеебека, Томсона и Пельтье, широко используется уже несколько десятилетий в различных областях науки, техники и малой энергетики. Традиционно как в холодильной технике, так и в термоэлектрических генераторах использовались стационарные режимы работы. Нестационарные режимы охлаждения и генерации тока стали изучаться значительно позднее (Л.С. Стыльбансом и Н.А. Федорович [1], Е.К. Иорданишвили и его сотрудниками [2] и др.) и сразу же были выявлены некоторые преимущества таких режимов, особенно на начальной стадии функционирования, когда существенным является различие в инерционности тепловых и электрических процессов.

Термоэлектрические источники питания представляют собой многослойные структуры, температурные поля в которых определяются решением системы нелинейных дифференциальных уравнений теплопроводности с соответствующими граничными условиями — условиями подвода и отвода тепла. В общем виде в одномерном приближении такая система выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa_i(T) \frac{\partial T_i}{\partial x} \right] + j_i(t) \frac{\partial \alpha_i(T)}{\partial T_i} \frac{\partial T_i}{\partial x} + j_i^2(t) \rho_i(T) = C_i(T) \frac{\partial T_i}{\partial t},$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{Q_1(t)}{\kappa_0(0)} + b_1(T - T_1(t)) = f_1(t, T), \quad x = 0,$$

$$\frac{\partial T_L}{\partial x} - \frac{Q_2(t)}{\kappa_0(L)} + b_2(T - T_2(t)) = f_2(t, T), \quad x = L,$$

$$T(x, 0) = T_H(x), \quad (1)$$

где  $j$  — плотность тока;  $\kappa, \alpha$  — коэффициенты теплопроводности и термоэдс;  $\rho$  — удельное электрическое сопротивление;  $C$  — объемная теплоемкость,  $i$  — номер слоя.

Обычно теплофизические характеристики материалов в каждом слое можно представить в виде

$$\sigma(x, T) = \sigma_0(x) + \Delta\sigma(x, T), \quad \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} < 1. \quad (2)$$

Система (1) должна быть дополнена уравнениями для определения плотности тока  $j$ , которые зависят от электрической схемы соединения термоэлементов. В соответствии с методикой, изложенной в работе [3], решение этой задачи удобно представить в виде

$$T(x, t) = T_0(x, t) + U(x, t), \quad (3)$$

где  $T_0(x, t)$  — температура системы без учета зависимости теплофизических свойств и тепловых источников от температуры и токовых эффектов.

Переходя от многослойной системы к эффективной однородной на основе метода ВКБ [4], т.е. заменяя

$$x \rightarrow \Pi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a_0(x)}}, \quad a_0 = \frac{\kappa_0}{C_0} \quad (4)$$

и используя аппарат функций Грина [4], можно получить

$$\begin{aligned} T_0(x, t) = & \int_0^{\Pi(L)} T_H(\Pi') G(\Pi, t; \Pi', 0) d\Pi' \\ & - \int_0^{t^+} \left\{ \left( \frac{Q_1 \sqrt{a_0(0)}}{\kappa_0(0)} + b_1 \sqrt{a_0(0)} T_1(\tau) \right) \right. \\ & \times G(\Pi, t; 0, \tau) \\ & \left. - \left( \frac{Q_2 \sqrt{a_0(L)}}{\kappa_0(L)} + b_2 \sqrt{a_0(L)} T_2(\tau) \right) \right. \\ & \left. \times G(\Pi, t; \Pi(L), \tau) \right\} d\tau. \quad (5) \end{aligned}$$

Для определения  $U(x, t)$  будем иметь интегральное уравнение

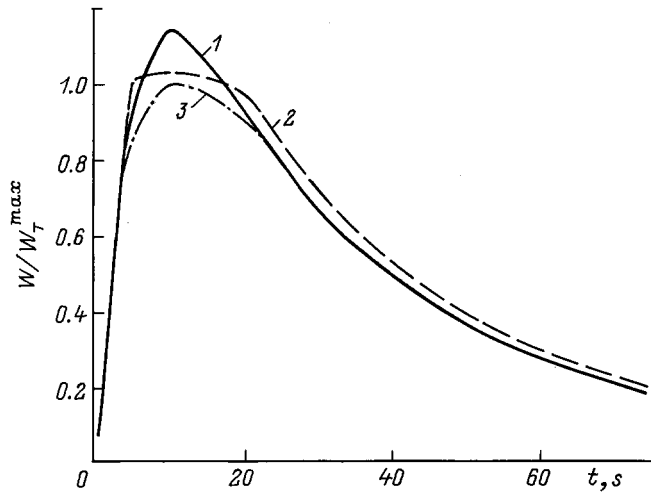
$$\begin{aligned} U(x, t) = & - \int_0^{t^+} \left\{ \int_0^{\Pi(L)} \Psi(\Pi', \tau) G(\Pi, t; \Pi', \tau) d\Pi' \right. \\ & + \sqrt{a_0(0)} f_1 G(\Pi, t; 0, \tau) \\ & \left. - \sqrt{a_0(L)} f_2 G(\Pi, t; \Pi(L), \tau) \right\} d\tau, \quad (6) \end{aligned}$$

где

$$\Psi = - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Delta\kappa(x, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \Delta C(x, T) \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$- j(t) \frac{\partial \alpha}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} - j^2(t) \rho(T);$$

$$f_k = - \frac{\Delta\kappa_k}{\kappa_0 k} \frac{\partial T}{\partial x} + \omega_k(t, T), \quad k = 1, 2,$$



Зависимость параметра  $W/W_T^{\max}$  от времени, 1 — расчет по предложенной методике, 2 — эксперимент, 3 — точное решение.

$Q_k, \omega_k$  — известные функции; верхний предел  $t^+$  означает, что интегрирование по  $\tau$  проводится до  $t + \varepsilon$  с последующим переходом к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;  $G(\Pi(x), t; \Pi(x'), \tau)$  — функция Грина системы (1), для ее приближенного определения применялся метод ВКБ

$$G(\Pi, t; \Pi', \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} N(\Pi, \Pi', p) \times \exp[p(t - \tau)] dp, \quad (7)$$

$$N \simeq \frac{\left[ \operatorname{ch} \sqrt{p} \Pi' - \frac{b_1 \sqrt{a_0(0)}}{\sqrt{p}} \operatorname{sh} \sqrt{p} \Pi' \right]}{R} \times \left\{ \frac{b_2 \sqrt{a_0(L)}}{\sqrt{p}} \operatorname{sh} \sqrt{p} [\Pi(L) - \Pi] + \operatorname{ch} \sqrt{p} [\Pi(L) - \Pi] \right\},$$

$$R = \sqrt{p} \left[ \left( \frac{b_2 \sqrt{a_0(L)}}{\sqrt{p}} - \frac{b_1 \sqrt{a_0(0)}}{\sqrt{p}} \right) \operatorname{ch} \sqrt{p} \Pi(L) + \left( 1 - \frac{b_1 b_2 \sqrt{a_0(0) a_0(L)}}{\sqrt{p}} \right) \operatorname{sh} \sqrt{p} \Pi(L) \right], \quad (8)$$

$\Pi > \Pi'$ .

При  $\Pi < \Pi'$  необходимо поменять местами  $\Pi$  и  $\Pi'$ . Уравнение (6) легко решается методом последовательных приближений, за нулевое принимают  $T_0(x, t)$ .

Следует отметить, что применение асимптотических методов [5], в частности приведенного метода сращивания (ПСМ) [6], позволяет существенно упростить расчетные соотношения. При малых временах

$$\frac{t}{\Pi_0^2(L)} < \frac{1}{4}$$

и небольшой плотности тока

$$j < 0.1 \frac{\kappa}{\alpha L}$$

влиянием токовых эффектов на температуру можно пренебречь, что значительно сокращает вычислительную процедуру. Эффективные характеристики для многослойных систем могут быть получены с помощью правила сумм для собственных значений исходных задач [7].

На рисунке показано изменение во времени относительной электрической мощности термогенератора  $W/W_T^{\max}$ , полученное путем расчета по предлагаемой методике (кривая 1), точным решением (кривая 3) и экспериментально (кривая 2). Экспериментальные данные получены А.А. Соколовым (СФТИ). Сравнение этих результатов показывает их удовлетворительное согласие, что позволяет рекомендовать разработанный метод для расчета и анализа характеристик конкретных термоэлектрических устройств.

Математическое моделирование нестационарных режимов работы термоэлектрических генераторов показало, что для ускорения вывода термогенератора на заданный энергетический режим необходимо снижать толщину переходных слоев со стороны горячих спаев и применять в них материалы с высокими коэффициентами температуропроводности. Для поддержания длительного функционирования системы следует увеличивать ее теплоемкость, температуру или теплотворную способность источника тепла. От этих же факторов существенно зависит и амплитуда выходного электрического сигнала.

### Список литературы

- [1] *Стильбанс Л.С., Федорович Н.А.* // ЖТФ. 1958. Т. 28. № 3. С. 489–492.
- [2] *Иорданишвили Е.К., Бабин В.П.* Нестационарные процессы в термоэлектрических и термомагнитных системах преобразования энергии. М.: Наука, 1983. 216 с.
- [3] *Дударев Ю.И., Максимов М.З.* // ТВТ. 1988. Т. 26. № 4. С. 824–827.
- [4] *Морс Ф.М., Фейсбах Г.* Методы теоретической физики. М.: ИЛ, 1958. Т. 1, 2.
- [5] *Дударев Ю.И., Кашин А.П., Лозбин В.И., Марченко О.В.* // ИФЖ. 1982. Т. 42. № 3. С. 492–493.
- [6] *Кашин А.П., Кварацхелия Т.М., Максимов М.З., Чиковани З.Е.* // ТМФ. 1989. Т. 78. № 3. С. 392–399.
- [7] *Дударев Ю.И., Кашин А.П., Максимов М.З.* // ИФЖ. 1985. Т. 48. № 2. С. 333–334.