

01

## Электростатическое поле тонкой незамкнутой сферической оболочки и тора

© Г.Ч. Шушкевич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, 230023 Гродно, Белоруссия

(Поступило в Редакцию 5 марта 1997 г.)

Электростатическая задача для тонкой незамкнутой сферической оболочки и тора с помощью формул, связывающих сферические и тороидальные гармонические функции, сведена к парным сумматорным уравнениям по полиномам Лежандра. Парные уравнения преобразуются к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Получены формулы для вычисления зарядов проводников в виде ряда по малому параметру. Для некоторых геометрических параметров проводников вычислена конденсаторная емкость.

При проектировании различных устройств возникает необходимость расчета электростатического поля проводников различной конфигурации [1–3]. В данной работе рассматривается электростатическая задача для тонкой незамкнутой сферической оболочки  $S$  и тора  $T$ , причем сферическая оболочка расположена на поверхности сферы  $S_1$ , которая не пересекает тор (рис. 1).

Ранее методом эквивалентных зарядов решена задача электростатики для сферы и тора с общей осью вращения [4]. Методом парных уравнений решена электростатическая задача для незамкнутой сферической оболочки  $S$  и тора  $T$  в случае, когда поверхность  $S_1$  пересекает тор [5].

1. Рассмотрим осесимметричную электростатическую задачу для тонкой незамкнутой сферической оболочки  $S$  и тора  $T$  с малым радиусом  $r$  и большим  $R$ . Оболочка  $S$  расположена на сфере  $S_1$  радиуса  $d$ . Осевое сечение проводников показано на рис. 1. Для аналитического описания проводников с точкой  $O$ -центром сферы  $S_1$

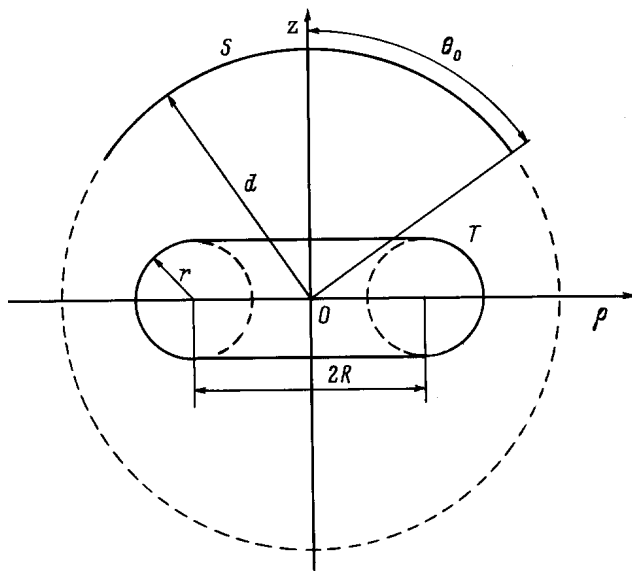


Рис. 1.

связем сферические координаты  $\{r, \Theta, \varphi\}$

$$x = r \cos \varphi \sin \Theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \Theta, \quad z = r \cos \Theta$$

$$(0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \Theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

и тороидальные координаты  $\{\alpha, \beta, \varphi\}$  [6]

$$x = \frac{c \operatorname{sh} \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{c \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad z = \frac{c \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}$$

$$(0 \leq \alpha < \infty, \quad -\pi < \beta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad c = \sqrt{R^2 - r^2}).$$

Тогда рассматриваемые проводники описываются следующим образом:

$$T = \left\{ \alpha = \alpha_0 = \ln \left( \frac{R}{r} + \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1} \right), \right.$$

$$\left. 0 \leq \beta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\},$$

$$S = \{r = d, \quad 0 \leq \Theta \leq \Theta_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Для решения задачи условно разбиваем все пространство  $E_3$  сферой  $S_1$  на две области:  $W_1 (r > d)$  и  $W_2 = E_3 / (W_1 \cup T)$ . Потенциалы электростатического поля в этих областях обозначим  $U_1$  и  $U_2$  соответственно. Потенциалы  $U_i$  должны удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta U_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

граничным условиям

$$U_2|_T = V, \text{const}, \quad (2)$$

$$U_2|_S = V_s \text{const} \quad (3)$$

и условию на бесконечности

$$U_1(M) \rightarrow 0 \text{ при } M \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где  $M$  — произвольная точка пространства.

Кроме того, должно выполняться условие непрерывности потенциала на сфере  $S_1$  и условие непрерывности

поля на части сферы  $S_1$ , которая не является проводником, т. е.

$$U_1 = U_2, \quad r = d, \quad 0 \leq \Theta \leq \pi, \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} = \frac{\partial U_2}{\partial r}, \quad r = d, \quad \Theta_1 < \Theta \leq \pi. \quad (6)$$

2. Согласно методу разделения переменных, потенциалы  $U_i$ ,  $i = 1, 2$  электростатического поля представим в виде [6,7]

$$U_1(r, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{d}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \Theta) \quad \text{в } W_1, \quad (7)$$

$$U_2 = U_2^{(1)}(r, \Theta) + U_2^{(2)}(\alpha, \beta) \quad \text{в } W_2, \quad (8)$$

где

$$U_2^{(1)}(r, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{d}\right)^n P_n(\cos \Theta), \quad (9)$$

$$U_2^{(2)}(\alpha, \beta) = \sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)} \sum_{n=0}^{\infty} (M_n \cos n\beta + N_n \sin n\beta) \frac{P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha)}{P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)}, \quad (10)$$

$P_n(\cos \Theta)$  — полиномы Лежандра,  $P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha)$  — функции Лежандра первого рода [6–8].

Потенциал  $U_1(r, \Theta)$  удовлетворяет условию на бесконечности (4). Неизвестные коэффициенты  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $M_n$ ,  $N_n$  определяются из условий (2), (3), (5), (6).

Для решения задачи необходимы следующие формулы, связывающие сферические и тороидальные гармонические функции [9]:

$$r^n P_n(\cos \Theta) = \frac{c^n}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} D_n^s \sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)} \times Q_{s-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha) e^{is\beta}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)} P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha) e^{in\beta} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s c^{s+1} D_n^s r^{-s-1} P_s(\cos \Theta), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$D_n^s = 2P_n(0) + \sum_{k=1}^s g_k^s (sP_{n-k}^k(0) - iknP_{n-k}^{k-1}(0)), \quad (13)$$

$$D_n^{-s} = \overline{D_n^s}, \quad g_k^s = \frac{2^{3k+1} k! (s+k+1)!}{((2k)!)^2 (s-k)!},$$

$$P_n^m(0) = \frac{2^m}{\sqrt{\pi}} \cos \left[ \frac{(n+m)\pi}{2} \right] \frac{\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)},$$

$\Gamma(n)$  — гамма-функция,  $Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha)$  — функции Лежандра второго рода,  $P_{n-k}^k(x)$  — присоединенные функции Лежандра [6–8].

Для выполнения граничного условия (2) на поверхности тора  $T$  запишем потенциал  $U_2^{(1)}(r, \Theta)$  через тороидальные гармонические функции, используя формулу (11). Тогда

$$U_2^{(1)}(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)}}{2\pi} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{c}{d}\right)^p a_p D_p^n \right) Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha) e^{in\beta}. \quad (14)$$

Используя формулы

$$\cos n\beta = \frac{1}{2} (e^{in\beta} + e^{-in\beta}), \quad \sin \beta = \frac{1}{2i} (e^{in\beta} - e^{-in\beta})$$

и следующие соотношения для функций Лежандра [6,8]:

$$P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha) = P_{-n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha), \quad Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha) = Q_{-n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha),$$

можно записать потенциал  $U_2^{(2)}(\alpha, \beta)$  в комплексной форме

$$U_2^{(2)}(\alpha, \beta) = \sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha)}{P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)} e^{in\beta}, \quad (15)$$

где

$$x_n = \frac{1}{2} (M_n - iN_n), \quad x_{-n} = \frac{1}{2} (M_n + iN_n),$$

$$\bar{x}_n = x_{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Согласно представлениям (14), (15), граничное условие (2) на поверхности тора принимает вид

$$\begin{aligned} & \sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( x_n + \frac{1}{2\pi} Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0) \right. \\ & \left. \times \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{c}{d}\right)^p a_p D_p^n \right) e^{in\beta} = V_t. \end{aligned} \quad (16)$$

Разделив обе части (16) на  $\sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta)}$  и воспользовавшись разложением [6]

$$\frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta)}} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0) e^{in\beta},$$

из (16) получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( x_n + \frac{1}{2\pi} Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0) \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{c}{d}\right)^p a_p D_p^n \right) e^{in\beta} \\ &= \frac{V_t}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0) e^{in\beta} \end{aligned} \quad (17)$$

или в силу единственности разложения в ряд Фурье

$$x_n + \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha_0)}{2\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{c}{d}\right)^p a_p D_p^n = \frac{V_t}{\pi} Q_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha_0),$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18)$$

Для выполнения граничного условия (3) на поверхности сферической оболочки  $S$  и условий непрерывности (5), (6) запишем потенциал  $U_2^{(2)}(\alpha, \beta)$  через сферические гармонические функции, используя формулу (12). В результате имеем

$$U_2^{(2)}(r, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{x_s D_n^s}{P_{s-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha_0)} \right) \times \left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \Theta). \quad (19)$$

Согласно представлениям (7), (9), (19) и условию ортогональности полиномов Лежандра  $P_n(\cos \Theta)$ , на отрезке  $[0, \pi]$  условие непрерывности (5) эквивалентно выражению

$$b_n = a_n + f_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (20)$$

где

$$f_n = (-1)^n \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{x_s D_n^s}{P_{s-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha_0)}. \quad (21)$$

Граничное условие (5) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + f_n) P_n(\cos \Theta) = V_s, \quad 0 \leq \Theta < \Theta_0. \quad (22)$$

Вычислив производные

$$\frac{\partial}{\partial r} U_1(r, \Theta), \quad \frac{\partial}{\partial r} U_2^{(i)}(r, \Theta), \quad i = 1, 2,$$

выполнив условие непрерывности (6) и приняв во внимание соотношение (20), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n P_n(\cos \Theta) = 0, \quad \Theta_0 < \Theta \leq \pi. \quad (23)$$

Таким образом, условия (3), (5), (6) приводят к парным сумматорным уравнениям по полиномам Лежандра

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \Theta) = F(\Theta), \quad 0 \leq \Theta < \Theta_0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n P_n(\cos \Theta) = 0, \quad \Theta_0 < \Theta \leq \pi, \quad (24)$$

где

$$F(\Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (V_s \delta_{0n} - f_n) P_n(\cos \Theta), \quad (25)$$

$\delta_{0n}$  — символ Кронекера.

Вместо коэффициентов  $a_n$  введем в рассмотрение новую функцию  $\varphi(x)$  ( $\varphi(x) \in C_{[0, \Theta_0]}^{(1)}$ ) по формуле

$$a_n = \int_0^{\Theta_0} \varphi(x) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx. \quad (26)$$

Тогда парные уравнения (24) преобразуются к виду [10, с. 166]

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{F(\Theta) \sin \Theta d\Theta}{\sqrt{2(\cos \Theta - \cos x)}}, \quad 0 < x < \Theta_0. \quad (27)$$

Подставляя функцию  $F(\Theta)$  из (25) в (27) и принимая во внимание интеграл [10, с. 198]

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{P_n(\cos \Theta) \sin \Theta d\Theta}{\sqrt{2(\cos \Theta - \cos x)}} = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x,$$

получим, что

$$\varphi(x) = \frac{2V_s}{\pi} \cos \frac{x}{2} - \frac{2}{\pi} \times \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x, \quad 0 < x < \Theta_0. \quad (28)$$

Подставляя  $a_n$  из (26) в (18), устанавливаем связь между коэффициентами  $x_s$  и функцией  $\varphi(x)$

$$x_s = \frac{Q_{s-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha_0)}{2\pi} \left( 2V_t - \int_0^{\Theta_0} \left( \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{c}{d}\right)^p D_p^s \times \cos\left(p + \frac{1}{2}\right) u \right) \varphi(u) du \right), \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (29)$$

Подставляя  $x_s$  из (29) в (21), а  $f_n$  из (21) в правую часть (28), после некоторых преобразований получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) - \int_0^{\Theta_0} K(x, u) \varphi(u) du = H(x), \quad 0 < x < \Theta_0, \quad (30)$$

где ядро интегрального уравнения имеет вид

$$K(x, u) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{c}{d}\right)^{n+p+1} \times \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x \cos\left(p + \frac{1}{2}\right) u R_{np}, \quad (31)$$

$$R_{np} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{Q_{s-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha_0)}{P_{s-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha_0)} D_n^s D_p^s, \quad (32)$$

а правая часть

$$H(x) = \frac{2V_s}{\pi} \cos \frac{x}{2} - \frac{2V_t}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{c}{d}\right)^{n+1} \times \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x T_n, \quad (33)$$

$$T_n = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{Q_{s-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)}{P_{s-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)} D_n^s. \quad (34)$$

3. Полный заряд  $Q_s$  тонкой незамкнутой сферической оболочки  $S$  вычисляется по формуле

$$Q_s = 4\pi \varepsilon d \int_0^{\Theta_0} \varphi(x) \cos \frac{x}{2} dx, \quad (35)$$

а полный заряд  $Q_t$  тора  $T$  — по формуле

$$Q_t = 8\pi \varepsilon c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x_n}{P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)} = 4\varepsilon c \left( 2V_t S_0 - \int_0^{\Theta_0} \left( \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{c}{d}\right)^p T_p \cos \left(p + \frac{1}{2}\right) t \right) \varphi(t) dt \right), \quad (36)$$

где

$$S_0 = \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s \frac{Q_{s-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)}{P_{s-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)}, \quad \delta_s = \begin{cases} 1, & s = 0, \\ 2, & s \geq 1, \end{cases}$$

$\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды.

Зная заряды проводников, можно вычислить конденсаторную емкость по формуле [1]

$$C = \frac{C_{11}C_{12} + C_{11}C_{22} + C_{12}C_{22}}{C_{11} + C_{22}}, \quad (37)$$

где  $C_{11} = Q_s$  при  $V_s = V_t = 1$ ,  $C_{22} = Q_t$  при  $V_s = V_t = 1$ ,  $C_{12} = Q_s$  при  $V_s = 0$ ,  $V_t = -1$ ,  $C_{21} = Q_t$  при  $V_s = -1$ ,  $V_t = 0$ ,  $C_{12} = C_{21}$ .

В общем случае решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода (30) можно получить численными методами [11].

Положим, что  $\mu = c/d \ll 1$ , и в дальнейшем будем считать, что  $\mu^n \approx 0$  при  $n > 4$ . В этом случае решение интегрального уравнения (30) можно представить в виде ряда по малому параметру  $\mu$

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)\mu + \varphi_2(x)\mu^2 + \varphi_3(x)\mu^3 + \dots, \quad (38)$$

где  $\varphi_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — неизвестные функции.

Разложим ядро интегрального уравнения (31) и правую часть (33) также в ряд по малому параметру  $\mu$

$$K(x, u) = \frac{1}{\pi^2} \left[ \cos \frac{x}{2} \cos \frac{u}{2} R_{00} \mu + \left( \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3u}{2} - \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{u}{2} \right) R_{10} \mu^2 + \left( \cos \frac{x}{2} \cos \frac{5u}{2} R_{20} - \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{3u}{2} R_{11} + \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{u}{2} R_{02} \right) \mu^3 + \dots \right],$$

$$H(x) = \frac{2}{\pi} \left[ V_s \cos \frac{x}{2} - \frac{V_t}{\pi} \cos \frac{x}{2} T_0 \mu + \frac{V_t}{\pi} \cos \frac{3x}{2} T_1 \mu^2 - \frac{V_t}{\pi} \cos \frac{5x}{2} T_2 \mu^3 + \dots \right].$$

Подставляя разложения для  $K(x, u)$ ,  $H(x)$ ,  $\varphi(x)$  в (30) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$ , найдем функции  $\varphi_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\varphi_0(x) = \frac{2V_s}{\pi} \cos \frac{x}{2}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{\pi^2} (V_s R_{00} \alpha_{00} - 2V_t T_0) \cos \frac{x}{2},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{V_s}{\pi^2} \left( \alpha_{10} \cos \frac{x}{2} - \alpha_{00} \cos \frac{3x}{2} \right) R_{10} + \frac{\alpha_{00}}{2\pi^3} (V_s R_{00} \alpha_{00} - 2V_t T_0) R_{00} \cos \frac{x}{2} + \frac{2V_t}{\pi^2} T_1 \cos \frac{3x}{2},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{V_s}{\pi^2} \left( R_{20} \alpha_{20} \cos \frac{x}{2} - R_{11} \alpha_{10} \cos \frac{3x}{2} + R_{02} \alpha_{00} \cos \frac{5x}{2} \right) + \frac{R_{10}}{2\pi^3} (V_s R_{00} \alpha_{00} - 2V_t T_0) \times \left( \alpha_{10} \cos \frac{x}{2} - \alpha_{00} \cos \frac{4x}{2} \right) - \frac{2V_t}{\pi^2} T_2 \cos \frac{5x}{2} + R_{00} \cos \frac{x}{2} \left( \frac{1}{4\pi^4} (V_s R_{00} \alpha_{00} - 2V_t T_0) R_{00} \alpha_{00}^2 + \frac{V_t}{\pi^3} T_1 \alpha_{10} \right),$$

где

$$\alpha_{kn} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin(k-n)\Theta_0}{k-n} + \frac{\sin(k+n+1)\Theta_0}{k+n+1} \right), \quad \frac{\sin(k-n)\Theta_0}{k-n} \Big|_{k=n} = \Theta_0.$$

Из (13) следует, что  $D_0^s = 2$ ,  $D_1^s = -4is$ ,  $D_2^s = -1 - 4s^2$ ,  $D_n^{-s} = \overline{D_n^s}$ ,  $s \geq 0$ ,  $n = 0, 1, 2$ . Тогда из представлений (32), (34) имеем

$$R_{00} = 4S_0, \quad R_{11} = 8S_1, \quad R_{20} = R_{02} = -2S_2,$$

$$T_0 = 2S_0, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = -S_2, \quad S_1 = S_2 S_0,$$

Таблица 1.

		Значения параметра $p$								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$S_0$		1.139	1.393	1.633	1.896	2.205	2.598	3.143	4.016	5.903
$S_2$		1.189	1.601	2.140	2.909	4.086	6.052	9.811	18.87	55.68

Таблица 2.

$\Theta_0, \circ$	Значения нормированной конденсаторной емкости $\tilde{C}$			
	$\frac{R}{d} = \frac{1}{2}$	$\frac{R}{d} = \frac{2}{5}$	$\frac{R}{d} = \frac{1}{5}$	$\frac{R}{d} = \frac{1}{10}$
10	0.113	0.106	0.089	0.066
30	0.347	0.308	0.192	0.108
60	0.754	0.579	0.266	0.127
90	1.289	0.813	0.301	0.134
120	1.585	0.929	0.316	0.137
150	1.632	0.956	0.321	0.138
170	1.634	0.958	0.322	0.138

где

$$S_2 = \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s (1 + 4s^2) \frac{Q_{s-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha_0)}{P_{s-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha_0)}.$$

Подставляя разложение (38) в (35), (36), получим формулы для вычисления зарядов проводников в виде ряда по малому параметру  $\mu$

$$Q_s = 4\pi\epsilon d \left\{ V_s \alpha_{00} + \frac{2\alpha_{00}}{\pi} (V_s \alpha_{00} - V_t) S_0 \mu + \frac{4\alpha_{00}^2}{\pi^2} (V_s \alpha_{00} - V_t) S_0^2 \mu^2 + \left[ \frac{2V_s}{\pi} (2\alpha_{10}^2 S_1 - \alpha_{00} \alpha_{20} S_2) + \frac{8\alpha_{00}^3}{\pi^3} (V_s \alpha_{00} - V_t) S_0^3 + \frac{2V_t}{\pi} \alpha_{20} S_2 \right] \mu^3 + \dots \right\},$$

$$Q_t = 8c\epsilon \left\{ V_t S_0 - V_s \alpha_{00} S_0 - \frac{2\alpha_{00}}{\pi} (V_s \alpha_{00} - V_t) S_0^2 \mu - \left[ \frac{4\alpha_{00}^2}{\pi^2} (V_s \alpha_{00} - V_t) S_0^3 - V_s \alpha_{20} S_2 \right] \mu^2 + \dots \right\}.$$

Заряд тора, расположенного в заземленной сфере, вычисляется по формуле ( $V_s = 0, \Theta_0 = \pi$ )

$$Q_t = 8c\epsilon V_t S_0 \left( 1 + \frac{2}{\pi} S_0 \mu + \frac{4}{\pi^2} S_0^2 \mu^2 + \dots \right).$$

Для некоторых геометрических параметров проводников вычислена конденсаторная емкость  $C$ . Для численного решения интегральное уравнение Фредгольма второго

рода (30) было преобразовано в конечную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с помощью квадратурной формулы Симпсона [11]

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[ f_0 + f_{2n} + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2n-2}) \right], \quad (39)$$

где

$$f_i = f(a + ih), \quad h = \frac{b-a}{2n}, \quad i = 0, 1, \dots, 2n.$$

Конечная СЛАУ решалась методом Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице. Все бесконечные суммы вычислялись с точностью  $10^{-5}$ . Как выяснилось, для получения численного решения интегрального уравнения (30) с точностью 0.001 для рассматриваемых геометрических параметров проводников достаточно взять в (39) значение  $n = 20$ .

Функции Лежандра  $P_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha_0), Q_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha_0)$  вычислялись по формулам [6]

$$P_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(\text{ch } \alpha_0 + \text{sh } \alpha_0 \cos \varphi)^{n+0.5}},$$

$$Q_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch } \alpha_0) = \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi d\varphi}{\sqrt{2(\text{ch } \alpha_0 - \cos \varphi)}},$$

используя квадратурную формулу (39) ( $n = 20$ ).

В табл. 1 приведены значения  $S_0, S_2$  для некоторых значений  $p = r/R$ , а в табл. 2 — значения нормированной конденсаторной емкости  $\tilde{C} = C/(4\pi\epsilon d)$  для  $R/r = 2$  и некоторых значений  $R/d$  и угла раствора  $\Theta_0$  тонкой незамкнутой сферической оболочки  $S$ .

Сходным образом решается электростатическая задача для проводников, показанных на рис. 2. Только в этом

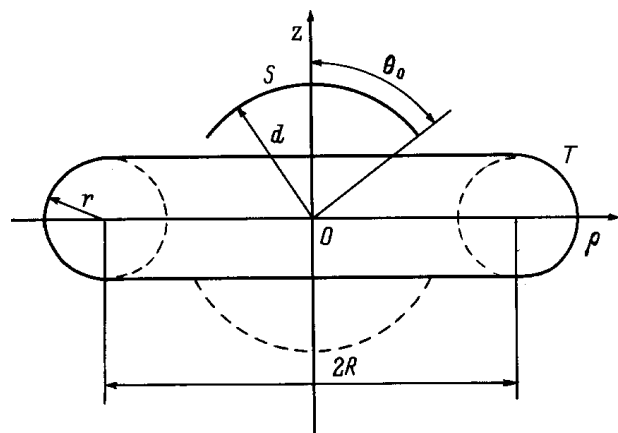


Рис. 2.

случае используются следующие формулы, связывающие сферические и тороидальные гармонические функции,

$$\begin{aligned}
 r^{-n-1} P_n(\cos \Theta) &= \frac{1}{2\pi c^{n+1}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_n^s \sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)} \\
 &\quad \times Q_{s-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha) e^{is\beta}, \\
 \sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)} P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha) e^{in\beta} \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s c^{-s} \tilde{D}_s^n r^{-s-1} P_s(\cos \Theta),
 \end{aligned}$$

где

$$\tilde{D}_n^s = 2P_n(0) + \sum_{k=1}^s g_k^s \left( sP_{n+k}^k(0) - ik(n+1)P_{n+k}^{k-1}(0) \right).$$

## Список литературы

- [1] *Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Л.* Расчет электрической емкости. Л.: Энергоиздат, 1981. 288 с.
- [2] *Ильин В.П.* Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985. 336 с.
- [3] *Boridy E.* // IEEE Trans. Electromagn. Compat. 1987. Vol. EMC. 29. N 2. P. 131–140.
- [4] *Chevallier J.P.* // J. Electrostatics. 1981. Vol. 9. N 2. P. 307–313.
- [5] *Уфлянд Я.С.* // ЖТФ. 1978. Т. 48. Вып. 8. С. 1741–1744.
- [6] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.: Л.: ГИТТЛ, 1953. 380 с.
- [7] *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.
- [8] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1984. 832 с.
- [9] *Ерофеев В.Т.* // Диф. уравнения. 1983. Т. XIX. № 8. С. 1416–1427.
- [10] *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
- [11] *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986. 732 с.