Журнал технической физики, 1998, том 68, № 7

01;05

Механические свойства материалов и предмет описания калибровочной теории

© Ю.В. Гриняев, Н.В. Чертова

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,
634821 Томск, Россия

(Поступило в Редакцию 9 января 1997 г.)

Полная деформация неупругого материала в рамках континуальной теории дефектов может быть представлена в виде суммы обратимой упругой деформации, связанной с внешними нагрузками, совместной упругопластической деформации, обусловленной дефектами материала, и совместной пластической, определяющей необратимое формоизменение материала. Предложенная схема разбиения деформации позволяет определить физическое содержание неупругих свойств материалов и предмет описания калибровочной модели, представляющей динамическое обобщение континуальной теории дефектов.

Введение

В многочисленных работах [1–6], посвященных калибровочному описанию деформации твердых тел с дефектами, наиболее подробно рассматривается математический формализм калибровочных теорий, связь с континуальной теорией дефектов, некоторые феноменологические обобщения теории и решения в виде плоских волн. Возможность описания основных механических свойств твердых тел в рамках данного подхода в названных работах не рассматривалась. Реальные материалы в той или иной мере проявляют три основных механических свойства: упругость, пластичность и вязкость. Упругие свойства материалов хорошо описываются классической теорией упругости [7], в которой рассматриваются обратимые равновесные процессы. В упругой области деформирования при изменении напряжений (независимого параметра) упругая деформация (сопряженный параметр) "мгновенно" подстраивается к равновесному значению, а при разгрузке система возвращается в начальное состояние по тому же пути, что и при нагрузке. Напряжения и упругие деформации как параметры, характеризующие состояние системы, однозначно связаны материальным соотношением — законом Гука. На основе диаграммы нагружения с последующей разгрузкой (рис. 1) можно установить, какая часть полной деформации обратима, т.е. является упругой. Деформация, оставшаяся в материале после упругой разгрузки, в феноменологических теориях пластичности полагается пластической. В теориях пластичности рассматриваются задачи, относящиеся к той части $\sigma-\varepsilon$-диаграммы, где нарушается линейная связь между деформациями и напряжениями. При решении задач пластичности наиболее часто реальные $\sigma-\varepsilon$-диаграммы апроксимируются совокупностью кусочно-ломаных прямых, представляющих идеальное упругопластическое тело или упругое тело с линейным упрочнением. Феноменологические модели вязких сред в упругой, пластической и упругопластической области деформирования (такое разделение принято в механике сплошных сред [8]) выражают зависимость напряженного состояния в некоторый момент времени t от истории нагружения за время от нуля до t. По мнению автора этой работы, полная деформация в вязкоупругом–вязкопластическом теле может быть представлена в виде суммы трех слагаемых

$$\varepsilon^{\text{tot}} = \varepsilon^{\text{el}} + \varepsilon^{\text{v}} + \varepsilon^{\text{pl}}, \tag{1}$$

где ε^{el}, ε^{v}, ε^{pl} — компоненты упругой, вязкой и пластической деформации.

Физическая природа составляющих деформации (1) в данной работе не рассматривалась. Чтобы выяснить содержание (1) и определить предмет описания калибровочной модели, проведем анализ полной деформации в рамках континуальной теории дефектов, причина обращения к которой будет пояснена в дальнейшем, при изложении математического алгоритма построения калибровочной теории.

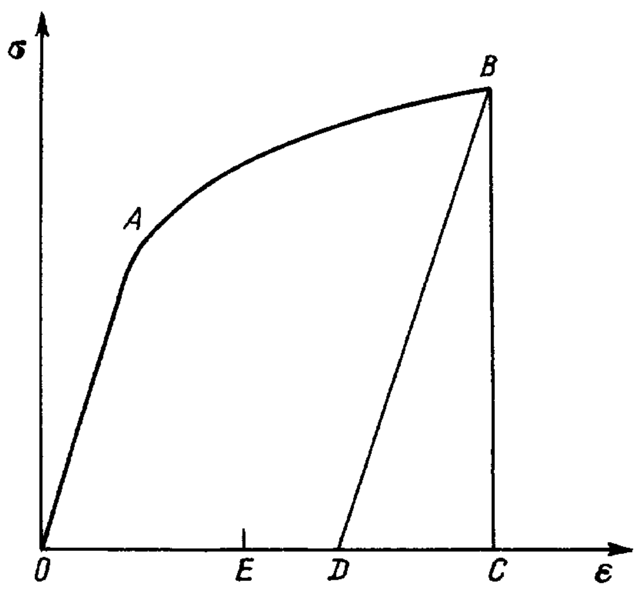

Рис. 1.

Анализ полной деформации в континуальной теории дефектов

Полная деформация в материале с дефектами может быть представлена в виде суммы трех слагаемых, известных в континуальной теории дефектов,

$$\varepsilon^{\text{tot}} = \varepsilon^{\text{el}} + \varepsilon^{\text{el-pl D}} + \varepsilon^{\text{pl}}, \tag{2}$$

каждое из которых представляет симметричную часть градиента непрерывного вектора смещений

$$u^{\text{tot}}_{(i,j)} = u^{\text{el}}_{(i,j)} + u^{\text{el-pl D}}_{(i,j)} + u^{\text{pl}}_{(i,j)}. \tag{3}$$

В записанном выражении и ниже индексы в круглых скобках обозначают симметрирование, а запятая — производную по координате. Первое слагаемое (2), (3) соответствует упругой деформации, связанной с внешними нагрузками, и при снятии их исчезает со скоростью звуковых волн. Деформация ε^{el} удовлетворяет условию совместности

$$e_{ikn}e_{jlm}\varepsilon^{\text{el}}_{nm,kl} = 0 \tag{4}$$

и может быть названа внешним полем, поскольку обусловлена внешними нагрузками. Второе слагаемое (2) определяет совместную упругопластическую деформацию, связанную с дефектами материала,

$$e_{ikn}e_{jlm}\varepsilon^{\text{el-pl D}}_{nm,kl} = 0. \tag{5}$$

Как принято в континуальной теории дислокаций, градиент $u^{\text{el-pl D}}$ представляет сумму упругой и пластической дисторсий

$$u^{\text{el-pl D}}_{i,j} = \beta^{\text{el D}}_{ji} + \beta^{\text{pl D}}_{ji}, \tag{6}$$

каждая из которых не является градиентом непрерывного вектора смещений. По определению, произвольно

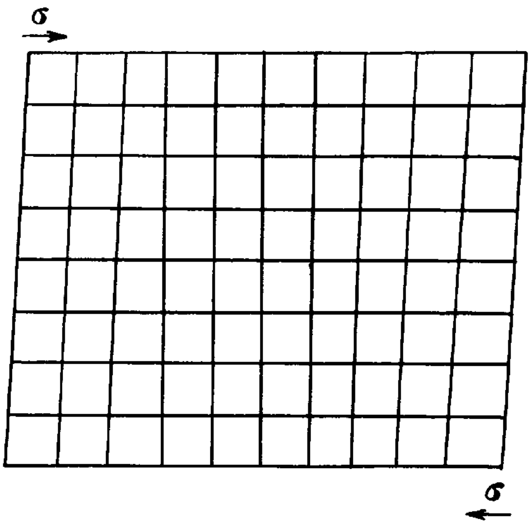

Рис. 2.

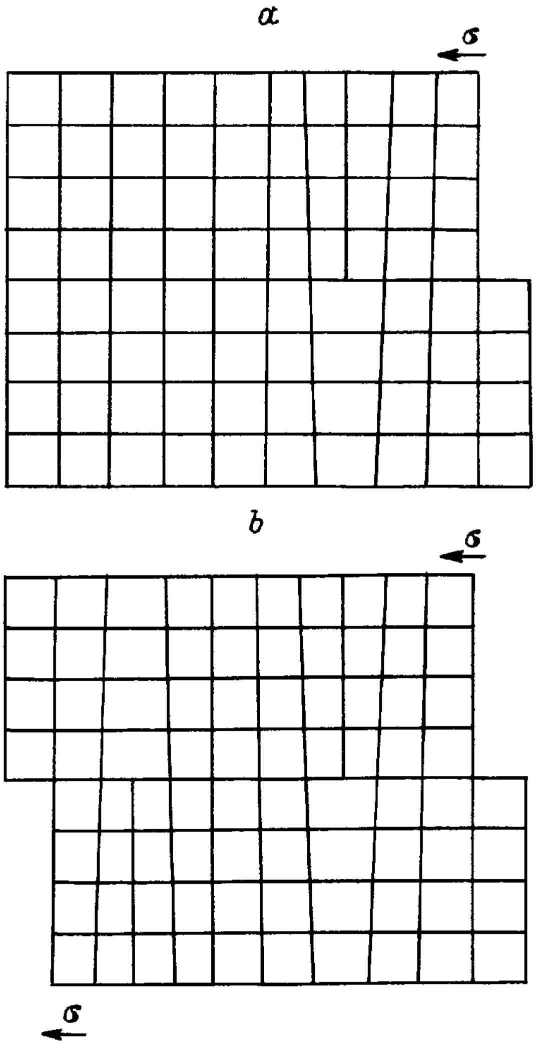

Рис. 3.

заданной пластической дисторсии $\beta^{\text{pl D}}$ соответствует плотность дислокаций

$$\alpha_{ij} = -e_{ikl}\beta^{\text{pl D}}_{lj,k}, \tag{7}$$

а упругая дисторсия $\beta^{\text{el D}}$ определяет искажения тела, которые обеспечивают его непрерывность при данной плотности дислокаций

$$e_{ikl}u^{\text{el-pl D}}_{j,lk} = e_{ikl}\left(\beta^{\text{el D}}_{lj,k} + \beta^{\text{pl D}}_{lj,k}\right) = 0. \tag{8}$$

Поскольку в отдельности $\beta^{\text{el D}}$ и $\beta^{\text{pl D}}$ не удовлетворяют условию совместности, то для их обозначения используется термин "несовместная упругая" и "несовместная пластическая" дисторсия. Для симметричной части $\beta^{\text{el D}}$ и $\beta^{\text{pl D}}$ условия совместности имеют вид

$$e_{ikn}e_{jlm}\beta^{\text{el D}}_{(nm),kl} = -e_{ikn}e_{jlm}\beta^{\text{pl D}}_{(nm),kl} = -\eta_{ij}, \tag{9}$$

где η — тензор несовместности.

Величины $\beta^{\text{el D}}$, обусловленные внутренними источниками — дефектами материала, можно считать внутренним упругим полем. Тензор несовместности η разделяет

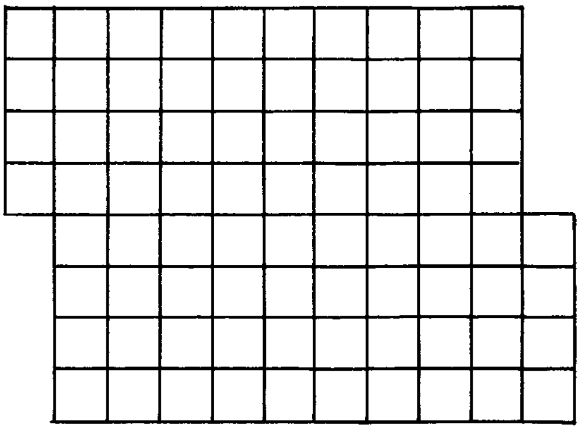

Рис. 4.

упругие поля деформаций (4), (9) на внешние и внутренние. Последнее слагаемое в (2) — ε^{pl} представляет совместную пластическую деформацию, не связанную с напряжениями, и определяет необратимое формоизменение материала за счет аннигиляции дефектов или выхода их на поверхность. Компоненты ε^{pl} удовлетворяют условию совместности

$$e_{ikn}e_{jlm}\varepsilon^{\text{pl}}_{nm,kl} = 0 \qquad (10)$$

и определяют деформацию "бездефектного" материала. С точки зрения структуры кристаллической решетки характер составляющих деформации ε^{el}, $\varepsilon^{\text{el-pl D}}$ и ε^{pl} представлен на рис. 2, 3, *a*, *b*, 4.

На $\sigma-\varepsilon$-диаграмме (рис. 1) упругой деформации ε^{el} соответствует участок *DC*. Деформация 0*D*, оставшаяся в материале после упругой разгрузки, в механике пластичности не изменяется со временем. При этом из рассмотрения выпадают процессы разрушения, которые происходят в материале в течение некоторого времени после снятия внешней нагрузки и релаксации внешних упругих полей ε^{el}. Известны различные механизмы разупрочнения. Наиболее изучены процессы, связанные с уменьшением количества дефектов, которые и обсуждаются в дальнейшем. Явление разупрочнения определяет процесс перехода материала из неравновесного состояния к равновесному. Движущей силой этого процесса является уменьшение энергии деформационных дефектов, определяемое величиной $\beta^{\text{el D}}$, путем перестройки дефектов в низкоэнергетические конфигурации, аннигиляции, ухода на стоки (поры, свободные поверхности и т. д.). В работе [9] разупрочнение рассматривается как явление обратного механического последействия (ОМП) и приводятся некоторые оценки деформации ОМП. При кручении или изгибе типичные значения деформации ОМП составляют $10^{-4}-10^{-2}$. При других способах нагружения эффекты ОМП еще меньше. Для сравнения величина предельной упругой деформации составляет десятые доли процента, если считать, что предел упругости чистых металлов $10-10^2$ MPa, а модуль Юнга имеет порядок 10^4-10^5 MPa [10]. Отсюда следует, что остаточная деформация 0*D* содержит необратимую пластическую часть 0*E* (ε^{pl}) и потенциально обратимую в процессах разупрочнения *ED* ($\varepsilon^{\text{el-pl D}}$). Материал в точке *D* после нагружения до точки *B* и последующей разгрузки неходится в неравновесном состоянии, поскольку в нем запасена упругая энергия внутренних полей. Переход к равновесию ОМП осуществляется путем релаксации несовместной упругой дисторсии ($\beta^{\text{el D}} \to 0$ целиком или частично). Как следует из (8), в результате релаксации $\beta^{\text{el D}}$ несовместная пластическая дисторсия $\beta^{\text{pl D}}$ становится совместной, т. е. определяется в виде градиента непрерывного вектора смещений и принадлежит участку 0*E*. Деформация участка 0*E* не определяет состояние материала, поскольку с энергетической точки зрения начальное (рис. 2) и конечное состояния (рис. 4) не различимы. Предложенная схема разбиения деформации идеализирована, поскольку все составляющие (2) взаимосвязаны и вряд ли можно в отдельности изучать их экспериментально. Однако такое представление позволяет установить взаимосвязь ε^{el}, $\varepsilon^{\text{el-pl D}}$, ε^{pl}, интерпретировать лагранжиан калибровочной модели или попытаться записать лагранжиан среды с дефектами на основе физических соображений и получить динамические уравнения, устанавливающие взаимодействие внешних и внутренних упругих полей.

Алгоритм построения калибровочной модели

Как показано в работах [1,4], на основе нелинейного лагранжиана теории упругости могут быть построены динамические модели твердого тела с дислокациями, дисклинациями и дефектами обоих типов. В качестве первого приближения в дальнейшем рассматривается линейная модель упругого тела с дислокациями. Схематично процедура построения калибровочной модели состоит в том, что записывается лагранжиан однородного изотропного упругого тела

$$L = \int dv \Big\{ \frac{\rho}{2}\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{\lambda}{2}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big\} \qquad (11)$$

и определяется его калибровочная група. В выражении (11) u_i — вектор упругих смещений, λ, μ — коэффициенты Ламэ, ρ — плотность материала. Исходный лагранжиан инвариантен относительно однородных трансляций

$$u_i(x,t) = u_i(x,t) + a_i, \qquad (12)$$

что соответствует переносу упругого тела как целого. Локализация группы трансляции

$$u_i(x,t) = u_i(x,t) + a_i(x,t) \qquad (13)$$

нарушает инвариантность (11), поскольку появляются добавки, связанные с дифференцированием параметров группы $a_i(x,t)$. Процедура минимальной замены, при которой обычные производные заменяются удлиненными

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \to D_j u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \beta_{ji}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} \to D_0 u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_i, \quad (14)$$

восстанавливает инвариантность (11) при неоднородных преобразованиях (13)

$$L_1 = \int dv \Big\{ \frac{\rho}{2} D_0 u_i D_0 u_i - \frac{\mu}{2}(D_j u_i D_j u_i - D_j u_i D_i u_j) - \frac{\lambda}{2} D_j u_j D_i u_i \Big\}. \quad (15)$$

При замене (14) появляются новые калибровочные или компенсирующие поля β_{ij}, v_i, с которыми, согласно [1], связана дополнительная кинетическая и потенциальная энергия, определяющая лагранжиан калибровочных полей

$$L_2 = \int dv \left\{ \frac{B}{2} I_{ij} I_{ij} - \frac{S}{2} \alpha_{ij} \alpha_{ij} \right\} \quad (16)$$

как функцию величин

$$I_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial t}, \quad \alpha_{ij} = e_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} \beta_{lj}, \quad (17), (18)$$

где B и S — новые константы теории.

Процедура построения калибровочной модели (11)–(18), более подробно описанная в [1,4], не раскрывает физического содержания потенциалов модели β, v, u. Чтобы решить эту задачу обратимся к схеме представления полной деформации в рамках континуальной теории дефектов (2), поскольку локализация группы трансляции в точке (13) соответствует введению единичной дислокации Вольтера, а функциональная зависимость от координат определяет усредненное распределение дефектов [11,12].

Физический смысл калибровочных полей

Согласно (2), (6), упругие искажения в материале с дефектами (14) определяются обратимой упругой дисторсией, связанной с внешними нагрузками, и несовместной упругой дисторсией, обусловленной дефектами материала,

$$D_j u_i = u^{\mathrm{el}}_{i,j} + \beta^{\mathrm{el\,D}}_{ji}. \quad (19)$$

Скорость полных смещений, определяющая кинетическую энергию L_1, может быть представлена в виде суммы скоростей упругих смещений и смещений обусловленных дефектами материала,

$$D_0 u_i = \frac{\partial u^{\mathrm{el}}_i}{\partial t} + v_i, \quad \text{где} \quad v_i = \frac{\partial}{\partial t} u^{\mathrm{el-pl\,D}}_i. \quad (20)$$

Скорость v^{pl}, вычисляемая как производная по времени от совместных пластических смещений u^{pl}, не дает вклада в кинетическую энергию L_1, поскольку приращение этой величины определяется процессами релаксации в системе дефектов, принадлежащих участку ED на рис. 1. Если предположить, что v^{pl} является слагаемым $D_0 u_i$, то необходимо допустить, что под действием внешней нагрузки все атомы в плоскости скольжения на протяжении макрообразца одновременно испытывают сдвиг на вектор, кратный периоду решетки. Это допущение невозможно в твердых телах, по мнению Коттрела [13], хотя такие процессы, наверное, могут протекать в жидкости и средах типа пластилин.

При найденных значениях потенциалов u^{el}, $\beta^{\mathrm{el\,D}}$, v лагранжиан калибровочных полей L_2 определяется тензором плотности дислокаций

$$\alpha_{ij} = e_{ikl} \beta^{\mathrm{el\,D}}_{lj,k} \quad (21)$$

и плотностью потока дислокаций I_{ij}. По определению,

$$I = -\frac{\partial \beta^{\mathrm{pl\,D}}}{\partial t}. \quad (22)$$

Несложные преобразования в рамках предложенной схемы (2) позволяют выразить тензор плотности потока дислокаций через тензор несовместной упругой дисторсии и скорость смещений, обусловленных дефектами материала

$$I_{ij} = -\frac{\partial}{\partial t}\big(u^{\mathrm{el-pl\,D}}_{j,i} - \beta^{\mathrm{el\,D}}_{ij}\big) = \frac{\partial \beta^{\mathrm{el\,D}}_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \quad (23)$$

Попытаемся обосновать лагранжиан калибровочной модели с физической точки зрения. Как ясно из анализа составляющих полной деформации рис. 1, состояние материала в точке B можно описать на основе модели смеси двух континуумов: упругого континуума и континуума дефектов. В упругом континууме формируется эффективное поле (19) как суперпозиция внешних и внутренних полей. Потенциальной энергии эффективных полей соответствует второй член L_1 (15). Кинетическая энергия материальных точек определяется скоростью (20). Состояние континуума дефектов характеризуется тензором плотности дислокаций (21) и плотностью потока дислокаций (23), однородные квадратичные функции которых определяют лагранжиан L_2 (16). Поскольку приращения совместных пластических смещений не дают вклада в потенциальную и кинетическую энергию, то полный лагранжиан калибровочной модели $(L = L_1 + L_2)$ может быть записан через вектор смещений $u^t = u^{\mathrm{el}} + u^{\mathrm{el-pl\,D}}$ и тензор дисторсии $\beta^{\mathrm{pl\,D}}$:

$$D_0 u_i = \frac{\partial u^t_i}{\partial t}, \quad D_j u_i = u^t_{i,j} - \beta^{\mathrm{pl\,D}}_{ji},$$

$$\alpha_{ij} = -e_{ikl} \beta^{\mathrm{pl\,D}}_{lj,k}, \quad I_{ij} = -\frac{\partial \beta^{\mathrm{pl\,D}}_{ij}}{\partial t}. \quad (24)$$

Стандартным образом из условия стационарности интеграла действия определяются динамические уравнения модели

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \lambda\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} - \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \mu\left(\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial x_j}\right) + \lambda\frac{\partial \beta_{kk}}{\partial x_i} = 0,$$

$$B\frac{\partial^2 \beta_{ij}}{\partial t^2} - S\left(\frac{\partial^2 \beta_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial^2 \beta_{kj}}{\partial x_k \partial x_i}\right) - \lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} - \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \mu(\beta_{ij} + \beta_{ji}) - \lambda\beta_{kk}\delta_{ij} = 0,$$

в которых опущены верхние индексы u^t, $\beta^{\mathrm{pl\,D}}$.

Заключение

Система уравнений движения калибровочной модели при любом выборе независимых переменных определяет динамику упругого тела с внутренними напряжениями. Предмет описания калибровочной теории наиболее выражен в соотношениях (19)–(23), где в качестве независимых переменных рассматриваются упругие величины u^{el}, $\beta^{\mathrm{el\,D}}$. Если феноменологическим путем учесть диссипацию энергии, связанную с релаксацией внешних и внутренних напряжений, например, как предложено в [5,6], то получим модель, описывающую вязкоупругие свойства материалов. Процессы накопления совместной пластической деформации, обусловленные аннигиляцией дефектов или выходом на стоки, в данной теории не учитываются, хотя определение этих закономерностей необходимо для создания физической теории пластичности. Динамические уравнения калибровочной модели могут быть использованы для анализа неупругого поведения материалов, предполагающего в общем случае существование трех составляющих деформации (2) лишь при условии, что совместная пластическая деформация незначительна. Необходимые условия реализуются в процессах ударноволнового нагружения, когда большая часть дефектов не успевает выйти на поверхность, обусловливая появление совместной пластической деформации.

Список литературы

[1] *Kadic A., Edelen D.G.B.* A Gauge Theory of Dislocations and Disclinations. Lecture Notes in Physics. Heidelberg: Springer, 1983. Vol. 174. 168 p.

[2] *Edelen D.G.B., Lagoudas D.C.* A Gaude Theory and Defects in Solids. Amsterdam: North Holland, 1988. 189 p.

[3] *Edelen D.G.B., Lagoudas D.C.* // Int. J. Eng. Sci. 1988. Vol. 26. N 8. P. 837–841.

[4] *Гриняев Ю.В., Чертова Н.В.* // Изв. вузов. Физика. 1990. № 2. С. 34–50.

[5] *Попов В.Л., Чертова Н.В.* // Изв. вузов. Физика. 1992. № 4. С. 81–93.

[6] *Chertova N.V.* // Int. J. Eng. Sci. 1988. Vol. 33. N 9. P. 1315–1318.

[7] *Ляв А.Э.* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935.

[8] *Пэжина П.* Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.

[9] *Волынцев А.Б.* Наследственная механика дислокационных ансамбле. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1990. 288 с.

[10] *Займовский В.А., Колупаева Т.Л.* Необычайные свойства обычных металлов. М.: Наука, 1984. 191 с.

[11] *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963. 268 с.

[12] *Де Витт Р.* Континуальная теория дисклинаций. М.: Мир, 1977. 208 с.

[13] *Коттрел А.* Теория дислокаций. М.: Мир, 1969. 95 с.