01;03

Анализ эффективности фокусировки импульсных волн давления в зависимости от начального распределения амплитуды и временно́го профиля

© Э.В. Иванов[1], Ю.В. Судьенков[2]

[1]Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики (Технический университет), 197101 Санкт-Петербург, Россия
[2]Санкт-Петербургский государственный университет, 198904 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 22 сентября 1997 г.)

Приведены решения параболического уравнения дифракции для процессов фокусировки импульсов давления, имеющих монополярный или двуполярный начальный профиль с колоколообразным или кольцевым распределением амплитуды. Проведен анализ полученных результатов и определены условия, обеспечивающие повышение эффективности фокусировки при переходе от колоколообразного распределения начальной амплитуды к кольцевому, а также при замене монополярного импульса двуполярным.

Изучение процессов фокусировки импульсных упругих волн в жидкости, как правило, ограничивается случаем импульса, имеющего монополярный начальный профиль с равномерным или колоколообразным радиальным распределением амплитуды. Это обусловлено ограничениями как теоретического, так и экспериментального плана, которые возникают при исследовании более сложных ситуаций. В наших экспериментах [1,2] была показана возможность значительного повышения эффективности фокусировки за счет использования импульсных пучков с кольцевым начальным распределением амплитуды, а в работе [3] аналогичные явления были обнаружены при изучении фокусировки импульсов, имеющих двуполярный начальный профиль.

Теоретический анализ процессов фокусировки импульсных волн давления с различными пространственными и временны́ми характеристиками достаточно сложен, в особенности при учете диссипативных и нелинейных эффектов, и может быть осуществлен лишь численно. Тем не менее в линейном параболическом приближении для некоторых частных случаев можно получить точные аналитические результаты, которые указывают пути повышения эффективности фокусировки за счет оптимизации начального временно́го профиля импульса и радиального распределения его амплитуды.

Постановка задачи

Ограничимся рассмотрением осесимметричных импульсных пучков, пренебрегая нелинейными и диссипативными явлениями и полагая

$$k_r/k_z \ll 1, \tag{1}$$

где k_z и k_r — соответственно аксиальная и радиальная компоненты волнового вектора.

В этом случае для описания процесса фокусировки применимо параболическое уравнение дифракции [4]

$$\left(\partial^2 p/\partial r^2 + r^{-1}\partial p/\partial r\right) c_0/2 = \partial^2 p/\partial z \partial\tau \tag{2}$$

с граничным условием

$$p(z=0,r,\tau) = p_0 f(r)\varphi\left(\tau + r^2/2Rc_0\right), \tag{3}$$

где p — приращение давления; z и r — соответственно аксиальная и радиальная координаты; $\tau = t - z/c_0$ — приведенное время, c_0 — скорость звука; $f(r)$ и $\varphi(\tau)$ — функции радиального распределения амплитуды и временно́го профиля импульса, нормированные на максимум; R — радиус кривизны исходного сферического фронта, p_0 — максимальное значение начальной амплитуды импульса.

Решения

1. Рассмотрим фокусировку импульса давления, имеющего монополярный начальный профиль с колоколообразным распределением амплитуды,

$$p_0 = p_0^{(1)}, \qquad f(r) = \exp\left(-r^2/r_0^2\right),$$
$$\varphi(\tau) = \exp\left(-\tau^2/\tau_0^2\right). \tag{4}$$

Используя метод преобразования Фурье [4], находим решение уравнения (2)

$$p(z,r,\tau) = p_0(2\pi)^{-1} \times \int_{-\infty}^{+\infty} s(\omega)D(z,r,\omega)\exp(-i\omega\tau)d\omega, \tag{5}$$

где $s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)\exp(i\omega\tau)d\tau$, $D = (1 - z/R + iz/d)^{-1} \times \exp\left[-(1 - z/R + iz/d)^{-1}(1 + id/R)r^2/r_0^2\right]$,

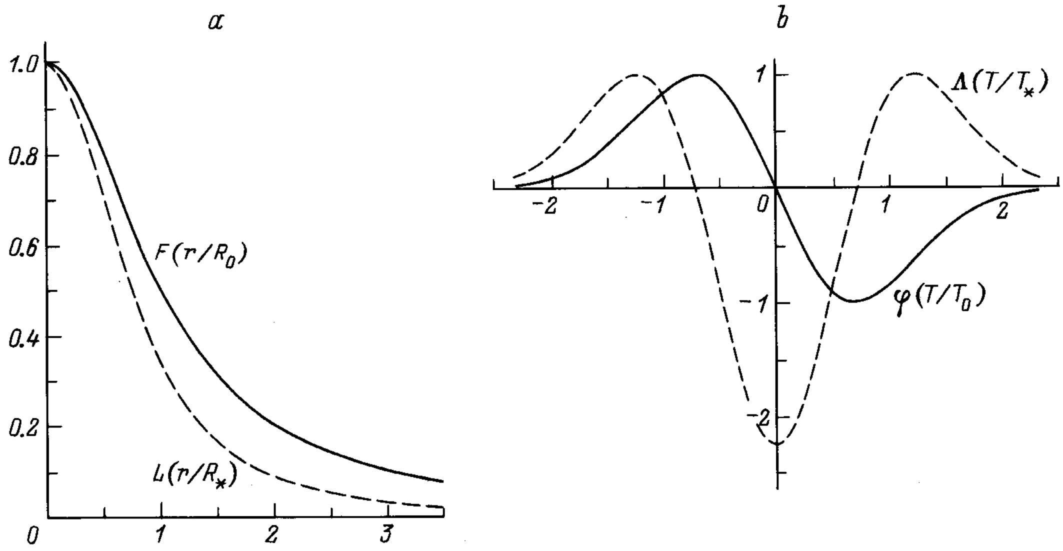

Рис. 1. Радиальное распределение амплитуды импульса давления (a) и его временно́й профиль (b) в плоскости $z = R$.

$d = \omega r_0^2/2c_0$ — дифракционная длина, т. е. поле давления в импульсном пучке представляется суммой бесконечного числа сходящихся монохроматических гауссовых пучков с непрерывно изменяющейся частотой.

Фокус монохроматического гауссова пучка всегда смещен относительно плоскости $z = R$ в направлении к источнику [4]. Соответственно фокус импульсного пучка, описываемого выражением (5), также должен быть расположен в плоскости $z = z_f < R$. Для гауссова пучка с частотой ω сдвиг фокуса будет тем незначительнее, а эффективность фокусировки тем выше, чем лучше выполнено условие [4]

$$\omega r_0^2/2Rc_0 \gg 1. \tag{6}$$

Следовательно, чем бо́льшая доля энергии импульса приходится на гармоники, частоты которых удовлетворяют условию (6), тем меньше различаются параметры поля давления в плоскостях $z = z_f$ и $z = R$ и острее фокусируется импульсный пучок. Поскольку наибольший интерес как раз представляет случай эффективной фокусировки, то будем считать, что $(R - z_f)/R \ll 1$, т. е. реальный фокус импульсного пучка практически совпадает с его геометрическим фокусом. Вычислим поле давления в плоскости $r = R$

$$p(z = R, r, \tau) = p_f^{(1)} F(r/R_0)\phi(T/T_0), \tag{7}$$

где $F(r/R_0) = \left(1 + r^2/R_0^2\right)^{-1}$ и $\phi(T/T_0) = -(2e)^{1/2} \times (T/T_0)\exp\left(-T^2/T_0^2\right)$ — функции радиального распределения амплитуды и временно́го профиля импульса, нормированные на максимум (рис. 1); $T = \tau - r^2/2Rc_0$; $T_0 = \tau_0\left(1 + r^2/R_0^2\right)^{1/2}$ — характерная длительность импульса; $R_0 = Rc_0\tau_0/r_0$ — радиус фокальной перетяжки по полувысоте; $p_f^{(1)} = p_0^{(1)} G^{(1)}$ — максимальное значение амплитуды фазы сжатия импульса давления, $G^{(1)} = t_0^2\sqrt{2e}Rc_0\tau_0$ — коэффициент усиления для фазы сжатия.

2. Импульс с кольцевым распределением начальной амплитуды и монополярным начальным профилем зададим следующим образом:

$$p_0 = p_0^{(2)}, \qquad f(r) = K\left[\exp\left(-r^2/r_2^2\right) - \exp\left(-r^2/r_1^2\right)\right],$$

$$\varphi(\tau) = \exp\left(-\tau^2/\tau_0^2\right), \tag{8}$$

где $K = \left(1 - x^{-2}\right)^{-1}\exp\left[2\left(x^2 - 1\right)^{-1}\ln x\right]$ — нормировочный коэффициент, причем $x = r_2/r_1 > 1$.

Используя линейность задачи, находим соответствующее решение в плоскости $z = R$

$$p(z = R, r, \tau) = p_f^{(2)}\left[F(r/R_2)\phi(T/T_2) - x^{-2}F(r/R_1)\phi(T/T_1)\right] / \left(1 - x^{-2}\right), \tag{9}$$

где $R_{1,2} = Rc_0\tau_0/r_{1,2}$, $T_{1,2} = \tau_0\left(1 + r^2/R_{1,2}^2\right)^{1/2}$, $p_f^{(2)} = p_0^{(2)}G^{(2)}$, $G^{(2)} = r_2^2\exp\left[2\left(x^2 - 1\right)^{-1}\ln x\right]/(2e)^{1/2} \times Rc_0\tau_0$.

3. Рассмотрим случай импульса, имеющего двуполярный начальный профиль с колоколообразным распределением амплитуды,

$$p_0 = p_0^{(3)}, \qquad f(r) = \exp\left(-r^2/r_0^2\right),$$

$$\varphi(\tau) = -(2e)^{1/2}(\tau/\tau_*)\exp\left(-\tau^2/\tau_*^2\right). \tag{10}$$

Аналогично выражению (7) запишем

$$p(z = R, r, \tau) = p_f^{(3)} L(r/R_*)\Lambda(T/T_*), \tag{11}$$

где $L(r/R_*) = \left(1 + r^2/R_*^2\right)^{-3/2}$ и $\Lambda(T/T_*) = \left(e^{3/2}/2\right) \times \left(2T^2/T_*^2 - 1\right)\exp\left(-T^2/T_*^2\right)$ — нормированные на свое максимальное значение функции радиального распределения амплитуды и временнóго профиля импульса (рис. 1); $R_* = Rc_0\tau_*/r_0$ и $T_* = \tau_*\left(1 + r^2/R_*^2\right)^{1/2}$ — характерный радиус фокальной перетяжки и длительность импульса; $p_f^{(3)} = p_0^{(3)}G^{(3)}$, $G^{(3)} = r_0^2 2^{1/2}/eRc_0\tau_*$.

В отличие от функции $\phi(T/T_0)$ значения максимума и минимума для функции $\Lambda(T/T_*)$ не совпадают по модулю (рис. 1, b): $|\Lambda(0)| = e^{3/2}/2 \cong 2.24$. Поэтому определим также максимальное значение амплитуды фазы разрежения в фокальной плоскости и соответствующий коэффициент усиления

$$P_f^{(3)} = p_f^{(3)}|\Lambda(0)| = p_0^{(3)} r_0^2 (e/2)^{1/2}/Rc_0\tau_*,$$

$$g^{(3)} = P_f^{(3)}/p_0^{(3)}. \qquad (12)$$

Таким образом, получены точные аналитические решения линейного параболического волнового уравнения, которые могут быть использованы для тестирования различных численных алгоритмов, а также позволяют определить методы повышения эффективности фокусировки импульсов давления за счет оптимизации их пространственных и временны́х характеристик.

Обсуждение результатов

1. Сопоставим результаты фокусировки импульсов с колоколообразным и кольцевым распределением начальной амплитуды. Отношение соответствующих коэффициентов усиления дает

$$\ln\left(G^{(2)}/G^{(1)}\right) = 2\left(\rho_2^2\ln\rho_2 - \rho_1^2\ln\rho_1\right)/\left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right), \quad (13)$$

где $\rho_{1,2} = r_{1,2}/r_0$, причем $\rho_1 < \rho_2$.

Анализ выражения (13) показывает, что возможны три различные ситуации: при $\rho_2 \geqslant 1$ $G^{(2)}/G^{(1)} > 1$, при $\rho_2 \leqslant e^{-1/2}$ $G^{(2)}/G^{(1)} < 1$, при $e^{-1/2} < \rho_2 < 1$ отношение $G^{(2)}/G^{(1)}$ может быть как больше, так и меньше единицы в зависимости от значения ρ_1. Например, для случая $\rho_1 = 1$ и $\rho_2 = 2$ соотношение (13) предсказывает значительный рост коэффициента усиления при замене колоколообразного начального распределения амплитуды кольцевым: $G^{(2)}/G^{(1)} = 2^{8/3} \cong 6.35$. Запишем выражения для $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, используя понятие эффективного угла сходимости β [5]. Для случая осесимметричных слабосходящихся пучков параметр β определяется выражением

$$\beta^2 \cong 2\int_0^\alpha f(\theta)\theta d\theta, \qquad (14)$$

где $\theta = r/R$ — угол, отсчитываемый от акустической оси; α — геометрический угол сходимости.

Предполагается, что угол α достаточно мал ($\alpha \leqslant 16°$), чтобы обеспечить справедливость параболического приближения [6,7], но в то же время велик по сравнению с характерными углами раскрытия волнового фронта θ_0 и θ_2, где $\theta_{0,2} = r_{0,2}/R$.

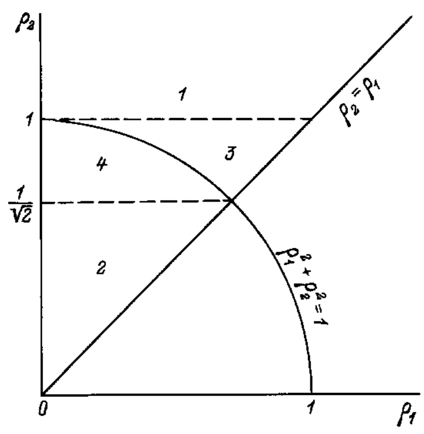

Рис. 2. Диаграмма фокальных давлений для импульса с кольцевым распределением начальной амплитуды.

С учетом (14) коэффициенты усиления $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ могут быть представлены в виде

$$G^{(1,2)} = R\left(\beta^{(1,2)}\right)^2/(2e)^{1/2}c_0\tau_0. \qquad (15)$$

Таким образом, возможные изменения коэффициента усиления при переходе от колоколообразного распределения начальной амплитуды к кольцевому определяются исключительно величиной эффективного угла сходимости.

При сравнении фокальных давлений будем исходить из условия постоянства акустической энергии на поверхности начального сферического фронта [4,5]

$$p_0^2\int_0^\alpha f^2(\theta)\theta d\theta = \text{const}, \qquad (16)$$

где учтена аксиальная симметрия задачи и малость θ.

Отсюда находим, что фокальные давления для случаев колоколообразного и кольцевого распределения начальной амплитуды связаны простым соотношением

$$p_f^{(2)}/p_f^{(1)} = \left(\rho_2^2 + \rho_1^2\right)^{1/2}, \qquad (17)$$

которое описывает в плоскости (ρ_1, ρ_2) при $\rho_1 < \rho_2$ дугу окружности с центром в начале координат и радиусом $p_f^{(2)}/p_f^{(1)}$. Очевидно, как и для отношения $G^{(2)}/G^{(1)}$, возможны три различных ситуации (рис. 2): при $\rho_2 \geqslant 1$ $p_f^{(2)}/p_f^{(1)} > 1$ (зона *1*), при $\rho_2 \leqslant 2^{-1/2}$ $p_f^{(2)}/p_f^{(1)} < 1$ (зона *2*), при $2^{-1/2} < \rho_2 < 1$ отношение $p_f^{(2)}/p_f^{(1)}$ может быть как больше, так и меньше единицы в зависимости от величины ρ_1 (зона *3* или *4* соответственно). В частности, подстановка $\rho_1 = 1$ и $\rho_2 = 2$ в выражение (17) дает $p_f^{(2)}/p_f^{(1)} = 5^{1/2} \cong 2.24$. Отметим, что прирост фокального давления, наблюдаемый при переходе от колоколообразного начального распределения амплитуды к кольцевому, заметно ниже, чем соответствующий прирост коэффициента усиления $\left(G^{(2)}/G^{(1)} \cong 6.35\right)$. Это объясняется существенным снижением величины начального давления p_0 в соответствии с условием постоянства акустической энергии (16). Таким образом, полученные результаты позволяют проводить оценки эффективности фокусировки импульсов давления в зависимости от геометрических параметров радиального распределения их начальной амплитуды.

2. Сопоставим результаты фокусировки импульсов с монополярным и двуполярным начальным профилем. В этом случае для коэффициентов усиления по фазе сжатия и разрежения получаем следующие соотношения:

$$G^{(3)}/G^{(1)} = 2e^{-1/2}\vartheta \cong 1.21\vartheta,$$

$$g^{(3)}/G^{(1)} = e\vartheta \cong 2.72\vartheta, \tag{18}$$

где $\vartheta = \tau_0/\tau_*$.

Снова воспользовавшись условием постоянства акустической энергии [4,5]

$$p_0^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(t)dt = \text{const}, \tag{19}$$

находим также и отношение давлений в фокусе

$$p_f^{(3)}/p_f^{(1)} = 8^{1/2}\vartheta^{3/2}/e \cong 1.04\vartheta^{3/2},$$

$$p_f^{(3)}/p_f^{(1)} = (2e)^{1/2}\vartheta^{3/2} \cong 2.33\vartheta^{3/2}. \tag{20}$$

Таким образом, при замене монополярного импульса давления двуполярным возможно значительное увеличение коэффициентов усиления и фокальных давлений, в особенности для фазы разрежения. Из рис. $1, a$, видно, что при этом будет также происходить сокращение диаметра фокальной перетяжки. Как показывает анализ функций спектральной плотности $s(\omega)$ для случая монополярного и двуполярного импульса, наблюдаемый эффект связан с перекачкой акустической энергии из области низких частот ($\omega \ll 1/\tau_0$) в область высоких частот ($\omega \sim 1/\tau_*$).

Таким образом, найдены точные аналитические решения параболического уравнения дифракции для случая фокусировки импульса, имеющего монополярный или двуполярный начальный профиль с колоколообразным или кольцевым распределением амплитуды.

Полученные результаты показывают, что начальный временно́й профиль импульса давления и радиальное распределение его амплитуды оказывают существенное влияние на процесс фокусировки. В частности, за счет перехода от колоколообразного распределения начальной амплитуды к кольцевому, а также при замене монополярного импульса двуполярным возможно значительное повышение эффективности фокусировки. Очевидно, наибольший положительный эффект может быть достигнут при одновременной оптимизации как временны́х, так и пространственных характеристик импульса.

Представленный анализ, проделанный в рамках линейного параболического приближения, не учитывает влияния нелинейных и диссипативных эффектов и, кроме того, справедлив лишь для слабосходящихся пучков. Несмотря на эти ограничения, полученные результаты качественно согласуются с данными соответствующих экспериментов для импульсов субмикросекундной длительности в широком диапазоне начальных давлений и углов сходимости [1,2,3] и, следовательно, могут быть использованы для оценок эффективности фокусировки.

Список литературы

[1] *Судьенков Ю.В., Иванов Э.В.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 22. С. 27–30.
[2] *Sud'enkov Yu.V., Ivanov E.V.* // Proc. SPIE. Biomedical Systems & Technologies. 1996. Vol. 2928. P. 262–270.
[3] *Комиссарова И.И., Островская Г.В.* и др. // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 7. С. 115–121.
[4] *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука. 1990. 432 с.
[5] *Каневский И.Н.* Фокусирование звуковых и ультразвуковых волн. М.: Наука. 1977. 336 с.
[6] *Tjotta J.N., Tjotta S., Vefring E.H.* // J. Acoust. Soc. Am. 1991. Vol. 89. P. 1017–1127.
[7] *Hamilton M.F.* // J. Acoust. Soc. Am. 1992. Vol. 92. P. 527–532.