

01;03

О возникновении свободной конвекции в вертикальных каналах с сечениями в форме кругового и кольцевого секторов

© В.А. Кажан

Московский государственный университет природообустройства,
127550 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 10 июля 1996 г.)

Рассмотрено возникновение конвекции жидкости в длинных вертикальных каналах с идеально теплопроводящими стенками в случае, когда температура первоначально покоящейся жидкости линейно уменьшается с высотой, а каналы имеют поперечные сечения в виде кругового или кольцевого секторов. Выписаны критические числа Рэлея и собственные функции краевых задач, представляющие критические движения. Изучено также возникновение конвекции в насыщенной жидкостью пористой среде, заполняющей вертикальный канал с идеально теплопроводящими или же теплоизолирующими стенками, имеющий поперечное сечение в форме кругового сектора.

В теории свободной тепловой конвекции в рамках приближения Буссинеска известен класс решений, описывающих стационарную конвекцию в находящейся в длинном вертикальном канале постоянного сечения подогреваемой снизу жидкости, скорость конвекции которой направлена всюду вдоль канала [1,2]. Такого рода движения жидкости возможны лишь при равенстве числа Рэлея одному из собственных значений некоторой краевой задачи. Система уравнений и краевые условия, представляющие постановку этой задачи, дают возможность вычислить также максимальный градиент температуры (постоянный вдоль канала), при превышении которого гидростатическое состояние жидкости становится неустойчивым и возникает конвекция.

В ряде работ рассматривалось возникновение конвекции в каналах круглого, кольцевого, эллиптического и прямоугольного сечений в вертикальном слое жидкости между параллельными бесконечными плоскостями, а также рассматривалось возникновение аналогичной по физическому механизму конвективной фильтрации в насыщенной жидкостью пористой среде, находящейся в вертикальных каналах (см., например, библиографию в [2]).

В данной работе изучено возникновение конвекции в каналах с поперечными сечениями в форме кругового и кольцевого секторов, у которых раствор угла принимает некоторую последовательность значений. Рассмотрено также возникновение конвективной фильтрации в пористой среде, заполняющей канал с сечением в форме кругового сектора.

1. Пусть имеется длинный вертикальный канал с поперечным сечением в форме сектора круга радиуса a с углом раствора 2α , заполненный покоящейся жидкостью, температура которой линейно падает с высотой. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z , ось z которой направлена против силы тяжести и проходит через угловую точку контура поперечного сечения канала, а луч $\varphi = 0$ является биссектрисой угла между прямолинейными участками контура. В безразмерных

переменных независимые от z критические движения со скоростью v , имеющей лишь вертикальную составляющую, описываются системой уравнений [2]

$$\Delta v + RT = \text{const}, \quad \Delta T + v = 0,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (1)$$

где T — возмущение исходного линейного профиля температуры; $R = g\beta Aa^4(\nu\chi)^{-1}$ — число Рэлея; g — ускорение силы тяжести; β, ν, χ — соответственно коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности жидкости; $A > 0$ — вертикальный градиент температуры.

В предельном случае идеально теплопроводящих стенок канала краевые условия имеют вид

$$v = 0, T = 0 \quad \text{при} \quad r = 1, -\alpha \leq \varphi \leq \alpha$$

$$\text{и при} \quad 0 \leq r \leq 1, \varphi = \pm\alpha. \quad (2)$$

Кроме того, должен быть равен нулю поток жидкости через любое поперечное сечение канала.

Исключив из системы (1) возмущение температуры, имеем

$$\Delta \Delta v - Rv = 0.$$

Нетрудно выписать решение этого уравнения, удовлетворяющее требованию равенства нулю полного потока жидкости вдоль канала,

$$v(r, \varphi) = \sin \lambda \varphi [C_1 J_\lambda(\gamma r) + C_2 I_\lambda(\gamma r)], \quad \gamma = R^{\frac{1}{4}}, \quad (3)$$

где $\lambda > 0, C_1, C_2$ — константы; $J_\lambda(\gamma r), I_\lambda(\gamma r)$ — функции Бесселя первого рода.

С физической точки зрения возмущение температуры вызывается конвекцией жидкости, так что при вычислении T следует учитывать решение лишь неоднородного уравнения, получающегося при подстановке выражения (3) во второе уравнение системы (1). В результате получаем

$$T(r, \varphi) = \gamma^{-2} \sin \lambda \varphi [C_1 J_\lambda(\gamma r) - C_2 I_\lambda(\gamma r)]. \quad (4)$$

Наименьшие собственные значения $R_{n+\frac{1}{2},1}^{(0)}$, $R_{n+\frac{1}{2},1}^{(p)}$ для канала с сечением в форме кругового сектора и коэффициент $\sigma_{n+\frac{1}{2},1}$ при степенях ϵ в выражении относительной поправки для кольцевого сектора

n	α_n	$R_{n+\frac{1}{2},1}^{(0)}$	$\sigma_{n+\frac{1}{2},1}$	$R_{n+\frac{1}{2},1}^{(p)}$
1	$\frac{2\pi}{3}$	408	28	20.19
2	$\frac{2\pi}{5}$	1103	108	33.22
3	$\frac{2\pi}{7}$	2384	338	48.83
4	$\frac{2\pi}{9}$	4483	960	66.95
5	$\frac{2\pi}{11}$	7662	2560	87.53
6	$\frac{2\pi}{13}$	12214	6534	110.52
7	$\frac{2\pi}{15}$	18465	16155	135.89
8	$\frac{2\pi}{17}$	26766	38952	163.60
9	$\frac{2\pi}{19}$	37500	91943	193.65
10	$\frac{2\pi}{21}$	51079	213631	226.01

Далее, после подстановки решений (3), (4) в первое уравнение (1) находим, что фигурирующая в этом уравнении константа — продольный градиент давления [2] равна нулю.

Из краевых условий на плоских стенках канала (2) находим $\lambda = \pi m / \alpha$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Легко видеть, что величина m определяет азимутальную структуру соответствующего критического движения.

При подстановке решений (3), (4) в краевые условия (2) на цилиндрической части стенки канала приходим к системе из двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно C_1, C_2 . Условие существования нетривиального решения этой системы — равенство нулю ее определителя имеет вид $J_\lambda(\gamma)I_\lambda(\gamma) = 0$. Так как при действительных $\lambda > 0$ нули функции $I_\lambda(x)$ комплексные, то спектр критических чисел Рэлея $R_{\lambda,s}^{(0)}$, $s = 1, 2, 3, \dots$ определяется нулями функции $J_\lambda(x)$: имеем $R_{\lambda,s}^{(0)} = j_{\lambda,s}^4$, где $j_{\lambda,s}$ — s -й корень уравнения $J_\lambda(x) = 0$.

Собственные функции задачи (1), (2), соответствующие этим собственным значениям, записываются следующим образом:

$$v_{\lambda,s}(r, \varphi) = J_\lambda(j_{\lambda,s}r) \sin \lambda \varphi,$$

$$T_{\lambda,s}(r, \varphi) = j_{\lambda,s}^{-2} v_{\lambda,s}(r, \varphi). \quad (5)$$

Будем рассматривать каналы, отличающиеся друг от друга величиной двугранного угла между плоскими стенками: $\alpha_n = 2\pi(2n + 1)^{-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Для таких каналов при четном m порядок функции Бесселя равен целому числу $\lambda = m(n + \frac{1}{2})$, а при нечетном m — целому числу с половиной, так что для нечетного m решения (5) выражаются через элементарные функции [3]. В обоих случаях собственные значения легко вычисляются с помощью таблиц нулей функций Бесселя полуцелого и целого порядков [3,4].

При

$$\lambda = m \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

и фиксированном n наименьшее среди $R_{\lambda,s}^{(0)}$ критическое число Рэлея реализуется при $m = 1$ и определяется $R_{n+\frac{1}{2},1}^{(0)} = j_{n+\frac{1}{2},1}^4$ первым корнем уравнения $J_{n+\frac{1}{2}}(x) = 0$. Табличные данные [4] позволяют найти $R_{n+\frac{1}{2},1}^{(0)}$ для каждого α_n при $n = 1, 2, 3, \dots, 20$.

Из таблицы, в которой приведены $R_{n+\frac{1}{2},1}^{(0)}$ для некоторых n , видно, что с уменьшением α_n порог возникновения конвекции возрастает. Физически это объясняется увеличением (вследствие сближения идеально теплопроводящих стенок) интенсивности затухания возникающих в жидкости температурных возмущений.

На рисунке в качестве примера показана схема критических движений, последовательно реализующихся при повышении уровней критического числа Рэлея в канале с $\alpha_1 = 2\pi/3$. Отмеченные на этих рисунках внутри рассматриваемого сектора радиусы и дуги являются узловыми линиями (на которых выражения (5) обращаются в нуль), разделяющими области восходящих и нисходящих потоков.

Аналогичным образом проводится исследование для каналов с поперечным сечением в форме кругового сектора с углом раствора $2\alpha_n$, где $\alpha_n = \pi/n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Отметим, что в этом случае при $n = 1, 2, 3$ наименьшие критические числа Рэлея и схемы соответствующих им критических движений можно

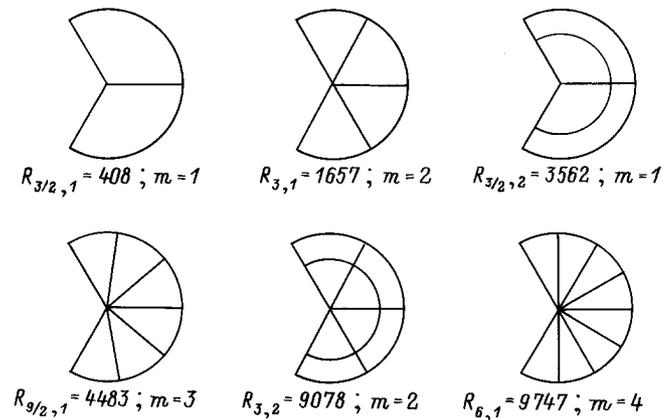


Схема критических движений в канале с $\alpha_1 = 2\pi/3$.

найти среди результатов, приведенных в [2] для канала круглого сечения.

2. Рассмотрим вопрос о возникновении конвекции в вертикальном канале с идеально теплопроводящими стенками, имеющем поперечное сечение в форме кольцевого сектора с углом раствора $2\alpha_n$, $\alpha_n = 2\pi(2n+1)^{-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, внешним радиусом a и внутренним радиусом, равным εa , $\varepsilon < 1$. В этом случае дополнительно к (2) ставятся условия обращения собственных функций в нуль при $r = \varepsilon$. Поскольку начало координат не принадлежит рассматриваемой области, то в представлении искомого решения системы (1) входят функции Бесселя как первого $J_\lambda(\gamma r)$, $I_\lambda(\gamma r)$, так и второго $Y_\lambda(\gamma r)$, $K_\lambda(\gamma r)$ рода, где по-прежнему

$$\lambda = m \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

$m = 1, 2, 3, \dots$,

$$v(r, \varphi) = \sin \lambda \varphi [C_1 J_\lambda(\gamma r) + C_2 I_\lambda(\gamma r) + C_3 Y_\lambda(\gamma r) + C_4 K_\lambda(\gamma r)],$$

$$T(r, \varphi) = \sin \lambda \varphi [C_1 J_\lambda(\gamma r) - C_2 I_\lambda(\gamma r) + C_3 Y_\lambda(\gamma r) - C_4 K_\lambda(\gamma r)], \quad (6)$$

где $\gamma = R^{\frac{1}{4}}$.

Для существования нетривиального решения системы из четырех линейных однородных алгебраических уравнений, получающихся при подстановке выражений (6) в краевые условия при $r = 1$, $r = \varepsilon$, необходимо равенство нулю ее определителя

$$[J_\lambda(\gamma)Y_\lambda(\varepsilon\gamma) - J_\lambda(\varepsilon\gamma)Y_\lambda(\gamma)] \times [I_\lambda(\gamma)K_\lambda(\varepsilon\gamma) - I_\lambda(\varepsilon\gamma)K_\lambda(\gamma)] = 0.$$

При действительных γ выражение во второй квадратной скобке не обращается в нуль, так что собственные значения рассматриваемой задачи определяются корнями $\gamma_{\lambda,s}$, $s = 1, 2, 3, \dots$ трансцендентного уравнения

$$J_\lambda(\gamma)Y_\lambda(\varepsilon\gamma) - J_\lambda(\varepsilon\gamma)Y_\lambda(\gamma) = 0. \quad (7)$$

Собственным значениям $R_{\lambda,s} = \gamma_{\lambda,s}^4$ соответствуют собственные функции

$$v_{\lambda,s}(r, \varphi) = \sin \lambda \varphi [J_\lambda(\gamma_{\lambda,s})Y_\lambda(\gamma_{\lambda,s}r) - Y_\lambda(\gamma_{\lambda,s})J_\lambda(\gamma_{\lambda,s}r)],$$

$$T_{\lambda,s}(r, \varphi) = \gamma_{\lambda,s}^{-2} v_{\lambda,s}(r, \varphi).$$

Применительно к случаю малых ε вычислим наименьшее ($m = 1$, $s = 1$) критическое число Рэлея, соответствующее некоторому фиксированному n . Положим $\gamma_{n+\frac{1}{2},1} = j_{n+\frac{1}{2},1} + \delta_{n+\frac{1}{2},1}$, где $j_{n+\frac{1}{2},1}$ — первый корень уравнения $J_{n+\frac{1}{2}}(x) = 0$. Считая $\delta_{n+\frac{1}{2},1}$ малым, разложим в (7) функции $J_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_{n+\frac{1}{2},1})$, $Y_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_{n+\frac{1}{2},1})$ в ряды Тейлора в окрестности точки $j_{n+\frac{1}{2},1}$, а $J_{n+\frac{1}{2}}(\varepsilon\gamma_{n+\frac{1}{2},1})$, $Y_{n+\frac{1}{2}}(\varepsilon\gamma_{n+\frac{1}{2},1})$

разложим в степенные ряды. Ограничиваясь главными членами разложения левой части (7), имеем

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{(\varepsilon j_{n+\frac{1}{2},1})^{n+\frac{1}{2}}} J'_{n+\frac{1}{2}}(j_{n+\frac{1}{2},1}) \delta_{n+\frac{1}{2},1} = \frac{(\varepsilon j_{n+\frac{1}{2},1})^{n+\frac{1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} Y_{n+\frac{1}{2}}(j_{n+\frac{1}{2},1}). \quad (8)$$

Воспользуемся также выражением [3] определителя Вронского для сферических функций Бесселя первого рода $j_n(x)$, $y_n(x)$

$$j_n(x)y'_n(x) - j'_n(x)y_n(x) = x^{-2}, \quad (9)$$

где

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x).$$

Так как $J_{n+\frac{1}{2}}(j_{n+\frac{1}{2},1}) = 0$, то при $x = j_{n+\frac{1}{2},1}$ из (9) находим

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(j_{n+\frac{1}{2},1}) = -\frac{2}{\pi j_{n+\frac{1}{2},1} J'_{n+\frac{1}{2}}(j_{n+\frac{1}{2},1})}.$$

С учетом этого выражения из (8) получаем

$$\delta_{n+\frac{1}{2},1} = \frac{2}{\pi(2n+1)} \times \left(\frac{j_{n+\frac{1}{2},1}^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) J'_{n+\frac{1}{2}}(j_{n+\frac{1}{2},1})} \right)^2 \varepsilon^{2n+1}.$$

В результате в линейном по $\delta_{n+\frac{1}{2},1}$ приближении имеем

$$R_{n+\frac{1}{2},1} = \left(j_{n+\frac{1}{2},1} + \delta_{n+\frac{1}{2},1} \right)^4 = R_{n+\frac{1}{2},1}^{(0)} \left(1 + \sigma_{n+\frac{1}{2},1} \varepsilon^{2n+1} \right),$$

где

$$\sigma_{n+\frac{1}{2},1} = \frac{8}{\pi(2n+1)} \times \frac{j_{n+\frac{1}{2},1}^{2n-1}}{\left(1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) J'_{n+\frac{1}{2}}(j_{n+\frac{1}{2},1}) \right)^2}.$$

Таким образом, в случае идеально теплопроводящих стенок порог устойчивости гидростатического состояния жидкости в канале с сечением в форме кольцевого сектора с внешним радиусом a и внутренним радиусом εa повышается по сравнению с каналом, имеющим сечение в виде кругового сектора радиуса a с тем же раствором угла. При заданных n и ε относительную поправку $(R_{n+\frac{1}{2},1} - R_{n+\frac{1}{2},1}^{(0)})/R_{n+\frac{1}{2},1}^{(0)} = \sigma_{n+\frac{1}{2},1} \varepsilon^{2n+1}$ можно

вычислить с помощью таблиц [3,4] значений $j_{n+\frac{1}{2},1}$ и $J'_{n+\frac{1}{2}}(j_{n+\frac{1}{2},1})$. В качестве примера в таблице приведена численная величина коэффициента $\sigma_{n+\frac{1}{2},1}$ при некоторых значениях n .

3. Рассмотрим возникновение конвекции в насыщенной жидкостью пористой среде, заполняющей вертикальный канал с сечением в форме кругового сектора, когда температура внутри канала линейно уменьшается с высотой, а жидкость первоначально покоится. Из уравнений конвективной фильтрации несжимаемой жидкости в пористой среде следует, что не зависящие от z критические движения, у которых скорость вертикальна, описываются системой из дифференциального и алгебраического уравнений [2]

$$\Delta T + v = 0, \quad R^{(p)}T - v = 0, \quad R^{(p)} = \frac{g\beta a^2}{\nu\chi}KA, \quad (10)$$

где K — коэффициент проницаемости пористой среды.

Ввиду отсутствия в системе (10) производных от скорости краевое условие для v не требуется. Таким образом, при идеально теплопроводящих стенках канала первое равенство в записи краевых условий (2) необходимо исключить. Для случая $\alpha_n = 2\pi(2n+1)^{-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ аналогично предыдущему находим, что собственные значения определяются корнями $j_{\lambda,s}$, $s = 1, 2, 3, \dots$ уравнения $J_\lambda(x) = 0$, где

$$\lambda = m \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

При этом получаем $R_{\lambda,s}^{(p)} = j_{\lambda,s}^2$. Собственные же функции имеют вид

$$T_{\lambda,s}(r, \varphi) = J_\lambda(j_{\lambda,s}r) \sin \lambda\varphi. \quad (11)$$

Наименьшие собственные значения для некоторых n (соответствующие корню $j_{n+\frac{1}{2},1}$) приведены в таблице.

В случае теплоизолирующих стенок краевые условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} r = 1, -\alpha \leq \varphi \leq \alpha : \quad \frac{\partial T}{\partial r} &= 0; \\ 0 \leq r \leq 1, \varphi = \pm\alpha : \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Нетрудно найти, что при $\alpha_n = \pi(2n+1)^{-1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ собственные значения задачи (10), (12) по-прежнему равны квадратам корней уравнения $J_\lambda(x) = 0$, но в отличие от предыдущего случая теперь

$$\lambda = (2m+1) \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, все собственные функции этой задачи выражаются, согласно (11), через функции Бесселя полуцелого порядка. При фиксированном n наименьшее собственное значение реализуется при $m = 0$.

Отметим, что случаю $n = 0$ соответствует круглый канал, внутри которого имеется теплоизолирующая радиальная перегородка, идущая от цилиндрической стенки до оси канала. При такой геометрии канала наименьшее собственное значение $R_{\frac{1}{2},1}^{(p)} = 9.87$. Что же касается случаев $n > 0$, то при любом n для канала с $\alpha_n = \pi(2n+1)^{-1}$, имеющего теплоизолирующие стенки, наименьшее собственное значение равно наименьшему собственному значению для канала с $\alpha_n = 2\pi(2n+1)^{-1}$, имеющего идеально теплопроводящие стенки (см. таблицу).

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [2] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
- [3] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [4] Таблицы нулей функций Бесселя. Библиотека математических таблиц. Вып. 44. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 95 с.