

01:05

Обратные задачи нелинейной электродинамики высокотемпературных сверхпроводников

© К.П. Гайкович, А.Н. Резник

Институт физики микроструктур РАН,
603600 Нижний Новгород, Россия

(Поступило в Редакцию 10 июня 1997 г. В окончательной редакции 20 октября 1997 г.)

Развит метод восстановления зависимости поверхностного импеданса высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) от амплитуды переменного магнитного поля $Z_s(H)$ из измерений нелинейных радиофизических характеристик СВЧ резонаторов на основе ВТСП. Показано, что неоднородность структуры электромагнитного поля в резонаторе приводит к интегральным уравнениям для $Z_s(H)$. Получены соответствующие интегральные уравнения для некоторых типов резонаторов. Проанализированы погрешности традиционных методов, использующих алгебраические соотношения для $Z_s(H)$. Для восстановления зависимостей $Z_s(H)$ из интегральных уравнений применен метод регуляризации Тихонова, развитый в теории некорректных обратных задач. Выполнены численные эксперименты по восстановлению $Z_s(H)$, из которых определены требования к точностям и другим характеристикам экспериментальных данных.

Введение

Нелинейные электромагнитные свойства ВТСП в последние годы стали предметом активных исследований. Причины возросшего интереса к данной проблеме заключаются, во-первых, в перспективах применения ВТСП во многих СВЧ устройствах: резонаторах, фильтрах, антеннах, линиях задержки, мультиплексерах и др. [1,2]. Нелинейность сверхпроводников ограничивает динамический диапазон этих устройств. Во-вторых, подобные изменения могут служить средством контроля качества ВТСП, которое в значительной мере и определяет их нелинейные свойства [3,4]. Наконец, эти исследования важны и для физики сверхпроводников, поскольку в настоящее время нет единого мнения по поводу механизма нелинейности [5–11]. Среди вероятных причин называют [10] разрушение куперовских пар СВЧ полем, проникновение абрикосовских вихрей в толщу сверхпроводника либо в области межгранульных контактов, глобальный нагрев ВТСП электромагнитным полем или локальный нагрев отдельных несверхпроводящих дефектов.

Нелинейные свойства ВТСП обычно характеризуют зависимостью поверхностного импеданса $Z_s = R_s + iX_s$ (R_s, X_s — поверхностное сопротивление и реактанс соответственно) от амплитуды переменного магнитного поля H на поверхности сверхпроводника, т. е. $Z_s = Z_s(H)$. Зависимость $Z_s(H)$, как правило, измеряется с помощью различных СВЧ резонаторов: микрополоскового [6,12,13], объемного [14], диэлектрического [11,15,16], квазиоптического [17]. Измеряемыми характеристиками резонаторов являются коэффициенты отражения, прохождения, поглощения и их зависимости от частоты f и мощности P_{in} подводимого извне излучения, т. е. исследуется интегральный нелинейный отклик электродинамической системы в целом. Зависимости $R_s(H)$, $X_s(H)$ обычно определяются по уширению частотной

характеристики Δf_B и сдвигу центральной частоты Δf_0 . Характерной особенностью всех перечисленных выше резонаторов является неоднородность распределения полей H по поверхностям ВТСП. В то же время в работах по диагностике нелинейных свойств ВТСП [4–6,15,18] использовались алгебраические связи между Δf_B , Δf_0 и $R_s(H)$, $X_s(H)$, справедливые только для однородных по Z_s сверхпроводников. Нелинейность сверхпроводника и неоднородность H приводят к интегральным уравнениям для $Z_s(H)$. Игнорирование этого факта влечет за собой серьезные погрешности определения $Z_s(H)$.

В данной работе развивается новый подход к проблеме диагностики нелинейности ВТСП с помощью СВЧ резонаторов, основанный на решении интегральных уравнений для $Z_s(H)$. Обсуждаются физические и практические преимущества данного подхода, выводятся интегральные уравнения для некоторых типов резонаторов, анализируются погрешности традиционных методов, строятся численные схемы обращения интегральных уравнений, на основе численных экспериментов по восстановлению $Z_s(H)$ определяются требования к точности и степени дискретизации экспериментальных данных.

Нелинейный поверхностный импеданс ВТСП

В линейной электродинамике Z_s определяется как коэффициент пропорциональности между тангенциальными компонентами амплитуд электрического E_τ и магнитного $H_\tau = H$ полей на поверхности среды

$$E_\tau = Z_s H. \quad (1)$$

Для хорошо проводящей среды Z_s характеризует ее проводящие свойства, отнесенные к точке поверхности, т. е. является параметром материала. Нелинейность проводника приводит к эффекту самовоздействия поля

на частоте волны накачки, который также может быть описан соотношением (1) с помощью поверхностного импеданса, являющегося теперь функцией поля, т.е. $Z_s = Z_s(H)$. Именно этот эффект обычно и используется в качестве теста на нелинейность ВТСП, о которой судят по характеру зависимости $Z_s(H)$ (мы полагаем, что ВТСП является локально нелинейной средой, т.е. Z_s зависит от H только в той же точке поверхности). В рамках такого определения $Z_s(H)$ сохраняет смысл характеристики проводящих СВЧ свойств ВТСП материала.

В основе методик, применяемых для определения $Z_s(H)$ [4–6,15,18], лежит уравнение

$$\Delta f = \Delta f_0 + \frac{i}{2} \Delta f_B = \frac{i}{8\pi W} \int_S H^2 Z_s d^2 r, \quad (2)$$

где поле H имеет нулевую фазу; W — энергия, запасенная в резонаторе; интегрирование производится по поверхности ВТСП; Δf_B , Δf_0 определяются относительно величин, соответствующих идеальному проводнику ($Z_s = 0$). Для однородного по поверхности ВТСП импеданса Z_s выражение (2) преобразуется к виду

$$\Delta f = \frac{i}{2} G Z_s, \quad (3)$$

где

$$G = \frac{1}{4\pi W} \int_S H^2 d^2 r \quad (4)$$

— геометрический фактор, который рассчитывается для каждого конкретного резонатора или измеряется путем калибровки.

Уравнение (3) вполне оправданно используется для исследования линейных характеристик ВТСП.

Иная ситуация имеет место в нелинейном резонаторе, где неоднородность структуры поля приводит к неоднородности распределения Z_s по поверхности ВТСП, так как $Z_s = Z_s(H)$. В этом случае использование уравнения (3), как это делается в [4–6,15,18], приводит к определению осредненного по поверхности импеданса $\langle Z_s \rangle$, т.е.

$$\Delta f = \frac{i}{2} G \langle Z_s \rangle. \quad (5)$$

В соответствии с (2) имеем средний импеданс

$$\langle Z_s \rangle = \frac{\int_S H^2 Z_s(H) d^2 r}{\int_S H^2 d^2 r}, \quad (6)$$

который определяется уже не только свойствами материала, но и неоднородностью H , зависящей в свою очередь от типа резонатора и возбуждаемой моды. Последнее обстоятельство снижает практическую ценность полученных с помощью (3) результатов и затрудняет их сопоставление, когда измерения выполнены в резонаторах разного типа.

Интегральное уравнение

Будем считать, что резонатор имеет одну ВТСП пленку в качестве проводящей стенки, зависимость $Z_s(H)$ которой подлежит определению. Структура магнитного поля на поверхности ВТСП вблизи резонансной частоты при условии, что добротность нелинейного резонатора остается высокой, определяется собственной функцией соответствующей моды $\Phi(\mathbf{r})$

$$H(\mathbf{r}) = H_m \Phi(\mathbf{r}), \quad (7)$$

где \mathbf{r} — вектор координат на поверхности ВТСП, H_m — максимальное значение поля H (нормировка Φ выбрана так, что $\Phi_{\max} = 1$).

Поле H_m нелинейного резонатора рассчитывается для каждого значения мощности P_{in} по измеренной нагруженной добротности. Например, для микрополоскового резонатора соответствующая методика описана в [19]. Переходя в [6] от интегрирования по координатным переменным к интегрированию по H , после замены переменных в соответствии с (7) получим уравнение

$$\langle R_s(H_m) \rangle = \int_0^{H_m} K(H_m, H) R_s(H) dH, \quad (8)$$

где $K(H_m, H)$ — ядро интегрального уравнения, вид которого зависит от типа резонатора и возбуждаемой моды, причем $\int_0^{H_m} K(H_m, H) dH = 1$.

Уравнение (8) написано для поверхностного сопротивления $R_s = \text{Re}(Z_s)$, возможности определения которого мы и будем в дальнейшем исследовать. Естественно, все последующие выводы могут быть перенесены и на $X_s = \text{Im}(Z_s)$ в силу идентичности соответствующих уравнений. Приведем выражения для ядра $K(H_m, H)$ и (8) для некоторых типов резонаторов.

а) **К в а з и о п т и ч е с к и й к о н ф о к а л ь н ы й р е з о н а т о р.** В резонаторах этого типа [17] ВТСП пленка устанавливается в качестве плоского отражателя в фокальной плоскости сферического зеркала из нормального металла либо низкотемпературного сверхпроводника. Поле на ВТСП (7) обычно аппроксимируется радиально-симметричной гауссовой функцией

$$\Phi(r) = \exp(-r^2/a^2). \quad (9)$$

Производя в (6) замену переменной интегрирования $r \rightarrow H$, получим

$$K(H_m, H) = 2H/H_m^2. \quad (10)$$

б) **О б ь е м н ы й р е з о н а т о р.** Рассмотрим прямоугольный резонатор, одной из стенок которого служит ВТСП пластина. Для основной моды поле H (7) в прямоугольной системе координат с началом в центре

пластины имеет структуру

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(x) = \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right), \quad (11)$$

где l — длина пластины в направлении x .

После замены $x \rightarrow H$ в (6) получим

$$K(H_m, H) = \frac{4}{\pi H_m} \frac{(H/H_m)^2}{\sqrt{1 - (H/H_m)^2}}. \quad (12)$$

Отметим, что объемные, а также близкие по структурам мод диэлектрические резонаторы наиболее часто используются в последние годы для диагностики нелинейных свойств ВТСП [11,14–16]. Однако во всех указанных работах применялись цилиндрические резонаторы, в которых возбуждалась мода TE_{011} , имеющая радиально-симметричную структуру поля

$$\Phi(r) = J_1\left(\frac{A_{01}}{\rho}r\right) / J_1^{\max}, \quad (13)$$

где ρ — радиус цилиндра, $A_{01} \approx 3.832$, $J_1(x)$ — функция Бесселя 1-го рода.

Естественно, ядро уравнения (8) для таких резонаторов отличается от (12), но, как показывает расчет, нормированные подынтегральные функции формулы (6) для $\Phi(\mathbf{r})$ видов (11), (13) в координатных переменных x , r соответственно оказываются близкими между собой, если $l = \rho$. Учитывая сказанное, можно полагать, что результаты, полученные ниже для ядра (12), будут справедливы для всех перечисленных здесь резонаторов.

в) Микрополосковый резонатор. В резонаторах этого типа ВТСП пленка представляет собой тонкий обычно изогнутый полосок, служащий одним из проводников отрезка микрополосковой линии [6,12,13]. Поле H имеет достаточно сложную двумерную структуру, которую для TEM -моды можно представить в виде

$$\Phi(x, y) = \varphi(y) \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right), \quad (14)$$

где координата x отсчитывается в направлении линии симметрии полоска. Расчет поперечной зависимости $\varphi(y)$ производится с помощью довольно громоздких численных алгоритмов [19]. Реализацию рассматриваемого здесь подхода упрощает аналитическая аппроксимация функции $\Phi(\mathbf{r})$. С этой целью мы используем решения [20], полученные в приближении нулевой толщины полосков $t = 0$. Эти решения справедливы при всех y , исключая узкие области около краев полоска $w/2 - \zeta \leq |y| \leq w/2$, где w — ширина полоска, $\zeta \approx 2\Lambda^2/t$ (Λ — лондоновская глубина проникновения поля в сверхпроводник) [21]. При $|y| \rightarrow w/2$ эти решения имеют особенность $\varphi \rightarrow \infty$. Мы используем приближение, предложенное в [21], которое сводится к ограничению области интегрирования в (6) до $0 \leq |y| \leq w/2 - \zeta$. В частности, для резонатора, выполненного на основе

симметричной микрополосковой линии, который исследовался в [5,12], получим

$$\varphi(y) = \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\pi\zeta/d)}{1 - \exp(-2\pi(w/2 - |y|)/d)}}, \quad (15)$$

где d — толщина линии.

Формула (15) применима при $w > 0.3d$ [20]. Для оценок параметр ζ в (15) определяем, используя результаты расчетов поперечной структуры плотности тока на поверхности полоска [19]. При $t = 0.2 \mu\text{m}$, $\Lambda = 0.3 \mu\text{m}$ и конфигурации резонатора, идентичной [19], с $w = 150 \mu\text{m}$, $d = 500 \mu\text{m}$ находим $\zeta = 0.15 \mu\text{m}$.

Приведем выражение для ядра $K(H_m, H)$, которое получается после замены переменных интегрирования в (6) $x, y \rightarrow H = H(x, y)$, $y' = w/2 - y$ с учетом четности функции (15),

$$K(H_m, H) = \frac{\tilde{K}(H_m, H)}{\int_0^{H_m} \tilde{K}(H_m, H) dH}, \quad (16a)$$

$$\tilde{K}(H_m, H) = \begin{cases} H^2 \int_{\zeta}^{w/2} dy' J(H, y'), & 0 \leq H \leq H_w, \\ H^2 \int_{\zeta}^{\psi(H)} dy' J(H, y'), & H_w \leq H \leq H_m, \end{cases} \quad (16b)$$

$$\psi(H) = -\frac{d}{2\pi} \ln \left[1 - \left(\frac{H_m}{H}\right)^2 \left(1 - \exp(-2\pi\zeta/d)\right) \right], \quad (16b)$$

$$J(H, y') =$$

$$\sqrt{\frac{[1 - \exp(-2\pi y'/d)] [1 - \exp(-2\pi\zeta/d)]}{\left\{1 - (H/H_m)^2 [1 - \exp(-2\pi y'/d)] [1 - \exp(-2\pi\zeta/d)]\right\}}}, \quad (16g)$$

$$H_w = H_m \sqrt{[1 - \exp(-2\pi\zeta/d)] / [1 - \exp(-\pi w/d)]}. \quad (16d)$$

Используя (8) и выражения для $K(H_m, H)$ (10), (12), (16), мы рассчитали относительную погрешность Δ определения $R_s(H)$ с помощью алгебраического уравнения (3)

$$\Delta = \left(R_s(H) - \langle R_s(H) \rangle \right) / R_s(H) \quad (17)$$

для модели нелинейности ВТСП вида

$$R_s(H) = R_0(1 + bH^n). \quad (18)$$

В случае достаточно сильных полей, когда $bH^n \gg 1$, результаты расчетов зависимости $\Delta(n)$ представлены на рис. 1 для различных типов резонаторов. При $H < 100$ Ое ВТСП пленки обычно имеют $n = 2 - 4$ [5–7] и превышение R_s над $\langle R_s \rangle$ оказывается весьма значительным — 1.3–1.7 раз для объемного, 2–3 раза для квазиоптического и 4.5–7 раз для микрополоскового резонаторов. В последнем случае большие величины Δ связаны с резким возрастанием H на краях полоска

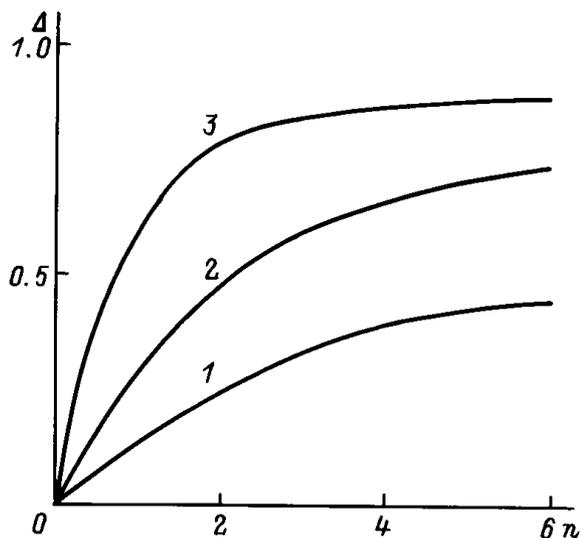


Рис. 1. Зависимость относительного отклонения Δ от показателя степени n в формуле (18) для различных типов резонаторов. 1 — объемный и диэлектрический, 2 — конфокальный, 3 — микрополосковый.

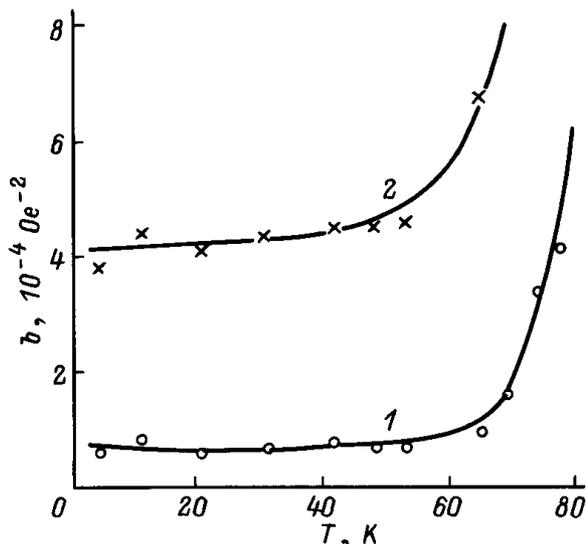


Рис. 2. Коррекция температурной зависимости коэффициента b в формуле (18). 1 — данные работы [5], 2 — скорректированные результаты.

(краевой эффект). Рис. 1 иллюстрирует также степень различия результатов, получаемых для одной и той же ВТСП пленки с помощью разных резонаторов, когда с использованием (3) вместо R_s определяется $\langle R_s \rangle$. Применение алгебраических уравнений (3) приводит к тому, что выводы относительно степени нелинейности ВТСП оказываются заниженными. Пример коррекции экспериментальных результатов, полученных в [5] для микрополоскового резонатора, представлен на рис. 2, где приведены зависимости коэффициента b при нелинейности (18) для $n = 2$.

Метод решения обратной задачи

Предлагаемый в данной работе метод заключается в измерении $\langle R_s(H_m) \rangle$ с помощью ВТСП резонатора при нескольких значениях P_{in} и определении $R_s(H)$ путем обращения уравнения (8). Уравнение (8) представляет собой линейное интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода. Известно [21,22], что решение интегральных уравнений — это, как правило, некорректная задача, при решении которой без использования дополнительной (априорной) информации малым значениям погрешности соответствуют сколь угодно большие ошибки восстановления. Именно поэтому для решения обратной задачи необходимо привлекать имеющуюся дополнительную информацию о свойствах точного решения. От вида используемой информации и зависит выбор конкретного алгоритма решения. Если искомое распределение может быть явно описано как известная функция с определенным набором параметров, весьма эффективным являются сведение задачи к системе уравнений относительно этих неизвестных параметров и ее решение, например, методом наименьших квадратов, как это сделано для рассматриваемой задачи в [23]. Однако, если в реальности искомое распределение не описывается заданной функцией, погрешности могут быть сколь угодно велики.

Строгие математические подходы к решению основаны на применении разнообразных алгоритмов регуляризации задачи. В данной работе решение основано на применении принципа обобщенной невязки Тихонова [22, с.101], использующего весьма общую информацию о квадратичной суммируемости точного решения и его производной, который решает проблему для класса непрерывных функций и хорошо согласуется со спецификой рассматриваемой задачи.

Перепишем (8) в операторном виде, опуская далее индекс s ,

$$KR = R_m^\delta, \quad (19)$$

где R_m^δ — вектор данных, полученных с некоторой погрешностью, мерой которой в методе Тихонова служит интегральная погрешность δR_m , определяемая как

$$\begin{aligned} \delta R_m^2 &= \|KR - R_m^\delta\|_{L_2}^2 \\ &= \frac{1}{H_m^{\max}} \int_0^{H_m^{\max}} [R_m(H_m) - R_m^\delta(H_m)]^2 dH_m, \end{aligned} \quad (20)$$

где R_m — правая часть (19), которая соответствует точному решению $R(H)$; $\|f\|_{L_2}^2$ — норма функции f в пространстве L_2 (пространство квадратично суммируемых функций [22]); H_m^{\max} — максимальное значение H_m — отвечающее наибольшей величине P_{in} .

В методе Тихонова [22] приближенное решение минимизирует сглаживающий функционал

$$M^\alpha(R) = \|K_h R - R_m^\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|R\|_{W_2^1}^2, \quad (21)$$

т. е. искомое решение может быть найдено путем поиска функции $R(H)$, для которой функционал (21) достигает минимума. В приведенных выше соотношениях

$$\|R\|_{W_2^1}^2 = \frac{1}{H^{\max}} \int_0^{H^{\max}} \left[R(H)^2 + \left(H^{\max} \frac{dR(H)}{dH} \right)^2 \right] dH$$

обозначает норму функции $R(H)$ как элемента функционального пространства W_2^1 (пространство квадратично суммируемых функций, имеющих квадратично суммируемые производные [22]), $H^{\max} = H_m^{\max}$. Задача минимизации выпуклого функционала, каковым является (21), после соответствующей дискретизации сводится к своему конечномерному аналогу, представляющему собой хорошо изученную с вычислительной точки зрения задачу квадратичного программирования и решается стандартными градиентными методами. В данной работе применялся метод сопряженных градиентов, описание которого можно найти, например, в [24, с.273] (в [22] приводится его компьютерный алгоритм на языке Fortran). Численная реализация метода в данной работе (на языке Borland Pascal 7.0) решает задачу за несколько секунд на PC IBM-486.

Принципиальным элементом уравнения (21) является параметр регуляризации α , который определяет степень сглаженности приближенного решения. Именно второе (стабилизирующее) слагаемое в (21) обеспечивает выпуклость, а следовательно, и саму возможность минимизации функционала и решения задачи. Полученное решение выделяет среди множества функций, удовлетворяющих исходному некорректному уравнению, такую, которая является минимальной в смысле используемой нормы стабилизирующего слагаемого W_2^1 , содержащей и саму функцию, и ее производную, т. е. реализует условие некоторого компромисса минимальности как по абсолютной величине, так и по гладкости для искомой функции. Как показано в [22], параметр регуляризации оказывается однозначно связанным с интегральной мерой погрешности данных (числом), монотонно убывая по мере убывания уровня погрешности, но более медленно. При этом с увеличением точности роль второго стабилизирующего слагаемого в (21) постепенно уменьшается. Параметр α находится как корень одномерного нелинейного уравнения обобщенной невязки

$$\rho(\alpha) = \|K_h R^\alpha - R_m^\delta\|_{L_2}^2 - \delta^2 = 0, \quad (22)$$

где R^α — функция, минимизирующая функционал (21), т. е. алгебраическое уравнение (22) решается совместно с функциональным уравнением (21).

Смысл (22) состоит в том, что норма невязки полученного решения должна быть в точности равна норме погрешности, поскольку нет оснований минимизировать отклонение от данных измерений за пределами уровня ошибок. В уравнение (22) входит параметр эффективной погрешности δ , который должен быть определен априори, исходя из конкретных условий решения задачи. Этот

параметр должен включать в себя все составляющие ошибок измерения и интерпретации. В частности, в δ должна быть включена как случайная, так и систематическая ошибка измерений δR_m . В рамках метода может быть учтена также погрешность ядра $K(H_m, H)$, которая включает в себя погрешность дискретизации при численном решении и возможную неточность его аппроксимации соответствующими функциями (например, (10), (12), (16)),

$$\delta_h^2 = \|K_h R - KR\|_{L_2}^2, \quad (23)$$

где K_h — задаваемое при решении (19) приближенное ядро.

Указанные погрешности могут приводить также к несовместности вектора данных с решаемым уравнением, поскольку сглаживающее действие ядра (8) ограничивает класс возможных реализаций $R_m(H_m)$ и при наличии случайной погрешности функция R_m^δ может выйти из допустимого класса, т. е. ни при каком распределении $R(H)$ невозможно получить измеренное распределение $R_m^\delta(H_m)$. Мера несовместности δ_μ , которая является одним из параметров метода обобщенной невязки Тихонова, не может, естественно, превосходить суммарной погрешности ядра и измерений

$$\delta_\mu^2 = \|K_h R - R_m^\delta\|_{L_2}^2 \leq (\delta R_m + \delta_h)^2. \quad (24)$$

Таким образом, в качестве параметра эффективной погрешности принимается величина

$$\delta^2 = (\delta R_m + \delta_h)^2 + \delta_\mu^2, \quad (25)$$

учитывающая уровень ошибки измерений, дискретизации и других неточностей описания ядра, а также зависящей от этих факторов меры несовместности уравнения со своей правой частью. В методе Тихонова значения входящих в (25) параметров должны представлять собой соответствующие оценки по максимуму в классе возможных реализаций для искомой функции. При этом величина параметра регуляризации α , а следовательно, и степень сглаженности решения, связываются с величиной параметра эффективной погрешности δ . Последнее обстоятельство является весьма существенным достоинством метода, поскольку теперь субъективизм исследователя переносится с области интерпретации экспериментальных данных на оценку погрешности своих измерений. Поскольку оценка погрешности всегда содержит некоторую неопределенность, то существует возможность выбора стратегии решения. Так, если ставится задача заведомого исключения несуществующих деталей в решении, то лучше принять оценку погрешности с некоторым избытком, что, конечно, может привести к заглаживанию некоторых реальных деталей тонкой структуры. Если при решении задачи более важным представляется не пропустить эти детали, то следует принять наименьшую ошибку из области ее реально

возможных значений. В этом случае, однако, становится возможным появление в решении и не существующих в действительности (ложных) деталей. Правильная оценка ошибки позволяет получить оптимальное решение методом Тихонова. После определения величины δ процедура получения конечного результата становится формальной.

Очень важное преимущество метода обобщенной невязки по сравнению с другими известными методами состоит в том, что при стремлении δ к нулю в интегральной метрике приближенное решение сходится к точному равномерно, т.е. в метрике, где нормой является максимум модуля, хотя, как правило, в отличие от корректных задач скорость сходимости не пропорциональна уменьшению δ , а более медленная. Равномерная сходимость позволяет использовать для оценки погрешности метода единичные численные эксперименты с типичными или экстремальными исходными распределениями, что невозможно сделать в случаях, когда имеет место интегральная или среднеквадратичная сходимость, поскольку для этих видов сходимости могут существовать области значений аргумента, где искомая функция не сходится к точному решению или даже расходится.

Отметим, что для некоторых конкретных видов ядер $K(H_m, H)$ уравнение (8) имеет решения явного вида. Например, для $K(H_m, H)$ простейшего вида (10), дифференцируя (8) по верхнему пределу, после замены $H_m \rightarrow H$ имеем

$$R(H) = \langle R(H) \rangle - \frac{1}{2} H \frac{d\langle R(H) \rangle}{dH}. \quad (26)$$

Несмотря на простой вид решения (26), мы получили хорошо известную некорректную задачу вычисления производной по экспериментальным данным [22].

Для $K(H_m, H)$ вида (12) уравнение (8) имеет ядро со слабой особенностью. Это уравнение может быть решено методом итерированных ядер аналогично уравнению Абеля [25]

$$R(H) = \frac{1}{2H} \int_0^H \frac{d}{dH_m} \left[\langle R(H_m) \rangle H_m^2 \right] \frac{dH_m}{\sqrt{H^2 - H_m^2}}. \quad (27)$$

Решение (27) содержит под интегралом производную от исходных данных, получаемых с некоторой погрешностью. Из-за особенности ядра в точке $H_m = H$ сглаживающее действие интеграла не устраняет погрешности решения, связанного с ошибками вычисления производной. Действительно, при численном интегрировании (27) с дискретизацией ΔH_m вклад интеграла вблизи особенности от $H - \Delta H_m$ до H пропорционален $\sqrt{\Delta H_m}$, в то время как погрешность находящейся под интегралом производной при некоррелированной ошибке возрастает как $1/\Delta H_m$, т.е. ошибка вычисления интеграла будет неограниченно нарастать как $1/\sqrt{\Delta H_m}$, что и свидетельствует о некорректности рассматриваемой задачи.

Таким образом, последовательный подход к решению обеих рассмотренных выше задач должен заключаться в решении исходного интегрального уравнения (8)

на основе строгих методов регуляризации, среди которых для рассматриваемого класса задач предпочтительным представляется метод обобщенной невязки Тихонова [22], если искомые решения относятся к классу непрерывных и дифференцируемых функций.

Результаты численного моделирования

Специфика некорректных задач состоит в том, что не существует определенного соотношения между погрешностью правой части и точностью восстановления, поскольку последняя существенно зависит и от вида самой искомой функции. Поэтому исследование возможностей восстановления может быть выполнено только на основе численного эксперимента для типичных распределений $R(H)$ и реализуемых уровней погрешности.

Рассмотрим решение уравнения (8) на примере $K(H_m, H)$ вида (12), отвечающего объемным резонаторам. В силу некорректности задачи будем использовать при ее решении описанный выше метод обобщенной невязки Тихонова. Здесь следует подчеркнуть, что при заданной дискретизации ошибка решения задачи, получаемая с помощью явного решения (27) либо путем обращения численного аналога исходного интегрального уравнения (8) (который представляет собой линейную систему алгебраических уравнений с треугольной матрицей ядра), будет вполне определенной и конечной величиной, которая в принципе может удовлетворять потребностям практики. Таким образом, правильным представляется анализ, основанный на сравнении результатов прямого обращения и метода Тихонова.

Численное моделирование процесса восстановления $R(H)$ выполнялось по следующей замкнутой схеме. Для конкретной исходной зависимости $R(H)$ с помощью (8) вычислялась точная зависимость $R_m(H_m) = \langle R(H_m) \rangle$, на которую в дискретных точках $m = 1, 2, \dots, M$ набрасывалась случайная ошибка, моделирующая погрешность измерений. Для моделирования использовался датчик случайных чисел, выдающий нормально распределенную последовательность из M чисел с заданным средним значением ΔR_m и стандартным отклонением σR_m . Полученные таким образом "данные измерений" использовались для решения обратной задачи двумя методами и восстановленные распределения $R(H)$ сравнивались с исходными. Путем накопления статистики для набора независимых реализаций случайной ошибки определялась дисперсия погрешности восстановления $\sigma_R^2(H)$.

Для практического применения рассматриваемого метода нужно задать параметр эффективной погрешности δ , определяемый соотношением (25) через параметры δR_m , δ_μ и δ_h , исходя из известных условий решения задачи с учетом того обстоятельства, что ошибки эксперимента имеют случайный характер. Учитывая тот факт, что эффективность метода определяется только путем численного эксперимента и можно проверить оптимальность сделанного выбора, примем в качестве

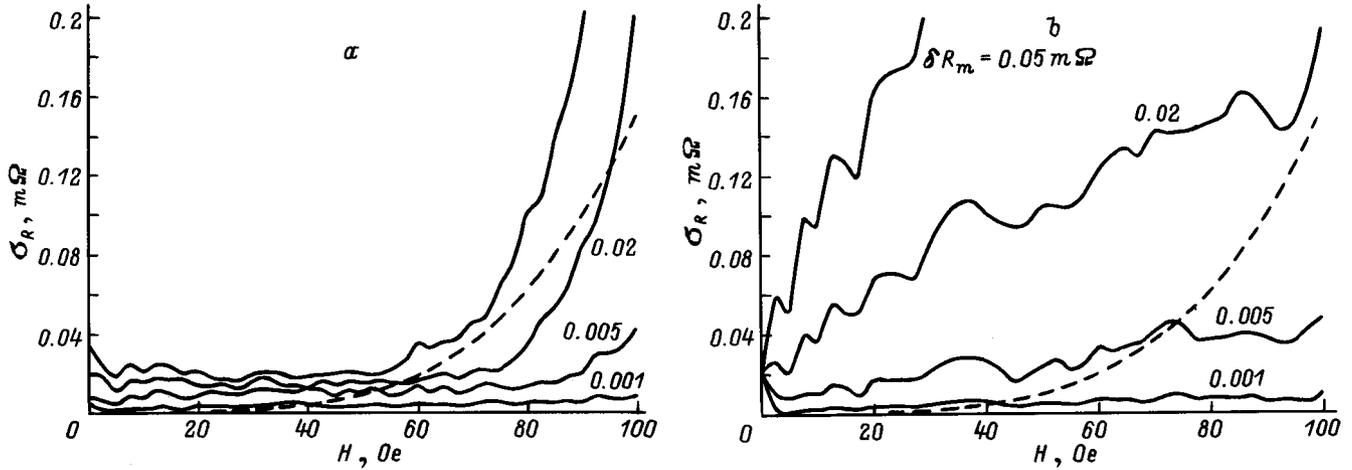


Рис. 3. Точность решения уравнения (8) для метода Тихонова (а) и для метода прямого обращения (б) при различных уровнях погрешности измерений в сравнении с восстанавливаемым отклонением $R(H) - R_m(H_m = H)$ (штриховая кривая). Число экспериментальных точек $M = 20$.

оценки погрешности δR_m для (25) не максимальное, а среднее значение интеграла в (20). Тогда получаем

$$\begin{aligned} \delta R_m^2 &= \frac{1}{H_m^{\max}} \int_0^{H_m^{\max}} \langle [R_m(H_m) - R_m^\delta(H_m)]^2 \rangle dH_m \\ &= \frac{1}{H_m^{\max}} \int_0^{H_m^{\max}} [\sigma R_m^2(H_m) + \Delta R_m^2(H_m)] dH_m. \end{aligned} \quad (28)$$

При постоянных параметрах ΔR_m и σR_m

$$\delta R_m = \sqrt{\sigma R_m^2 + \Delta R_m^2}. \quad (29)$$

Можно видеть, что при нулевой систематической ошибке $\delta R_m = \sigma R_m$. Наоборот, при нулевой случайной ошибке $\delta R_m = \Delta R_m$. Для заданной дискретизации M путем сравнения с результатом точного интегрирования (8) вычислялась составляющая суммарной погрешности δ_h (21). С учетом того факта, что оценка (28), очевидно, несколько меньше, чем оценка ошибки по максимуму (25), естественным представляется выбрать для оценки меры несовместности δ_μ (22) ее максимально возможное значение $\delta_\mu = \delta R_m + \delta_h$, что приблизит оценку суммарной ошибки δ к ее истинному значению. В результате из (25) для суммарной ошибки δ получается следующее выражение:

$$\delta = \sqrt{2} (\delta R_m + \delta_h), \quad (30)$$

где δR_m определяется из (28).

Из (8) видно, что при постоянной систематической погрешности ΔR_m погрешность решения $\delta R(H) = \Delta R_m$ (это вытекает из линейности (8) и единичной нормировки его ядра), что позволяет исследовать влияние только случайной составляющей ошибки.

Численное решение уравнения (8) с ядром (12) выполнено для зависимости $R(H)$ вида (18) с параметрами $R_0 = 0.02 \text{ m}\Omega$, $n = 4$, $b = 2.0 \cdot 10^{-7} \text{ Oe}^{-4}$ в диапазоне изменения магнитных полей $0 \leq H \leq 100 \text{ Oe}$. Указанные значения параметров близки к соответствующим величинам, полученным в [5] для частоты $f_0 = 1.5 \text{ GHz}$ при температуре $T = 77 \text{ K}$. Точности измерений варьировались в пределах $0.001 \leq \delta R_m \leq 0.05 \text{ m}\Omega$.

Результаты численного анализа с осреднением погрешностей восстановления по реализациям показали, что метод Тихонова позволяет получить существенно более качественное решение при заданном уровне погрешности и дискретизации. На рис. 3, а, б показаны зависимости $\sigma_R(H)$ соответственно для методов Тихонова и прямого обращения в сравнении с разностью $R(H) - R_m(H_m = H)$, которая является естественным уровнем информативности решения. Видно, что метод Тихонова обеспечивает качественное восстановление при $\delta R_m \leq 0.02 \text{ m}\Omega$, тогда как прямое обращение дает в равных условиях заметно худшие результаты, ограничивая допустимый уровень погрешности измерений величиной $\delta R_m \leq 0.005 \text{ m}\Omega$, близкой к предельно достижимым в настоящее время точностям. Из рисунков очевидно также, что для зависимости $R(H)$ типа (18) область информативного восстановления находится при $H > 50 \text{ Oe}$.

По аналогии с мерой погрешности δR_m (28) можно ввести интегральную погрешность восстановления δR , которая характеризует качество восстановления на всем интервале H в целом в метрике L_2

$$\delta R^2 = \frac{1}{H^{\max}} \int_0^{H^{\max}} \langle [R_{\text{ret}}(H) - R(H)]^2 \rangle dH, \quad (31)$$

где $R(H)$ — исходное распределение, $R_{\text{ret}}(H)$ — его восстановление.

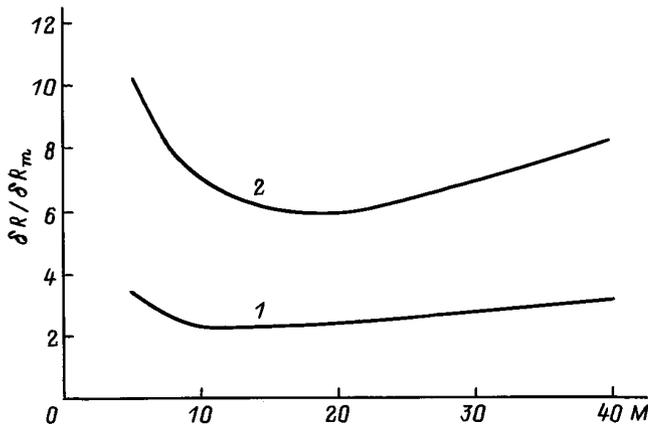


Рис. 4. Средняя по интервалу относительная ошибка восстановления как функции числа экспериментальных точек M . 1 — метод Тихонова, 2 — метод прямого обращения.

На рис. 4 приведены зависимости относительной погрешности восстановления $\delta R / \delta R_m$ от параметра дискретизации M (числа экспериментальных точек). Обратим внимание на наличие оптимального значения M , при котором погрешность восстановления минимальна, причем этот минимум для метода Тихонова отвечает существенно меньшей погрешности, чем для метода прямого обращения, и достигается при меньшем значении M . Наличие минимума объясняется следующим образом. При уменьшении значения M растет погрешность дискретизации, в частности, в представленном на рисунке случае погрешность дискретизации δ_h , возрастающая с уменьшением M , сравнивается с величиной δR_m при $M = 10$. Рост погрешности восстановления с увеличением M (на первый взгляд парадоксальный) связан со специфическим влиянием некорректности обратной задачи, которое усиливается с ростом M . Тот же эффект, очевидно, имеет место при вычислении производной по экспериментальным данным.

Весьма важной и удобной для практического применения особенностью метода Тихонова является возможность восстановления $R(H)$ на всем интервале $0 \leq H \leq H^{\max}$ при использовании измерений $R_m(H_m)$ на более узком интервале $H_m^{\min} \leq H_m \leq H_m^{\max}$ ($H_m^{\max} = H^{\max}$) или на сетке H_{mi} , не совпадающей с сеткой H_i , на которой задано и восстанавливается исходное распределение $R(H)$, причем эта сетка может быть существенно более редкой. При этом зависимость $R(H)$ может быть эффективно восстановлена за пределами интервала измерений $R_m(H_m)$ в сторону более слабых полей. Соответствующая обратная задача для интервала $0 \leq H \leq H_m^{\min}$ описывается уже не уравнением Вольтерра, а уравнением типа Фредгольма 1-го рода, которое является сильно некорректным [22]. В этой более общей постановке решение принципиально не может быть получено путем прямого обращения исходного уравнения, а только на основе применения метода регуляризации. На рис. 5 представлен пример восстановления исходного распределения

вида (18) с указанными выше значениями параметров в интервале $0 \leq H \leq 100$ Ое по "экспериментальным данным", полученным при $75 \leq H_m \leq 100$ Ое (т.е. используя только 1/4 интервала восстановления) и уровне моделируемой погрешности $\delta R_m = 0.005$ мОм. Можно видеть, что достаточно хорошее качество восстановления достигается при $40 \leq H_m \leq 100$ Ое, т.е. применение метода Тихонова дает возможность восстановить $R(H)$ и за пределами интервала измерений. В этой области сильной некорректности решение является существенно более сглаженным.

В заключение отметим, что развитый подход позволяет восстанавливать произвольные зависимости $R(H)$, в том числе значительно более сложной, чем (18), вида.

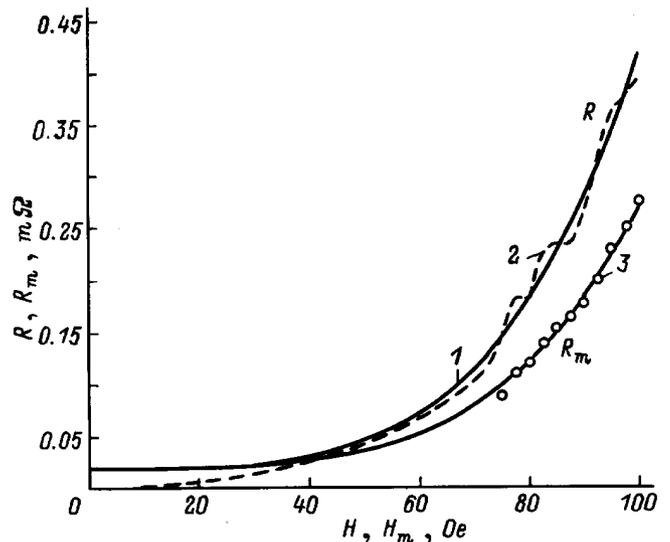


Рис. 5. Восстановление зависимости $R_s(H)$ по экспериментальным данным, заданным на 1/4 интервала $0 \leq H \leq H_m$. 1 — исходное распределение, 2 — восстановленное методом Тихонова распределение, 3 — функция $\langle R_s(H_m) \rangle$. Кружками обозначены экспериментальные данные при $\sigma R_m = 0.005$ мО.

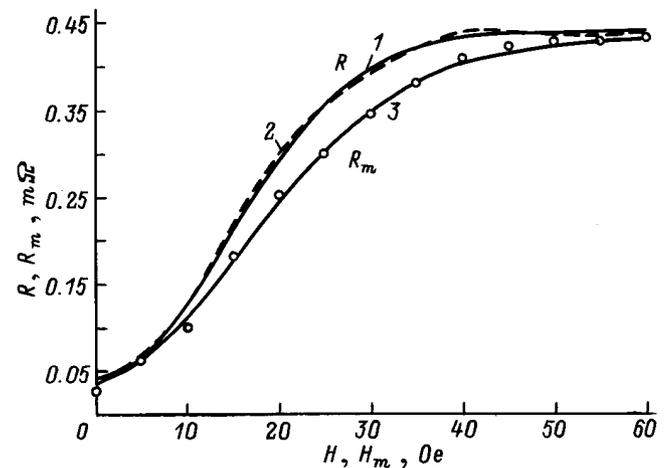


Рис. 6. Восстановление методом Тихонова зависимости $R_s(H)$ с насыщением (обозначения те же, что и на рис. 5).

Этот факт проиллюстрирован на рис. 6, где приведен пример восстановления зависимости $R(H)$ с насыщением, которая наблюдалась в [14] (гранулированные ВТСП пленки, $f_0 = 18$ GHz, $T = 4$ K). Результаты представлены для одной из случайных реализаций погрешности измерений при $\delta R_m = 0.005$ m Ω , $M = 13$. Заметим, что погрешность решения рассмотренной некорректной задачи зависит от степени сложности функции $R(H)$ и должна быть исследована для каждого вида искомого решения путем численного моделирования аналогично описанному выше.

Выводы

В работе получена методика диагностики нелинейных электромагнитных свойств ВТСП с помощью СВЧ резонаторов. Традиционные алгоритмы дают заниженную оценку нелинейности ВТСП, позволяя получить осредненное поверхностное сопротивление $\langle R_s(H) \rangle$. Превышение R_s над $\langle R_s \rangle$ может составить ~ 1.5 раз в объемных и диэлектрических резонаторах, $\sim 2-3$ раза в квазиоптических и $\sim 5-7$ раз в микрополосковых. Предложенный здесь метод базируется на решении интегральных уравнений, связывающих $\langle R_s(H) \rangle$ с $R_s(H)$, что позволяет учесть неоднородность структуры поля H в СВЧ резонаторах. Наиболее адекватные алгоритмы решения полученных уравнений используют технику регуляризации, развитую в теории некорректных обратных задач. Применение таких методов обеспечивает качественное восстановление зависимостей $R_s(H)$ при достигнутых к настоящему времени точностях радиофизических измерений ($\delta R \propto 5 - 10$ $\mu\Omega$) и минимальных объемах экспериментальных данных (число точек $M \propto 10 - 15$).

Авторы выражают признательность А.А. Жарову за полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке научно-технической программы "Высокотемпературная сверхпроводимость", проект № 96130 и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-02-16997.

Список литературы

- [1] Newman N., Lyons W.G. // J. Supercond. 1993. Vol. 6. P. 119–159.
- [2] Chaloupka H.J., Hein M.A., Muller G. // High-Tc Microwave Superconductors and Applications. SPIE. 1994. Vol. 2156. P. 36–54.
- [3] Oates D.E., Anderson A.C., Sheen D.M. et al. // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1991. Vol. 39. P. 1522–1529.
- [4] Portis A.M. // J. Supercond. 1992. Vol. 5. N 4. P. 319–329.
- [5] Nguyen P.P., Oates D.E., Dresselhaus G., Dresselhaus M.S. // Phys. Rev. B. 1993. Vol. 48. P. 6400–6412.
- [6] Golosovsky M.A., Snortland H.J., Beasley M.R. // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 51. P. 6462–6469.
- [7] Willemsen B.L., Derov J.S., Silva J.H., Sridhar S. // IEEE Trans. Appl. Supercond. 1995. Vol. 5. P. 1753–1755.
- [8] Halbritter J. // J. Appl. Phys. 1992. Vol. 71. P. 339–343.
- [9] Porch A., Portis A.M. // Physica C. 1994. Vol. 235–240. P. 3381–3382.
- [10] Hein M., Diete W., Getta M. et al. // IEEE Trans. Appl. Supercond. 1997. Vol. 7. P. 1264–1267.
- [11] Wosik J., Xie L.M., Nesteruk K. et al. // Preprint N 97:005. Texas Center Supercond. Univ. of Houston, 1997. Texas 77204–5932.
- [12] Oates D.E., Anderson A.C., Mankiewich P.M. // J. Supercond. 1990. Vol. 3. P. 251–259.
- [13] Hedges S.J., Adams M.J., Nicholson B.F., Chew N.G. // Electron. Lett. 1990. Vol. 26. P. 977–979.
- [14] Cooke D.W., Gray E.R., Arendt R.N. // J. Supercond. 1990. Vol. 3. N 3. P. 261–267.
- [15] Diete W., Aschermann B., Chaloupka H. et al. // Appl. Superconductivity. Vol. 148. D. Dew-Hughes Ed. Bristol: IOP Publishing, 1995. P. 1107–1110.
- [16] Shen Z.-Y., Wilker C., Pang P. // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1992. Vol. 40. P. 2424–2432.
- [17] Harrington T.E., Wosik J., Long S.A. // Preprint N 96:106. Texas Center Supercond. Univ. of Houston. 1996. Texas 77204–5932.
- [18] Cooke D.W., Arendt P.N., Gray E.R., Portis A.M. // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1991. Vol. 39. P. 1539–1544.
- [19] Sheen D.M., Ali S.M., Oates D.E. et al. // IEEE Trans. Appl. Supercond. 1991. Vol. 1. P. 108–115.
- [20] Вольман В.И. Справочник по расчету и конструированию СВЧ полосковых устройств. М.: Радио и связь, 1982. 328 с.
- [21] Вендик О.Г., Попов А.Ю. // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 7. С. 1–8.
- [22] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 200 с.
- [23] Reznik A.N. // IEEE Trans. Appl. Supercond. 1997. Vol. 7. P. 1474–1477.
- [24] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 520 с.
- [25] Краснов М.И. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 304 с.