01;09

Генерирование электромагнитных волн в цилиндрическом резонаторе электронами, вращающимися в радиальном электростатическом поле

© В.В. Долгополов, Ю.В. Кириченко, Ю.Ф. Лонин, И.Ф. Харченко

Национальный научный центр Харьковский физико-технический институт АН Украины,
310108 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 12 августа 1996 г. В окончательной редакции 4 августа 1997 г.)

Теоретически исследованы механизмы генерирования микроволновых колебаний электронами, вращающимися в радиальном электростатическом поле, образованном положительно заряженной нитью на оси цилиндрического резонатора. Получены дисперсионные уравнения, описывающие взаимодействие волн с электронами. Показано, что генерирование электромагнитных полей возможно как за счет черенковского, так и за счет плазменного резонансов. Найдены частоты и инкременты волн в условиях черенковского резонанса, а также плазменного резонанса в однородном и неоднородном слое электронов. Определены преимущества и недостатки различных механизмов генерирования.

Введение

Интерес к исследованиям динамики движения заряженных частиц в цилиндрически симметричном электростатическом поле тонкой проводящей нити определяется целым рядом практических приложений таких систем: счетчики Гейгера–Мюллера, электрические фильтры загрязненных газов, ионно-плазменные насосы, газоразрядные измерители высокого вакуума и др. Системы с центробежно-электростатической фокусировкой электронного потока (спиратроны) рассмотрены в работе [1]. В последние годы предложен новый оригинальный генератор миллиметровых волн, названный авторами "Орбитрон" [2]. Достоинством этого генератора является отсутствие внешнего магнитного поля. Экспериментально показано, что в "Орбитроне" можно получить мощность излучения порядка 10 W на частоте 40 GHz при напряжении, поданном на нить, 2 kV. Авторы утверждают, что дальнейшее развитие этого прибора позволит получить субмиллиметровые колебания вплоть до 0.1 mm.

Генератор "Орбитрон" представляет собой цилиндрический резонатор. Ось резонатора совпадает с осью тонкого металлического стержня (нити), на который подается положительный потенциал. Вокруг стержня вращается цилиндрически симметричный слой электронов. На круговой орбите электроны удерживаются электростатическим полем стержня, компенсирующим действующую на электроны центробежную силу. При определенных условиях эта система оказывается неустойчивой относительно возмущений орбит и плотностей электронов и возникновения связанного с этими возмущениями электромагнитного поля. По мере генерации и излучения поля из резонатора радиус цилиндрического слоя электронов уменьшается.

В работе [2] присутствует теоретическое описание неустойчивости слоя электронов в орбитроне. Однако во многом оно неудовлетворительно. Это явилось причиной настоящего теоретического исследования.

Основные уравнения

В качестве резонатора рассмотрим не ограниченную вдоль оси z (используется цилиндрическая система координат r, φ, z) полость $a \leqslant r \leqslant b$, ограниченную на поверхностях $r = a$ и $r = b$ $(a \ll b)$ идеально проводящим металлом. На единицу длины металлического стержня $(r < a)$ приходится положительный заряд Q, что соответствует разности потенциалов между стержнем и корпусом резонатора $\Psi = 2Q\ln(b/a)$. Плотность цилиндрически симметричного слоя электронов $n_{e0}(r)$ отлична от нуля лишь в узкой области между поверхностями $r = r_-$ и $r = r_+$

$$n_{e0}(r) \neq 0 \quad \text{при} \quad r_- < r < r_+,$$

$$n_{e0}(r) = 0 \quad \text{при} \quad r \leqslant r_- \quad \text{и} \quad r \geqslant r_+,$$

$$\delta r = r_+ - r_- \ll r_-, \quad \frac{\partial n_{e0}}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial n_{e0}}{\partial z} = 0, \quad a < r_- < r_+ < b. \tag{1}$$

Полагая, что поля и возмущения плотности и скорости электронов не зависят от аксиальной координаты z, линеаризованные нерелятивистские уравнения движения электронов можно записать в виде

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{V_0}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - 2\frac{V_0}{r}V_\varphi = -\frac{e}{m_e}E_r, \tag{2}$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + \frac{V_0}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_0}{r}V_r = -\frac{e}{m_e}E_\varphi, \tag{3}$$

где $V_0 = (2eQ/m_e)^{1/2}$, $\mathbf{V}_0 = \mathbf{e}_\varphi V_0$ — невозмущенная скорость электронов, V_r и V_φ — радиальная и азимутальная составляющие возмущения скорости электронов, $\mathbf{e}_\varphi$ — единичный вектор вдоль азимута φ, E_r и E_φ — составляющие электрического поля волны, $-e$ и m_e — заряд и масса электрона.

Составляющие плотности тока возмущений $\mathbf{j}$ просто выражаются через возмущения скорости $\mathbf{V}$ и плотности электронов n_e

$$j_r = -en_{e0}V_r, \quad j_\varphi = -e(n_{e0}V_\varphi + V_0 n_e). \tag{4}$$

Зависимость переменных величин от азимутальной координаты φ и времени t определим множителем $\exp\{i(m\varphi - \omega t)\}$, где m — целое число. Для определенности положим $\mathrm{Re}(\omega) > 0$, $m > 0$. Тогда из уравнений непрерывности, Максвелла и уравнений (2)–(4) можно получить следующие уравнения для составляющих электромагнитного поля в области $r_- \leqslant r \leqslant r_+$:

$$E_r = \frac{i}{W_1}\left(\frac{mc^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) + \frac{2\omega V_0 \Omega^2}{rW}E_\varphi\right), \tag{5}$$

$$H_z = -i\frac{c}{W_1}\left(\left(\omega - \frac{\Omega^2}{W}\omega_m\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) + \frac{2mV_0\Omega^2}{r^2W}E_\varphi\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{W_1}\left(\omega_m\left(1 - \frac{\Omega^2}{W}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) + \frac{2V_0\Omega^2}{rW}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{m}{r} - \frac{\omega V_0}{c^2}\right)E_\varphi\right)\right\} = \frac{mV_0}{W_1 r^3}\left(1 + \frac{\Omega^2}{W}\right)\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi)$$
$$+ \frac{1}{c^2}\left\{\frac{\Omega^2}{W}\left(\omega_m + \frac{2\omega V_0^2}{W_1 r^2}\left(1 + \frac{\Omega^2}{W}\right)\right) - \omega_m\right\}E_\varphi, \tag{7}$$

где $\omega_m = \omega - mV_0/r$, $W = \omega_m^2 - 2V_0^2/r^2$, $W_1 = \omega(\omega - \omega_m\Omega^2/W) - m^2c^2/r^2$, $\Omega(r) = \{4\pi e^2 n_{e0}/m_e\}^{1/2}$ — ленгмюровская частота электронов, H_z — магнитное поле волны, c — скорость света. Уравнения (5)–(7) справедливы, когда электростатическое поле слоя электронов мало́ по сравнению с электростатическим полем стержня. Это условие имеет вид

$$\int\limits_{r_-}^{r_+} r\Omega^2 dr \ll V_0^2. \tag{8}$$

Решить уравнение (7) аналитически в общем случае не представляется возможным. Поэтому оно было решено приближенно с точностью до слагаемых нулевого и первого порядков включительно по малому параметру $\delta r/r_-$ (подобный метод использовался в работах [3–5]). Сшивая полученные таким способом выражения для полей на границах слоя с выражениями для полей в вакууме и учитывая, что на границах с металлом составляющая поля E_φ равна нулю, получим дисперсионное уравнение. Из-за сложности этого уравнения мы проанализируем его лишь в практически важном случае, когда выполняются неравенства

$$\left|\frac{\omega}{c}r_-\right| \ll 1, \quad \left|\frac{\omega}{c}b\right| \gg m^2/2, \tag{9}$$

и в условиях, когда возможно генерирование волн. Это условия черенковского и плазменного резонансов.

Черенковский резонанс

Черенковский резонанс возникает, когда угловая фазовая скорость волны близка к угловой скорости электронов $\omega_m(r_-) \simeq 0$. Тогда дисперсионное уравнение можно привести к виду

$$\omega_m^3 + (i\nu - \Delta)\omega_m^2 - \Delta_2^2\omega_m - \Delta_3^3 = 0, \tag{10}$$

где

$$\Delta = \omega^{(0)} - \frac{mV_0}{r_-} + \Delta_\nu; \tag{11}$$

$$\Delta_2^2 = \frac{\pi x_1^{2m}(\eta^{4m} - 1)\omega^{(0)}cr_-}{2^{2m-1}m!\,(m-1)!\,\eta^{2m}b}\int\limits_{r_-}^{r_+} dr\frac{\Omega^2}{2V_0^2 + r^2\Omega^2}; \tag{12}$$

$$\Delta_3^3 = \frac{\pi x_1^{2m}(\eta^{2m} - 1)^2 c}{2^{2m+1}[(m-1)!]^2\eta^{2m}br_-}\int\limits_{r_-}^{r_+} dr\frac{r^2\Omega^2 - 2V_0^2}{2V_0^2 + r^2\Omega^2}\Omega^2; \tag{13}$$

$$\eta = \frac{r_-}{a} > 1, \quad x_1 = \frac{\omega^{(0)}}{c}a\omega^{(0)} \simeq \frac{c}{b}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}m + \frac{\pi}{4}\right)$$

— собственная частота резонатора в отсутствие слоя электронов и без учета потерь; n — целое число; здесь и в дальнейшем слагаемое $i\nu$ феноменологически учитывает потери на излучение из резонатора и поглощение энергии его стенками, а слагаемое $-\Delta_\nu$ учитывает сдвиг частоты, связанный с этими потерями.

Уравнение (10) является уравнением третьей степени относительно ω_m. Мнимая часть ω_m совпадает с мнимой частью ω и, следовательно, представляет собой инкремент (декремент) волны. Последнее слагаемое в левой части уравнения (10), как следует из соотношения (13), может обращаться в нуль. В этом случае кубическое уравнение превращается в квадратное и все его решения соответствуют затухающим колебаниям.

Если $|i\nu - \Delta| \ll |\Delta_3|$, нарастающие во времени колебания возникают при выполнении условия

$$|\Delta_3^3| > 2|\Delta_2^3|/3^{3/2}. \tag{14}$$

При $\Delta_3^3 \neq 0$ легко выполняется более жесткое условие, чем (14),

$$|\Delta_3^3| \gg |\Delta_2^3|. \tag{15}$$

Тогда дисперсионное уравнение принимает вид

$$\omega_m^3 \simeq \Delta_3^3. \tag{16}$$

Один из трех корней уравнения (16) всегда соответствует нарастающим во времени колебаниям. Инкремент в этом случае максимален. Если $\Delta_3^3 > 0$, что соответствует большим плотностям электронов и большим r_-, то фазовая скорость нарастающей волны вблизи r_- меньше скорости электронов, а если $\Delta_3^3 < 0$, что соответствует большим скоростям электронов, то фазовая скорость нарастающей волны вблизи r_- больше скорости электронов.

При больших потерях либо расстройке резонанса, когда выполняются условия

$$|\Delta_2^2| \ll |\Delta_3^{3/2}(i\nu - \Delta)^{1/2}|, \quad |\Delta_3| \ll |i\nu - \Delta|, \tag{17}$$

решение уравнения (10) имеет вид

$$\omega_m \simeq \pm\left(\frac{\Delta_3^3}{i\nu - \Delta}\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Один из корней (18) соответствует нарастающим во времени колебаниям. Видно, что при увеличении потерь на излучение из резонатора или диссипацию, инкремент волны не возрастает, как это имеет место в результатах, приведенных в работе [2], а уменьшается. Частоты волн, усиливаемых в условиях черенковского резонанса $\omega \simeq mV_0/r_-$, возрастают по мере уменьшения радиуса слоя электронов r_-.

Плазменный резонанс в однородном слое электронов

Плазменный резонанс возникает, когда частота электромагнитного поля близка к частоте собственных продольных локальных колебаний электронов в лабораторной системе отсчета. Эта частота ω_p определяется уравнением

$$W - \Omega^2 = 0 \tag{19}$$

и имеет вид

$$\omega_p(r) = \frac{mV_0}{r} \pm \left(2\frac{V_0^2}{r^2} + \Omega^2(r)\right)^{1/2}. \tag{20}$$

Рассмотрим случай, когда плотность электронов резко возрастает от нуля до максимального значения вблизи $r = r_-$, остается практически постоянной в области $r_- < r < r_+$, а затем резко падает до нуля вблизи $r = r_+$, т. е. при $r_- < r < r_+$, $\partial\Omega^2/\partial r \simeq 0$. Тогда решение дисперсионного уравнения принимает вид

$$\delta\omega = \frac{1}{2}\left\{\Delta_p - i\nu \pm \left((\Delta_p - i\nu)^2 - 4q\right)^{1/2}\right\}, \tag{21}$$

где

$$\delta\omega = \omega - \omega_p, \quad \Delta_p \simeq \omega^{(0)} - \omega_p + \Delta_\nu, \tag{22}$$

$$q = -\frac{\pi x_1^{2m-1}(\eta^{2m}-1)^2 W\omega\delta r}{2^{2m}[(m-1)!]^2\eta^{2m+1}b\omega_m} \times \left(\frac{V_0}{r_-\omega_m} - \frac{1}{2}\,\frac{\eta^{2m}+1}{\eta^{2m}-1}\right)^2. \tag{23}$$

В последних соотношениях зависимостью ω_p от r можно пренебречь. Мнимая часть $\delta\omega$ является инкрементом (декрементом) волны. Как следует из выражения (21), неустойчивость имеет место, когда $q > 0$. Этому неравенству, согласно выражению (23), соответствует условие $\omega/\omega_m < 0$, т. е. нарастать во времени могут колебания, фазовая скорость которых вблизи слоя электронов меньше скорости электронов. При большой расстройке Δ_p либо больших потерях на излучение из резонатора или диссипацию инкремент волны определяется выражением

$$\mathrm{Im}(\omega) \simeq \frac{q\nu}{\Delta_p^2 + \nu^2}, \tag{24}$$

из которого следует, что увеличение расстройки либо потерь приводит к уменьшению инкремента. Однако при $\Delta_p^2 > 4q$ именно потери ($\nu \neq 0$) обусловливают неустойчивость.

Плазменный резонанс в неоднородном слое электронов

Очевидно, что в эксперименте очень трудно добиться того, чтобы в области $r_- < r < r_+$ выполнялось условие $\partial\Omega^2/\partial r \simeq 0$. В реальном слое электронов плотность электронов будет зависеть от радиуса r. Поэтому целесообразно исследовать возможность генерации электромагнитных волн в условиях плазменного резонанса в неоднородном слое электронов. Пусть плотность электронов плавно возрастает от нуля в точке $r = r_-$ до некоторого максимального значения, а затем плавно спадает до нуля в точке $r = r_+$. Плазменный резонанс будет иметь место в окрестностях точек $r = r_1$ и $r = r_2 (r_- < r_1 < r_2 < r_+)$, удовлетворяющих уравнению

$$\left(\omega^{(0)} - \frac{mV_0}{r}\right)^2 - 2\frac{V_0^2}{r^2} - \Omega^2(r) = 0. \tag{25}$$

В этом случае дисперсионное уравнение приводится к виду

$$\omega^{(1)} = \Delta_\nu - i\left\{\nu + \frac{\pi^2 x_1^{2m-1}(\eta^{2m}-1)^2 h\omega^{(0)}\mathrm{sign}(\omega_m)}{2^{m-1}[(m-1)!]^2\eta^{2m+1}b} \times \left(\frac{V_0}{r\omega_m} - \frac{1}{2}\,\frac{\eta^{2m}+1}{\eta^{2m}-1}\right)^2\right\}, \tag{26}$$

где

$$\omega^{(1)} = \omega - \omega^{(0)},$$

$$h = \left|\Omega^2/\frac{\partial\Omega^2}{\partial r}\right|_{r=r_1} + \left|\Omega^2/\frac{\partial\Omega^2}{\partial r}\right|_{r=r_2}. \tag{27}$$

Выражение (26) определяет сдвиг частоты и инкремент (декремент) волны. Согласно этому соотношению, неустойчивость имеет место тогда, когда второе слагаемое в фигурных скобках (26) отрицательно ($\omega^{(0)}\mathrm{sign}(\omega_m) < 0$) и больше первого по модулю, т. е. когда фазовая скорость волны вблизи слоя электронов меньше скорости электронов, а потери на излучение из резонатора и диссипацию незначительны.

Отметим, что для генерации волн неоднородным слоем электронов в условиях плазменного резонанса не требуется выполнение резонансных условий типа $\omega^{(0)} = mV_0/r_-$, как при черенковском резонансе, либо $\omega^{(0)} \simeq mV_0/r_- - \{2V_0^2/r_-^2 + \Omega^2\}^{1/2} > 0$, как при плазменном резонансе в однородном слое ($\partial\Omega^2/\partial r \simeq 0$). В рассматриваемом случае неоднородный слой электронов неустойчив по отношению к возбуждению волн, собственные частоты которых $\omega^{(0)}$ удовлетворяют неравенствам

$$\frac{mV_0}{r_-} - \left(2\frac{V_0^2}{r_-^2} + \Omega_M^2\right)^{1/2} < \omega^{(0)} < \frac{mV_0}{r_-} - \left(2\frac{V_0^2}{r_-^2}\right)^{1/2} > 0,$$

$$\omega^{(0)} > 0, \qquad (28)$$

где Ω_M — максимум функции $\Omega(r)$.

При плазменном резонансе в неоднородном слое энергия электромагнитного поля возрастает за счет взаимодействия волны не со всеми электронами, а только с теми, что находятся в окрестностях точек $r = r_1$ и $r = r_2$. Поэтому инкременты здесь меньше, чем в случае плазменного резонанса в однородном слое.

Заключение

Из предыдущего рассмотрения следует, что генерация волн в орбитроне возможна за счет черенковского либо плазменного резонансов. В условиях черенковского резонанса инкремент волны может достигать максимального значения, когда, согласно соотношению (16), он пропорционален кубическому корню из малого параметра $\delta r/b$. В случае плазменного резонанса в однородном слое электронов, согласно выражению (21), максимальное значение инкремента пропорционально квадратному корню из $\delta r/b$. В условиях плазменного резонанса в неоднородном слое инкремент, согласно (26), пропорционален первой степени малого параметра h/b. Однако генерация волн за счет плазменного резонанса в неоднородном слое электронов обладает рядом преимуществ. Передавая энергию волне, слой электронов приближается к оси резонатора (уменьшается r_-), а это нарушает условия черенковского резонанса и плазменного резонанса в однородном слое. В результате в резонанс может попасть другая волна с большей частотой. Условия плазменного резонанса в неоднородном слое не нарушаются при изменении радиуса r_-. Изменяется положение точек плазменного резонанса r_1 и r_2. Они приближаются к точке, где плотность электронов максимальна, когда радиус r_- уменьшается. В случаях черенковского резонанса и плазменного резонанса в однородном слое частоты нарастающей и затухающей волн близки или равны. Поэтому слабые нелинейные эффекты могут перевести волну из нарастающей в затухающую. В условиях плазменного резонанса в неоднородном слое дисперсионное уравнение имеет одно решение (26). Поэтому здесь слабые нелинейные эффекты, по-видимому, не могут воспрепятствовать усилению волн. Отметим также, что за счет плазменного резонанса в неоднородном слое одновременно может усиливаться много волн.

Список литературы

[1] *Чернов З.С.* // РиЭ. 1956. Т. 1. № 11. С. 1428–1434.
[2] *Alexeff J., Dyer F.* // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. N 5. P. 351–354.
[3] *Степанов К.Н.* // ЖТФ. 1965. Т. 35. Вып. 6. С. 1002–1014.
[4] *Степанов К.Н.* // ЖТФ. 1965. Т. 35. Вып. 8. С. 1349–1358.
[5] *Долгополов В.В., Омельченко А.Я.* // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. Вып. 4. С. 1384–1394.