01;09

Расчет критических условий неустойчивости в электрическом поле полусферической капли на твердой подложке

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 16 июня 1997 г.)

Найдены критические условия неустойчивости в электростатическом поле, параллельном оси симметрии полусферической капли проводящей жидкости, лежащей на твердой электропроводной подложке, которые оказываются выше критических условий неустойчивости равновеликой изолированной капли.

В различных задачах технической физики и геофизики приходится сталкиваться с проблемой электростатической устойчивости капель проводящих жидкостей, осевших на проводниках во внешнем электростатическом поле. В частности, такая задача связана с проблемой усиления в дождливую погоду энергопотерь на линиях электропередач [1], с исследованием закономерностей возникновения огней св. Эльма, происхождение которых связано с зажиганием в атмосферном электрическом поле коронного разряда в окрестности капель воды, осевших на высоких предметах [2–4], с проблемой пожаро- и взрывобезопасности при мытье больших емкостей из-под легковоспламеняющихся жидкостей [5]. Нижеследующее рассмотрение проведем методом, подробно описанным в [6] и использованным в [7].

1. Рассмотрим каплю идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости плотности ρ и с коэффициентом поверхностного натяжения σ, лежащую на твердой плоской электропроводной подложке. Пусть вся система находится во внешнем однородном электростатическом поле $\mathbf{E}_0$, перпендикулярном плоскости подложки. Вопрос о равновесной форме такой капли весьма сложен, поскольку зависит от вида трудно учитываемых сил сцепления капли и подложки. Поэтому примем, что жидкость смачивает подложку и угол смачивания равен $\pi/2$, форма же капли полусферическая, и, опуская вопрос о равновесности этой формы, поставим задачу определения критических условий неустойчивости такой поверхности по отношению к электрическим и капиллярным силам. Несмотря на условность сформулированной задачи, она позволит в первом приближении прояснить вопрос о различиях условий возбуждения неустойчивости капли в свободном состоянии и капли, осевшей на твердой подложке.

Уравнение возмущенной волновым движением поверхности капли в сферической системе координат с началом в центре основания полусферы и осью z, перпендикулярной плоскости подложки, запишется в виде

$$r(\Theta, t) = R + \xi(\Theta, t) \quad \left(0 \leqslant \Theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \tag{1}$$

где R — радиус невозмущенной полусферической поверхности; $\xi(\Theta, t)$ — осесимметричное возмущение поверхности капли ($\max|\xi| \ll R$).

Рассмотрение только осесимметричных возмущений оправдано тем, что критические условия возбуждения осесимметричных мод капиллярных колебаний поверхности ниже, чем для неосесимметричных. Поэтому для поставленной задачи такое упрощение вполне разумно.

Будем решать задачу в линейном по $|\xi|/R$ приближении. Волновое движение идеальной несжимаемой жидкости, вызванное возмущением поверхности ξ, будет потенциальным с потенциалом скорости $\Psi(r, \Theta, t)$, имеющим такой же порядок малости, что и $|\xi|/R$, и являющимся гармонической функцией,

$$\Delta\Psi = 0. \tag{2}$$

Запишем граничные условия на свободной поверхности капли, определяемой соотношением (1). В линейном приближении по малым величинам они относятся, как это принято в теории волн бесконечно малой амплитуды [8], к невозмущенной поверхности

$$r = R: \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\Psi}{\partial r}, \tag{3}$$

$$-\rho\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \delta p_E - \delta p_\sigma = 0, \tag{4}$$

где δp_E и δp_σ — добавки к давлению электрических сил и давлению сил поверхностного натяжения, имеющие 1-й порядок малости.

Решение уравнения (2), ограниченное в центре полусферы, имеет вид

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) r^n P_n(\cos\Theta), \tag{5}$$

где $P_n(\cos\Theta)$ — полиномы Лежандра, удовлетворяющие на полусферической поверхности следующим условиям [9]:

$$\int\limits_0^1 P_n(x)dx = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n = 2k, \\ & \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \\ \dfrac{L_n}{M_n} \equiv A_n & \text{при } n = 2k, \\ & \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots), \end{cases} \tag{6}$$

где

$$L_n = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}(n-1)!, \quad M_n = 2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!;$$

$$\int\limits_0^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2n+1} & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } (n-m) = 2k, \\ & \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \\ \dfrac{F_{n,m}}{G_{n,m}} \equiv B_{n,m} & \text{при } n = 2l, \ m = 2k+1, \\ & \quad (l, k = 0, 1, 2, \dots), \end{cases} \tag{7}$$

где $F_{n,m} = (-1)^{\frac{1}{2}(m+n+1)} n!m!$,

$$G_{n,m} = 2^{(m+n-1)}(n-m)(m+n+1)\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{m-1}{2}\right)!\right]^2.$$

Представим возмущение поверхности капли $\xi(\Theta, t)$ также в виде разложения по полиномам Лежандра

$$\xi(\Theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(t)P_n(\cos\Theta). \tag{8}$$

Очевидно, что при колебаниях поверхности капли ее объем не должен меняться, т. е.

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{R+\xi} r^2 dr \sin\Theta d\Theta d\varphi = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

В линейном по ξ/R приближении условие постоянства объема капли примет вид

$$\int\limits_0^1 \xi(\Theta, t)d(\cos\Theta) = 0.$$

Подставляя в это условие разложение (8) и учитывая свойство (6) для полиномов Лежандра, получим, что $Z_0 = 0$ и $Z_{2k+1} = 0$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Используя этот результат, перепишем разложение (8)

$$\xi(\Theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_{2k}(t)P_{2k}(\cos\Theta). \tag{9}$$

Примем (как это принято в теории исследования решений дифференциальных уравнений на устойчивость), что зависимость возмущения $\xi(\Theta, t)$ от времени экспоненциальная, т. е.

$$Z_n(t) \sim \exp(St), \tag{10}$$

где S — комплексная частота.

Подставим решения (5), (9) с учетом (10) в граничное условие (3) и, используя свойство (7) полиномов Лежандра, получим связь коэффициентов $C_n(t)$ и $Z_n(t)$

$$C_{2k+1}(t) = 0,$$

$$C_{2k}(t) = \frac{SZ_{2k}(t)}{2kR^{2k-1}} \ (k = 1, 2, 3, \dots, 0). \tag{11}$$

Для того чтобы воспользоваться граничным условием (4), нужно выписать выражения для добавок к давлениям δp_E и δp_σ. Давление сил поверхностного натяжения на искаженную сферическую поверхность известно [8]

$$p_\sigma = p_\sigma^{(0)} + \delta p_\sigma = \sigma\left[\frac{2}{R} - \frac{1}{R^2}(2 + \hat{L})\xi\right], \tag{12}$$

где $p_\sigma^{(0)}$ — давление на поверхности сферы, $\hat{L}$ — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах

$$\hat{L}P_n(\cos\Theta) = -n(n+1)P_n(\cos\Theta).$$

2. Чтобы выписать давление электрических сил, сформулируем математически задачу расчета электрического поля у поверхности капли. Потенциал φ электрического поля вблизи поверхности идеально проводящей капли, лежащей на идеально проводящей плоской безграничной подложке при наличии внешнего однородного электростатического поля, перпендикулярного поверхности подложки, должен удовлетворять следующей краевой задаче:

$$\Delta\varphi = 0,$$
$$r \to \infty: \quad \varphi \to -E_0 z,$$
$$r = R + \xi; \ z = 0: \quad \varphi = \text{const} = 0. \tag{13}$$

Представим потенциал φ в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi, \tag{14}$$

где φ_0 — потенциал у поверхности проводящей полусферы, лежащей на проводящей подложке [10],

$$\varphi_0 = -E_0 z\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) = -E_0 r\cos\Theta\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \ \left(0 \leqslant \Theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \tag{15}$$

$\delta\varphi$ — добавка, вызванная возмущением поверхности $\xi(\Theta, t)$, имеющая первый порядок малости.

Подставляя разложение (14) в задачу (13) и учитывая известное решение (15), получим краевую задачу для определения $\delta\varphi$

$$\Delta(\delta\varphi) = 0, \tag{16}$$

$$r \to \infty: \quad \delta\varphi \to 0, \tag{17}$$

$$r = R, \quad \Theta = \frac{\pi}{2}: \quad \delta\varphi = -\xi\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}. \tag{18}$$

Решение уравнения (16), удовлетворяющее условию (17), имеет вид

$$\delta\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(t)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\Theta). \tag{19}$$

Подставим (19), (15), (9) в граничное условие (18) при $\Theta = \pi/2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n(t)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(0) = 0.$$

Учитывая, что $P_{2k}(0) \neq 0$, $P_{2k+1}(0) = 0$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), отсюда следует $D_{2k} = 0$, $D_{2k\;1} \neq 0$, т. е. решение (19) можно переписать в виде

$$\delta\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} D_{2k+1}(t)\left(\frac{R}{r}\right)^{2k+2} P_{2k+1}(\cos\Theta). \tag{20}$$

3. Подставим (20), (15), (9) в граничное условие (18) при $r = R$

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_{2k+1}(t) P_{2k+1}(\cos\Theta) = 3E_0 \sum_{k=1}^{\infty} Z_{2k}(t)\cos\Theta P_{2k}(\cos\Theta). \tag{21}$$

Раскладывая произведение $\cos\Theta P_n(\cos\Theta)$ по полиномам Лежандра

$$\cos\Theta P_n(\cos\Theta) = a_n P_{n+1}(\cos\Theta) + b_n P_{n-1}(\cos\Theta),$$

$$a_n \equiv \frac{n+1}{2n+1}, \quad b_n \equiv \frac{n}{2n+1} \tag{22}$$

и используя свойство (7) полиномов Лежандра, получим из (21) связь коэффициентов $D_{2k+1}(t)$ и $Z_{2k}(t)$ в виде

$$D_{2k+1}(t) = 3E_0\Big[Z_{2k}(t)a_{2k} + Z_{2k+2}(t)b_{2k+2}\Big]. \tag{23}$$

Таким образом, решение задачи (13) для потенциала электрического поля в описанной системе имеет вид (14), (15), (20), (23).

Напряженность электрического поля определяется выражением

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big|_{r=R+\xi} &= -\boldsymbol{\nabla}\varphi \approx 3E_0\cos\Theta\mathbf{e}_r \\
&\quad + \Bigg\{\Bigg[\sum_{k=0}^{\infty} D_{2k+1}(t)\frac{(2k+2)}{R}P_{2k+1}(\cos\Theta) \\
&\quad - 6E_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_{2k}(t)}{R}\cos\Theta P_{2k}(\cos\Theta)\Bigg]\mathbf{e}_r \\
&\quad - \Bigg[\sum_{k=0}^{\infty} D_{2k+1}(t)\frac{1}{R}\frac{dP_{2k+1}(\cos\Theta)}{d\Theta} \\
&\quad + 3E_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_{2k}(t)}{R}\sin\Theta P_{2k}(\cos\Theta)\Bigg]\mathbf{e}_\Theta\Bigg\} \\
&\equiv \mathbf{E}_0 + \delta\mathbf{E}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Давление электрического поля на поверхность возмущенной полусферы с учетом (24) в линейном приближении по малым величинам запишется в виде

$$P_E\big|_{r=R+\xi} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E})^2\big|_{r=R+\xi} \approx \frac{1}{8\pi}\Big[(\mathbf{E}_0)^2 + 2\mathbf{E}_0\delta\mathbf{E}\Big] \equiv P_E^{(0)} + \delta P_E,$$

$$P_E^{(0)} = \frac{9E_0^2}{8\pi}\cos^2\Theta,$$

$$\begin{aligned}
\delta P_E &\approx \frac{1}{4\pi}18E_0^2 \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{\infty}\Bigg\{(k-1)a_{2k-2}a_{2k-1}\frac{Z_{2k-2}(t)}{R} \\
&\quad + \Big[(k-1)a_{2k-1}b_{2k} + ka_{2k}b_{2k+1}\Big]\frac{Z_{2k}(t)}{R} \\
&\quad + kb_{2k+1}b_{2k+2}\frac{Z_{2k+2}(t)}{R}\Bigg\}P_{2k}(\cos\Theta).
\end{aligned} \tag{25}$$

4. Подставляя в (4) решение (5), а также (12) и (25) с учетом (11) и (10), получим

$$\begin{aligned}
&\Bigg\{\frac{\rho R}{2k}S^2 - \frac{18E_0^2}{4\pi R}\Big[(k-1)a_{2k-1}b_{2k} + ka_{2k}b_{2k+1}\Big] \\
&\quad - \frac{2\sigma}{R^2}\big[1 - k(2k+1)\big]\Bigg\}Z_{2k} - \frac{18E_0^2}{4\pi R} \\
&\quad \times \Big[(k-1)a_{2k-2}a_{2k-1}Z_{2k-2} \\
&\quad + kb_{2k+1}b_{2k+2}Z_{2k+2}\Big] = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).
\end{aligned} \tag{26}$$

Это — бесконечная система однородных связанных уравнений, определяющая амплитуды различных мод капиллярных колебаний. Она имеет нетривиальное решение, когда определитель, составленный из коэффициентов при амплитудах мод, обращается в нуль. Условие равенства нулю определителя системы (26) определяет дисперсионное уравнение задачи, имеющее бесконечный порядок

$$\begin{vmatrix} 4^{-1}\Theta + 2 - ya_2b_3 & -yb_3b_4 & 0 & \dots \\ -ya_2a_3 & 8^{-1}\Theta + 9 - y(a_3b_4 + 2a_4b_5) & -2yb_5b_6 & \dots \\ 0 & -2ya_4a_5 & 12^{-1}\Theta + 20 - y(2a_5b_6 - 3a_6b_7) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$y \equiv \frac{9}{4\pi} w, \quad w \equiv \frac{E_0^2 R}{\sigma}, \quad \Theta \equiv \frac{\rho R^3}{\sigma} S^2,$$

a_n и b_n определяются (22).

В нулевом порядке приближений и в пренебрежении взаимодействием мод, описываемым недиагональными членами выписанного определителя (дисперсионного уравнения), частоты капиллярных колебаний k-й моды можно получить в виде

$$S^2 = -\frac{2\sigma}{\rho R^3} k \left[k(k+1) - 2 - w \frac{9k[(2k+1)(2k^2-1) - 4k]}{4\pi(4k^2-1)(2k+3)} \right]$$

$$(k = 2, 4, 6, \dots).$$

Поверхность капли становится неустойчивой, когда квадрат частоты проходит через нуль $S^2 = 0$ и становится положительным. Таким образом, критические условия неустойчивости полусферической капли получаются из дисперсионного уравнения при $S^2 = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 - ya_2b_3 & -yb_3b_4 & 0 & \dots \\ -ya_2a_3 & 9 - y(a_3b_4 + 2a_4b_5) & -2yb_5b_6 & \dots \\ 0 & -2ya_4a_5 & 20 - y(2a_5b_6 + 3a_6b_7) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \tag{27}$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений, можно получить критические условия возбуждения различных мод капиллярных колебаний. Так, раскрытие определителя 3-го порядка позволяет определить критические условия для 2, 4 и 6-й мод $w_2 \approx 7.79$, $w_4 \approx 30.87$, $w_6 \approx 57.75$. Из приведенных значений видно, что при увеличении внешнего поля раньше всех теряет устойчивость мода с $n = 2$, это значение параметра w и определяет порог устойчивости поверхности полусферической капли $w = 7.79$. Для сравнения отметим, что равновеликая по объему свободная капля теряет устойчивость при $w = 2.62$ [11]. Для критической величины напряженности внешнего однородного электростатического поля, в котором становится неустойчивой полусферическая капля, полученный результат означает увеличение примерно в полтора раза по сравнению с критической величиной поля для равновеликой по объему свободной капли.

В нулевом порядке приближений и в пренебрежении взаимодействием мод из (26) несложно получить аналитические выражения для критических зависимостей параметра w_k от номера моды в виде

$$w_k = \frac{4\pi[k(k+1) - 2](4k^2-1)(2k+3)}{9[(2k+1)(2k^2-1) - 4k]k}$$

$$(k = 2, 4, 6, \dots).$$

Заключение

В проведенном анализе выяснилось, что осевшая на проводящей подложке капля электропроводной жидкости более устойчива во внешнем однородном электростатическом поле, чем равная по объему свободная капля.

Список литературы

[1] *Базелян Э.М., Горин Б.Н., Левитов В.И.* Физические и инжеренные основы молниезащиты. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 224 с.
[2] *Grigor'ev A.I., Grigor'eva I.D., Shiryaeva S.O.* // J. Sci. Expl. 1991. Vol. 5. N 2. P. 163–190.
[3] *Григорьева И.Д., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 9. С. 202–207.
[4] *Григорьев О.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 2. С. 23–34.
[5] *Barreto E.* // Aerosol Sci. 1971. Vol. 2. P. 219–228.
[6] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Методы расчета критических условий электрогидродинамических неустойчивостей. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1996. 60 с.
[7] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 2. С. 1–10.
[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 730 с.
[9] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962. 1100 с.
[10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[11] *Taylor G.* // Proc. Roy. Soc. A. 1964. Vol. 280. P. 383–397.