

01;03

## Численное исследование поперечного отрыва в пространственных сверхзвуковых течениях около круговых конусов

© Ю.П. Головачев, Н.В. Леонтьева

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 25 июня 1997 г.)

Задача сверхзвукового пространственного обтекания острых конусов решается с использованием системы уравнений Навье–Стокса в локально-коническом приближении. Численные решения находятся с помощью неявной конечно-разностной схемы с экспоненциальной аппроксимацией уравнений второго порядка по поперечной координате. Исследуются возникновение и развитие поперечного отрывного течения у подветренной стороны конусов при ламинарном режиме течения газа в ударном слое.

### Введение

При увеличении угла атаки пространственное сверхзвуковое обтекание конических тел сопровождается поперечным отрывом потока, приводящим к формированию весьма сложной вихревой структуры у подветренной части тела. Образование вихрей оказывает значительное влияние на аэродинамические характеристики и теплообмен газа с обтекаемой поверхностью. Важной особенностью обтекания конических тел с гладким контуром поперечного сечения, в частности круговых конусов, является то, что положение точки поперечного отрыва заранее неизвестно. При этом возникновение поперечного отрыва и дальнейшее развитие структуры газодинамического поля у подветренной части тела определяются процессами молекулярного переноса и вязко-невязкого взаимодействия, что приводит к необходимости использования в расчетах модели Навье–Стокса. В рамках этой модели численные исследования пространственного сверхзвукового обтекания острых конусов проводились, например, в [1–6]. Кроме отрыва поперечного течения результаты расчетов демонстрируют такие особенности обтекания, как возникновение вторичных вихрей и внутренних скачков уплотнения, возрастание теплового потока к поверхности тела в подветренной части плоскости симметрии течения, изменение формы головной ударной волны, нарушение симметрии отрывного течения и переход к нестационарному периодическому режиму обтекания. Имеющиеся результаты не содержат, однако, систематических данных об условиях возникновения указанных выше особенностей и развитии структуры течения в ударном слое. Даже для круговых конусов расчетные результаты относятся к сравнительно узкому диапазону условий обтекания, который соответствует имеющимся экспериментальным данным для чисел Рейнольдса  $Re \gtrsim 10^5$  и больших сверхзвуковых чисел Маха.

В настоящей работе представлены результаты расчетов обтекания острых круговых конусов при числах Маха набегающего потока  $1.5 \leq M_\infty \leq 8$ , числах Рейнольдса  $10^2 \lesssim Re \lesssim 10^5$  и относительных углах атаки  $0 \leq \alpha/\vartheta_c \leq 3$ , где  $\alpha$  — угол атаки,  $\vartheta_c$  — угол

полураствора конуса. На примере обтекания круговых конусов исследуется возникновение поперечного отрыва при ламинарном режиме течения газа в ударном слое. Из численных решений уравнений Навье–Стокса получена информация о предельных значениях угла атаки, при которых возникает отрыв поперечного течения, и их зависимости от угла полураствора конуса, чисел Рейнольдса и Маха, температуры обтекаемой поверхности. Исследуется изменение структуры газодинамического поля и распределений давления, теплового потока и напряжения трения на поверхности конусов при изменении условий обтекания.

### Постановка задачи

Численное исследование пространственного сверхзвукового обтекания острых конусов проводится в предположении о локально-коническом характере течения газа в ударном слое [7]. При этом уравнения Навье–Стокса записываются вначале в цилиндрической системе координат  $(x, r, \vartheta)$ , в которой ось  $x$  совпадает с продольной осью конуса. Далее предполагается, что значения газодинамических функций остаются неизменными вдоль лучей, проведенных из вершины тела. При этом предположении

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{r}{x} \frac{\partial}{\partial r} \quad (1)$$

и расчет пространственного обтекания сводится к решению двумерной задачи в плоскости  $x = \text{const}$ , расстояние которой от вершины конуса определяется значением числа Рейнольдса  $Re = \rho_\infty V_\infty x / \mu_\infty$ . Здесь нижним индексом  $\infty$  отмечены параметры невозмущенного набегающего потока. Применимость такого приближения для расчета пространственного сверхзвукового обтекания острых конических тел подтверждается удовлетворительным совпадением результатов с решениями трехмерных задач с данными экспериментов [4,7,8].

Граничные условия задачи формулируются следующим образом. На поверхности конуса задаются нулевые значения всех компонент скорости газа. Кроме того, задается температура  $T_w$  или условие тепловой изоляции

$\partial T / \partial n = 0$ . Внешняя граница расчетной области совмещается с головной ударной волной. Здесь в качестве граничных условий используются соотношения Ренкина–Гюгонио. В рассматриваемых условиях течение в ударном слое является стационарным и симметричным относительно плоскости, содержащей вектор скорости набегающего потока. Соответственно расчетная область ограничивается полуплоскостью  $0 \leq \vartheta \leq \pi$  с использованием на границах условий симметрии.

В расчетах используется модель однородного совершенного газа с отношением удельных теплоемкостей  $\gamma = 1.4$ . Коэффициент вязкости вычисляется по формуле Сазерленда для воздуха, число Прандтля  $Pr = 0.72$ .

## Численный метод

После перехода к новым независимым переменным

$$n = \frac{r - r_w}{r_s - r_w}, \quad s = \frac{\vartheta}{\pi}, \quad (2)$$

расчетная область преобразуется в единичный квадрат. Здесь  $r = r_w$ ,  $r = r_s(\vartheta)$  — уравнение контуров поперечного сечения тела и головной ударной волны в рассматриваемом сечении  $x = \text{const}$ .

Стационарные решения находятся в результате установления с помощью численного метода постоянного направления [7]. После перехода к безразмерным переменным уравнения Навье–Стокса в локально-коническом приближении записываются в виде

$$E \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} - \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial n} \left( A \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial n} \right) + B \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial n} + C \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} + D \mathbf{X} + \mathbf{F} = 0, \quad (3)$$

$$e \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + b \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial n} + c \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} + d \mathbf{X} + \mathbf{f} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{X} = \{T u v p\}^T$  — вектор-столбец искомых функций;  $T, p, \rho$  — температура, давление и плотность газа;  $u, v, w$  — составляющие вектора скорости по направлениям  $x, n, s$  соответственно. Матричное уравнение (3) включает в себя уравнение баланса энергии и уравнения для составляющих импульса в направлениях  $x, s$ , а матричное уравнение (4) — уравнение баланса импульса в проекции на  $n$  и уравнение неразрывности.

Исходные уравнения аппроксимируются с помощью двухслойной неявной конечно-разностной схемы [9], в которой по поперечной координате  $n$  для уравнений (3) применяется экспоненциальная аппроксимация, а для уравнений (4) — разностные формулы вида

$$\frac{\partial f}{\partial n} \sim \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta n}, \quad (j = 1, \dots, J), \quad (5)$$

где  $f$  — любая из искоемых функций.

Первый элемент вектора  $f$  в уравнениях (4) содержит повторную производную от нормальной составляющей

скорости газа, которая аппроксимируется симметричной разностной формулой

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial n} \right) \sim \frac{\mu_{j+1}(v_{j+2} - v_j) - \mu_j(v_{j+1} - v_{j-1})}{2(\Delta n)^2}, \quad (j = 2, \dots, J - 2). \quad (6)$$

В приграничных узлах сетки ( $j = 1, j = J - 1$ ) вместо (6) применяются несимметричные аппроксимации.

Повторные производные по  $s$  и смешанные производные во всех уравнениях аппроксимируются центральными разностными отношениями. При больших числах Рейнольдса ( $Re \gtrsim 10^4$ ) использование центральных разностных формул для производных по  $s$  в конвективных членах уравнений приводило к осцилляциям численного решения в окружном направлении. Осцилляции устранялись при переходе к односторонним разностным аппроксимациям с использованием  $(\pm)$  расщепления соответствующей матрицы коэффициентов [10]

$$C \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} = C^+ \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \right)^L + C^- \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \right)^R,$$

$$C^+ = R \frac{D + |D|}{2} R^{-1}, \quad C^- = R \frac{D - |D|}{2} R^{-1}. \quad (7)$$

Здесь  $D$  — диагональная матрица собственных значений матрицы  $C$ ;  $R$  — матрица, составленная из правых собственных векторов матрицы  $C$ ; верхние индексы  $L, R$  соответствуют левой и правой односторонним разностным формулам. В рамках используемого метода расчет каждого шага по времени выполняется с помощью итераций. При этом все коэффициенты уравнений, члены с производными по  $s$  и свободные члены вычисляются по результатам предыдущей итерации. В результате система разностных уравнений в текущей итерации распадается на независимые линейные подсистемы на лучах  $s = \text{const}$ . При указанном выше способе разностной аппроксимации уравнений по поперечной координате эти подсистемы имеют блочные трехдиагональные матрицы коэффициентов и решаются векторной прогонкой. Одновременно с расчетом поля газодинамических функций в ударном слое определяется положение головной ударной волны. Для этого используется условие непроницаемости обтекаемой поверхности, которое переносится на внешнюю границу расчетной области и присоединяется к соотношениям Ренкина–Гюгонио.

Используемая разностная схема имеет второй порядок точности по обеим пространственным координатам. Для установления стационарного решения требуется в зависимости от условий обтекания от нескольких десятков до нескольких сотен шагов по времени. Число итераций при расчете нового временного слоя изменялось от одной до четырех. Большая часть расчетов выполнена на сетке, содержащей 31 луч  $s = \text{const}$  при 51 узле на луче. При построении разностной сетки применялись описанные в [7] преобразования координат, обеспечивающие сгущение узлов в областях, больших градиентов искоемых функций.

## Результаты расчетов

Результаты расчетов представлены на рисунках в безразмерном виде. Давление и тепловой поток отнесены соответственно к  $\rho_\infty V_\infty^2$  и  $\rho_\infty V_\infty^3$ . Коэффициент трения определен как отношение напряжения трения на поверхности конуса к  $\rho_\infty V_\infty^2$ . Температура поверхности конуса  $T_w$  указана в долях температуры торможения набегающего потока  $T^*$ . В тех случаях, когда температура  $T_w$  не указана, результаты соответствуют теплоизолированной поверхности конуса.

Рассмотрим вначале результаты расчетов, относящиеся к возникновению поперечного отрыва. На рис. 1 представлена зависимость предельного угла атаки  $\alpha^*$ , при котором появляется поперечное отрывное течение, от угла полураствора конуса при трех значениях числа Рейнольдса. Предельное значение угла атаки определялось по изменению знака производной от окружной составляющей коэффициента трения  $C_{f2}$  в точке  $s = 1.0$ . На рисунке можно видеть, во-первых, уменьшение предельного угла атаки при увеличении числа Рейнольдса. Во-вторых, следует отметить немонотонный характер представленных зависимостей, указывающий на то, что безотрывный режим обтекания дольше сохраняется для конусов с углами полураствора  $12 \lesssim \vartheta_c \lesssim 18^\circ$ . С увеличением числа Рейнольдса максимум в зависимости  $\alpha^*(\vartheta_c)$  становится более резким. При  $\vartheta \gtrsim 16^\circ$  во всех рассмотренных случаях  $\alpha^* < \vartheta_c$ , т.е. отрыв возникает до перехода образующей  $\vartheta = \pi$  в область "тени". При  $\vartheta \lesssim 16^\circ$  предельный угол атаки в зависимости от значения числа Рейнольдса может быть как меньше, так и больше угла полураствора конуса. Зависимость предельного угла атаки от числа Маха набегающего

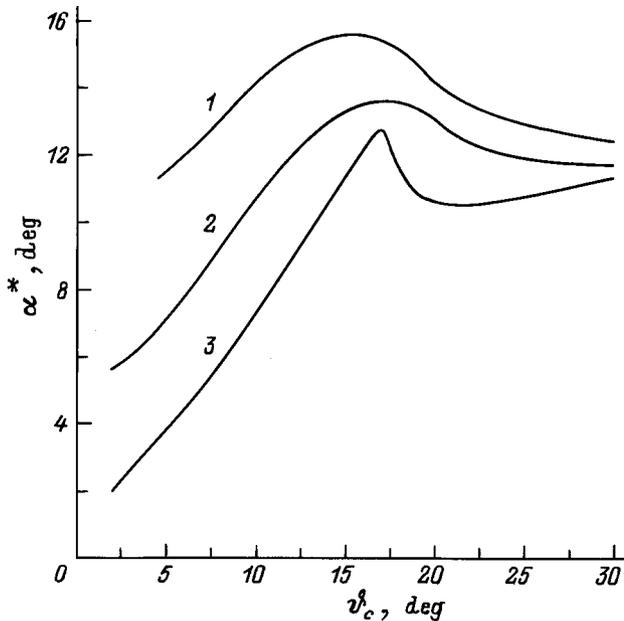


Рис. 1. Зависимость предельного значения угла атаки от угла полураствора конуса.  $M_\infty = 2$ ; Re: 1 —  $10^3$ , 2 — 3770, 3 —  $10^5$ .

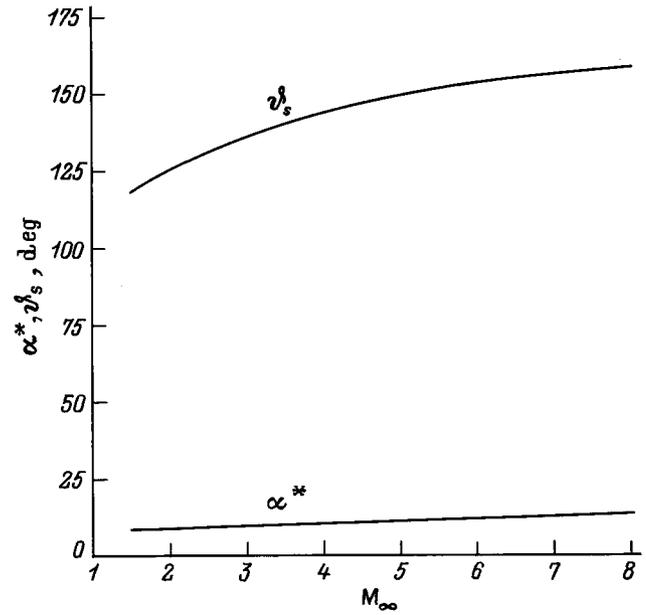


Рис. 2. Зависимость предельного угла атаки и координаты точки отрыва от числа Маха.  $Re = 10^4$ ,  $\vartheta_c = 10^\circ$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $T_w = 0.25T^*$ .

потока, показанная на следующем рисунке, близка к линейной. Уменьшение температуры обтекаемой поверхности приводит к некоторому уменьшению  $\alpha^*$ . При этом влияние температурного фактора убывает с увеличением числа Рейнольдса.

Возникновение поперечного отрыва иллюстрируется рис. 3, на котором показаны линии постоянных значений вихря скорости поперечного течения у подветренной части конуса с углом полураствора  $\vartheta_c = 12^\circ$  при угле атаки  $\alpha = 10^\circ$ . Значения вихря скорости отнесены к  $V_\infty/x$ . Как следует из рис. 1, в рассматриваемом случае угол атаки несколько больше критического значения. На рисунке можно видеть зарождение поперечного отрывного течения в окрестности пересечения контура тела с плоскостью симметрии. При увеличении угла атаки по мере развития отрывного течения его центр удаляется от поверхности тела и плоскости симметрии.

На рис. 4, а-с показаны структура поля скорости поперечного течения и ее зависимость от температурного фактора и числа Рейнольдса при больших углах атаки. Здесь можно видеть наличие развитого отрывного течения, интенсивность которого увеличивается при охлаждении поверхности и увеличении числа Рейнольдса. На рис. 5 для одного из вариантов условий обтекания представлены линии постоянных значений числа Маха поперечного течения  $M = \sqrt{v^2 + w^2}/c$ , где  $c$  — местное значение скорости звука. Пунктир соответствует  $M = 1.0$ . Обращает на себя внимание своеобразная форма звуковой линии вблизи подветренной части плоскости симметрии. На рисунках видно также, что при указанных условиях головная ударная волна имеет нормальную форму с максимумом отхода от поверхности тела в

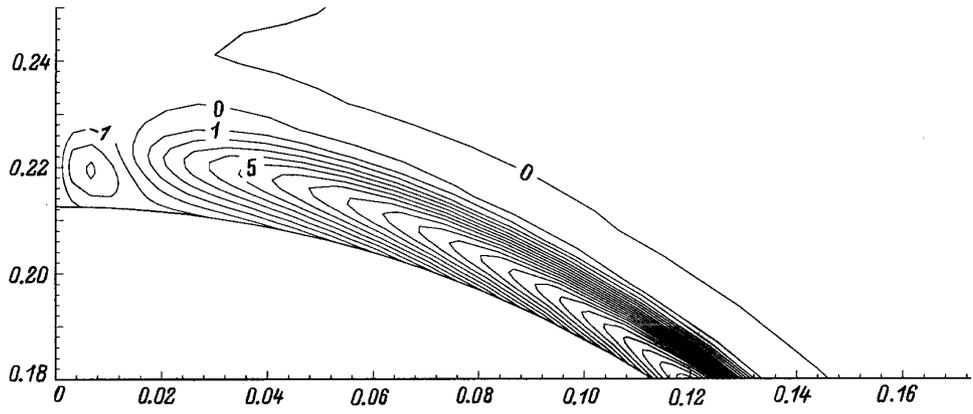


Рис. 3. Изолинии завихренности поперечного течения.  $M_\infty = 2$ ,  $Re = 10^5$ ,  $\vartheta_c = 12^\circ$ ,  $\alpha = 10^\circ$ .

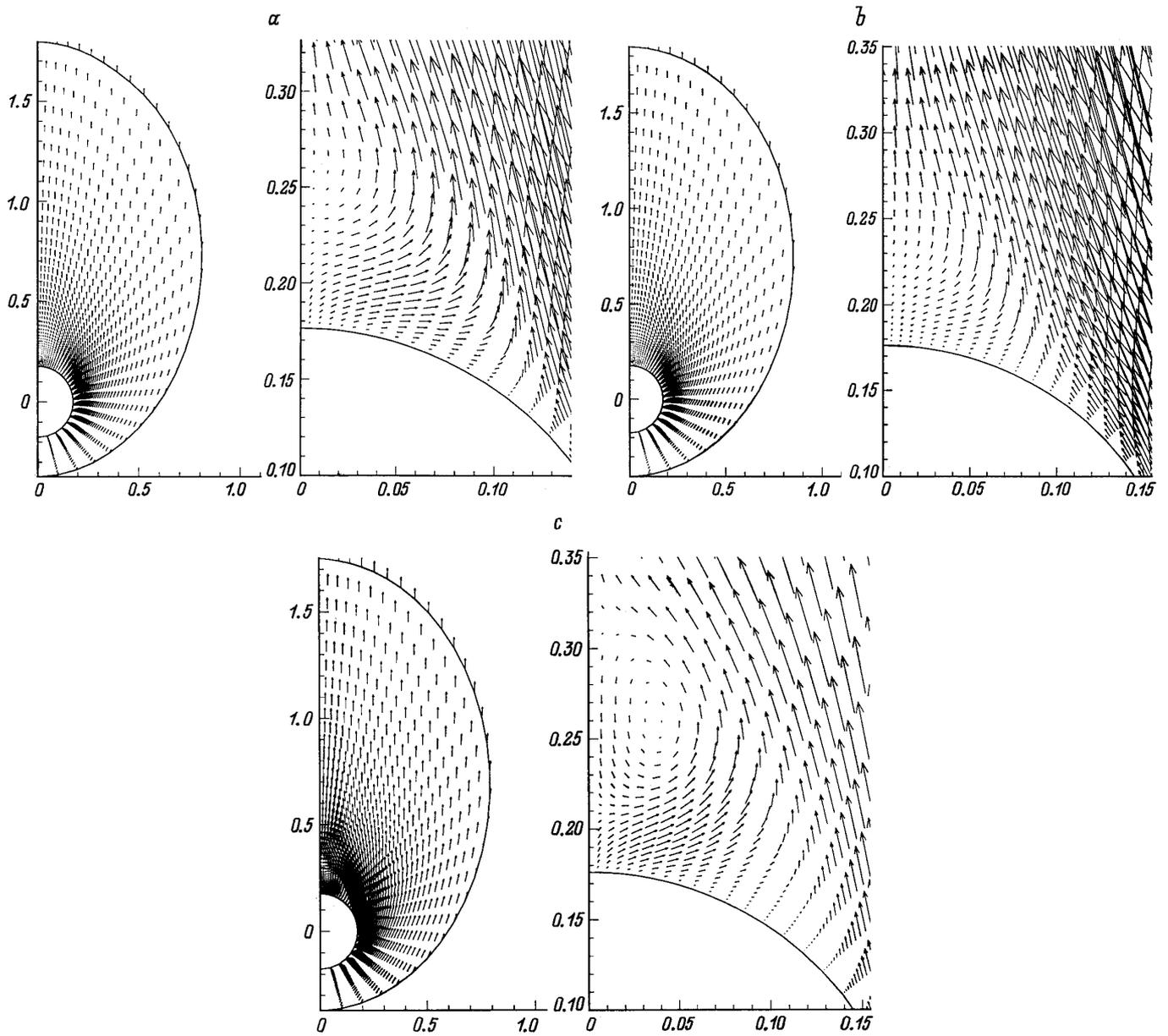


Рис. 4. Векторные линии поля скорости поперечного течения.  $M_\infty = 2$ ,  $\vartheta_c = 10^\circ$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ;  $a - Re = 377$ ,  $T_w = 0.25T^*$ ;  $b - Re = 377$ ;  $c - Re = 3770$ .

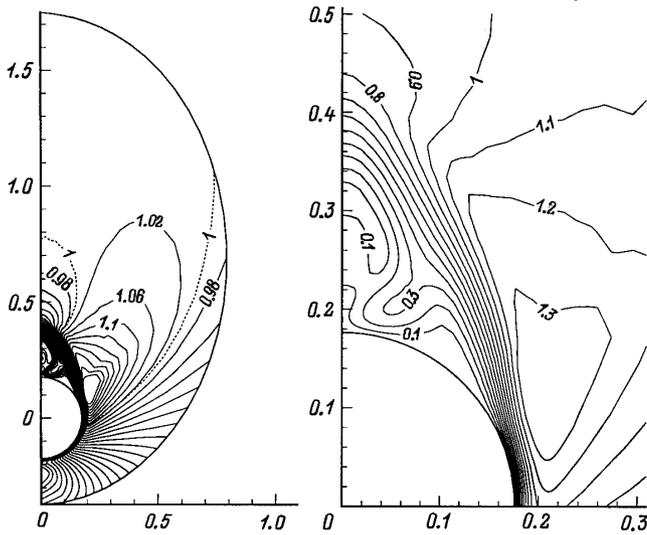


Рис. 5. Изолинии числа Маха поперечного течения.  $M_\infty = 2$ ,  $Re = 3770$ ,  $\vartheta_c = 10^\circ$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

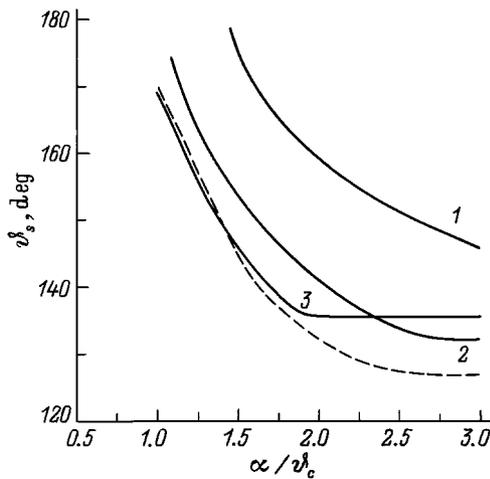


Рис. 6. Зависимость угловой координаты точки поперечного отрыва от относительного угла атаки.  $M_\infty = 2$ ,  $Re = 3770$ ,  $\vartheta_c$ : 1 — 5, 2 — 10, 3 — 15°; штриховая кривая —  $T_w = 0.25T^*$ .

подветренной части плоскости симметрии течения. Такая же форма головной ударной волны была получена и при других вариантах условий обтекания.

На рис. 6 показана зависимость положения точки поперечного отрыва потока от угла атаки, отнесенного к углу полураствора конуса. Видно, что при не слишком больших значениях отношения  $\alpha/\vartheta_c$  увеличение угла атаки  $\alpha$  при фиксированном  $\vartheta_c$  приводит к расширению области отрывного течения и, наоборот, увеличение угла полураствора  $\vartheta_c$  при фиксированном  $\alpha$  — к сокращению этой области. Такая закономерность сохраняется до значения относительного угла атаки, которое убывает с увеличением угла полураствора конуса. Дальнейшее увеличение угла атаки практически не влияет на размер отрывной области. Из представленных результатов следует

также, что при  $\alpha/\vartheta_c \lesssim 2.3$  размер области отрывного течения в большей степени определяется изменением угла атаки, чем угла полураствора конуса. Это видно из того, что сокращение области отрывного течения из-за уменьшения  $\alpha$  превышает ее расширение из-за такого же уменьшения  $\vartheta_c$ . При  $\alpha/\vartheta_c \gtrsim 2.3$  зависимость размера отрывной области от угла полураствора конуса при фиксированном отношении  $\alpha/\vartheta_c$  становится немонотонной. Сравнение результатов для случаев теплоизолированной поверхности конуса и поверхности с заданной температурой (штриховая и сплошная кривая 2) демонстрирует расширение области отрывного течения при охлаждении обтекаемой поверхности. В качественном отношении представленные на рис. 6 результаты согласуются с имеющимися теоретическими и экспериментальными данными [1–4, 11] для больших чисел Рейнольдса.

При больших углах атаки увеличение числа Рейнольдса приводит к возникновению вторичного отрывного

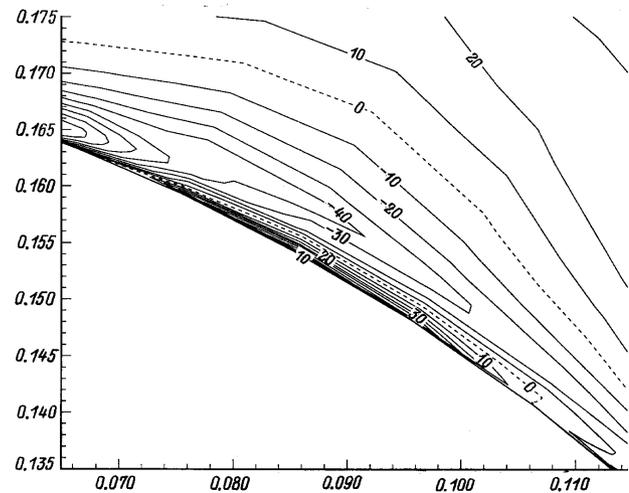


Рис. 7. Изолинии завихренности поперечного течения.  $M_\infty = 2$ ,  $Re = 0.9 \cdot 10^5$ ,  $\vartheta_c = 10^\circ$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $T_w = 0.25T^*$ .

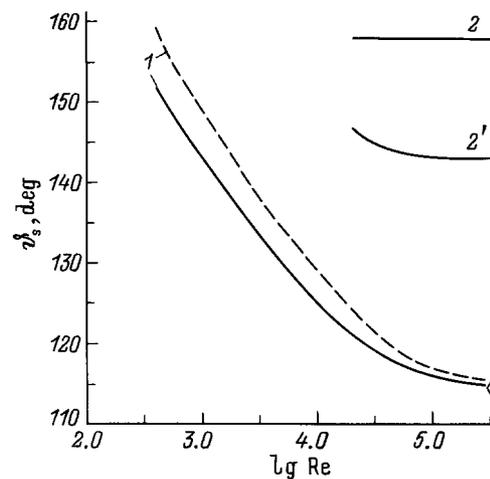
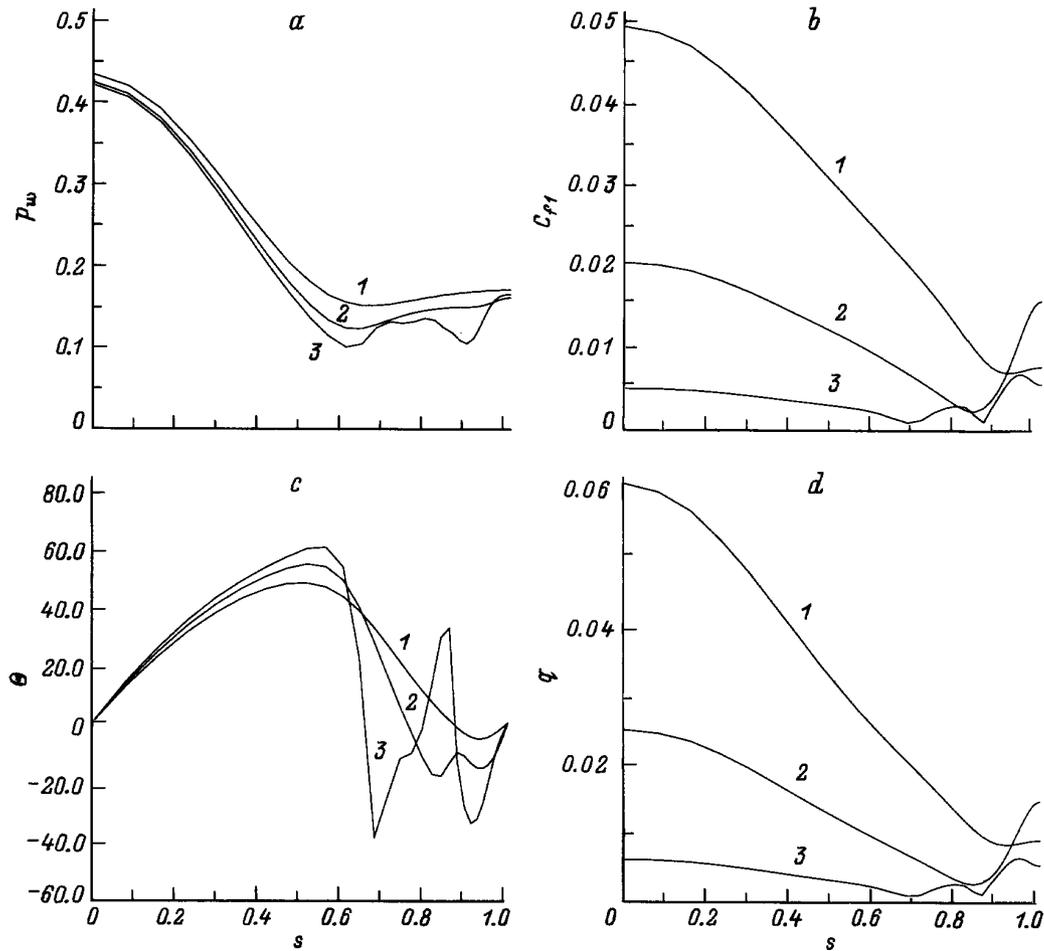


Рис. 8. Зависимость границ отрывных течений от числа Рейнольдса.  $M_\infty = 2$ ,  $\vartheta_c = 10^\circ$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\diamond$  — эксперимент [11].



**Рис. 9.** Распределение давления (*a*), коэффициента трения (*b*), направления предельных линий тока (*c*) и теплового потока (*d*) по поверхности конуса.  $M_\infty = 2$ ,  $\vartheta_c = 10^\circ$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $T_w = 0.25T^*$ ,  $Re$ : 1 — 622, 2 — 3645, 3 —  $0.6 \cdot 10^5$ .

течения. Этот эффект демонстрируется на рис. 7, где представлены линии постоянных значений вихря скорости поперечного течения в пристеночной области на подветренной стороне конуса. На рис. 8 показано изменение границ основного (кривые 1) и вторичного (кривые 2, 2') отрывных течений при увеличении числа Рейнольдса. Сплошные линии соответствуют  $T_w = 0.25T^*$ , штриховая —  $T_w = 0.50T^*$ . На рисунке приведен также результат измерений [11]. Из представленных результатов видно уменьшение влияния температурного фактора на размер основного отрывного течения при увеличении числа Рейнольдса. Зависимость  $\vartheta_s$  от числа Маха набегающего потока показана на рис. 2. Присоединение основного отрывного течения к поверхности конуса происходит при  $\vartheta = \pi$ . Как видно из рис. 7, при достаточно больших числах Рейнольдса внутри основного возникает вторичное отрывное течение. Изменение координат точек отрыва и присоединения вторичного отрывного течения показано на рис. 8 линиями 2 и 2' соответственно. Полученная в расчетах структура течения у подветренной стороны конуса при больших числах Рейнольдса соответствует результатам экспериментальных исследований [4,11,12].

На рис. 9, *a-d* представлены результаты, демонстрирующие влияние числа Рейнольдса на изменение давления, продольной составляющей коэффициента трения, угла отклонения предельных линий тока и теплового потока на поверхности конуса. Угол отклонения предельных линий тока от направления образующей конуса вычислялся по формуле  $\Theta = \arctan(C_{f2}/C_{f1})$ , где  $C_{f1}$ ,  $C_{f2}$  — составляющие коэффициента поверхностного трения вдоль образующей и в окружном направлении.

Изменения в распределениях указанных выше величин отражают изменение структуры течения в ударном слое при увеличении числа Рейнольдса, которое состоит в уменьшении толщины пограничного слоя на наветренной части конуса, интенсификации отрывного течения в подветренной области и возникновении вторичного вихря. Коэффициент трения и тепловой поток в наветренной области изменяются с увеличением числа Рейнольдса по погранслоному закону, т.е.  $\sim 1/\sqrt{Re}$ . Влияние поперечного отрыва на распределения этих величин проявляется в нарушении их монотонного убывания в окружном направлении и появлении максимумов при  $\vartheta = \pi$ . При  $Re = 0.6 \cdot 10^5$  из-за возникновения вторичного

отрывного течения изменение всех представленных на рис. 9 величин на подветренной части тела приобретает более сложный характер, а значения коэффициента трения и теплового потока в точке  $\vartheta = \pi$  превосходят их значения при  $\vartheta = 0$ . Возрастание теплового потока в подветренной части плоскости симметрии течения отмечалось ранее в экспериментальных и численных исследованиях [2,3,11,12]. Оно объясняется наличием поперечного возвратного течения, которое переносит в пристеночную область газ из высокотемпературной внешней области ударного слоя.

## Заключение

С использованием локально-конического приближения системы уравнений Навье–Стокса выполнено численное исследование возникновения и развития поперечного отрывного течения у подветренной стороны острых круговых конусов. Исследована зависимость структуры газодинамического поля и распределений параметров сопротивления и теплообмена от угла полураствора конуса, чисел Рейнольдса и Маха набегающего потока и температурного фактора.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00596).

## Список литературы

- [1] *Lin A., Rubin S.G.* // J. Fluid Mech. 1973. Vol. 59. Pt 3. P. 593–620.
- [2] *Lubard S.C., Helliwell W.C.* // AIAA J. 1974. Vol. 12. N 7. P. 965–974.
- [3] *Lin A., Rubin S.G.* // AIAA J. 1982. Vol. 20. N 11. P. 1500–1507.
- [4] *Peake D.J., Fisher D.F., McRae D.S.* // AIAA J. 1982. Vol. 20. N 10. P. 1338–1345.
- [5] *Newsome R.W.* // AIAA J. 1986. Vol. 24. N 4. P. 552–561.
- [6] *Kandil O.A., Wong T.C., Liu C.H.* // Proc. AGARD Conf. 1990. N 0493.
- [7] *Головачев Ю.П.* Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. М.: Наука, 1996. 376 с.
- [8] *Golovachov Yu.P., Chistyakov V.O.* // Proc. II Asian CFD Conf. / Ed. by H. Kubota, S. Aso. Vol. 2. Tokyo, 1996. P. 457–462.
- [9] *Белоусов В.Л., Головачев Ю.П., Земляков В.В.* // Математическое моделирование. 1994. Т. 6. № 10. С. 66–76.
- [10] *Chakravarthy S.R., Anderson D.A., Salas M.D.* // AIAA Paper. 1980. N 0268.
- [11] *Авдеевский В.С., Медведев К.И.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 2. С. 117–119.
- [12] *Marcillat J., Roux B.* // AIAA J. 1972. Vol. 10. N 12. P. 1625–1630.