

05.4

## **Напряженное состояние матрицы и включения из скрученного композитного сверхпроводника в оболочке при взаимодействии кругового тока с магнитным полем**

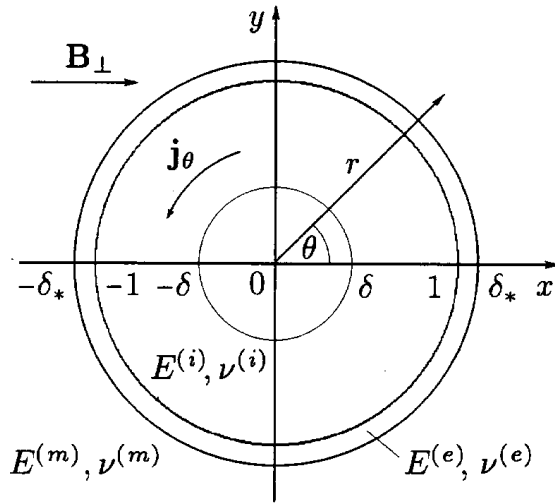
© Е.А. Девяткин

Институт проблем механики РАН, Москва

*Поступило в Редакцию 22 мая 1997 г.*

Рассмотрено напряженное состояние матрицы и заключенного в оболочку длинного провода из скрученного многожильного композитного сверхпроводника при взаимодействии круговой составляющей транспортного тока с магнитным полем.

В [1–3] рассмотрено напряженное состояние матрицы и длинного цилиндрического включения из скрученного многожильного композитного сверхпроводника с транспортным током, обусловленное взаимодействием его продольной составляющей с магнитным полем. В частности, показано, что растрескивание эпоксидной смолы, часто используемой в качестве матрицы в сверхпроводящих магнитах и обладающей низким пределом прочности на сдвиг  $\tau_f = (1-6) \cdot 10^6$  Па [4] при плотности критического тока  $10^9$  А/м<sup>2</sup> в проводе радиусом  $10^{-3}$  м, происходит во внешнем магнитном поле с индукцией 2–12 Т. Отношение длины окружности провода скрученного многожильного композитного сверхпроводника к его шагу скрутки может составлять несколько десятых [5] и, следовательно, в общем случае необходим учет взаимодействия



круговой компоненты тока с магнитным полем. Ниже исследуется напряженное состояние матрицы и провода в оболочке при таком взаимодействии.

Рассмотрим "впаянный" в бесконечную неферромагнитную матрицу провод единичного скрученного многожильного композитного сверхпроводника, окруженный оболочкой радиуса  $\delta_*$  и находящийся во внешнем однородном магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}_a$ . Пусть внешнее поле меняется со временем достаточно медленно, так что макроскопического его экранирования не происходит. Монотонно возрастающий со временем транспортный ток  $I$ , меньший критического  $I_s (I < I_s)$ , протекает в области  $\delta < r < 1$  (см. рисунок), где  $\delta^2 = 1 - I/I_s$  [5]. Будем считать, что сверхпроводящие свойства провода не зависят от напряжений и деформаций; при описании его физико-механического состояния справедлив макроскопический подход и квазистатическое приближение; включение, оболочка и матрица линейно-упруги, однородны и изотропны, их модули Юнга и коэффициенты Пуассона соответственно равны  $E^{(k)}$ ;  $\nu^{(k)}$  ( $k = i, e, m$ ). В насыщенной зоне на провод, находящийся в магнитном поле  $\mathbf{B}$ , действует сила Лоренца  $\mathbf{f} = \mathbf{j}_s \times \mathbf{B}$ . Найдем напряжения в средах,

обусловленные взаимодействием круговой компоненты  $j_\theta$  вектора плотности транспортного тока  $\mathbf{j}_s$  с магнитным полем (см. рисунок). При малой величине  $\lambda_p$ , равной отношению длины окружности провода из скрученного многожильного композитного сверхпроводника к его шагу скрутки, имеем  $j_\theta = \lambda_p j_s r$  [5]. Магнитное поле  $\mathbf{B}$  является суперпозицией внешнего поля  $\mathbf{B}_a$ , имеющего поперечную  $\mathbf{B}_\perp$  и осевую  $\mathbf{B}_\parallel$  составляющие ( $\mathbf{B}_a = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel$ ) и поля круговых токов провода  $\mathbf{B}_j$  ( $\mathbf{B} = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_j$ ).

Уравнение равновесия для перемещений в насыщенной зоне  $\mathbf{u}^{(j)}$  имеет вид [6]

$$\Delta \mathbf{u}^{(j)} + \frac{1}{1 - 2\nu^{(i)}} \text{grad div } \mathbf{u}^{(j)} = - \frac{\mathbf{f}}{G^{(i)}}, \quad (1)$$

где  $\Delta$  — лапласиан,  $G^{(i)} = E^{(i)} / [2(1 + \nu^{(i)})]$  — модуль сдвига провода. Объемная сила  $\mathbf{f}$  в рассматриваемом случае имеет радиальную  $f_r$  и осевую  $f_z$  составляющие. Перемещения  $\mathbf{u}^{(k)}$  вне насыщенной зоны удовлетворяют аналогичным однородным уравнениям. Полагаем, что вдали от включения матрица не нагружена ( $\sigma^{(m)}(\infty) = 0$ ). Из условия склейки следуют отсутствие на границах областей скачков перемещений, нормальных  $\sigma_n$  и касательных  $\sigma_\tau$  к ним напряжений

$$[\mathbf{u}] = 0, \quad [\sigma_n] = 0, \quad [\sigma_\tau] = 0 \quad \text{при } r = \delta, 1, \delta_*. \quad (2)$$

Рассмотрим вначале взаимодействие кругового тока с направленным вдоль оси  $ox$  поперечным полем  $\mathbf{B}_\perp$ . Объемная сила действует вдоль провода и равна  $f_z = -j_\theta B_\perp \cos \theta$ . Будем считать, что перемещения не зависят от координаты  $z$ .<sup>1</sup> Тогда для продольных их компонент в насыщенной зоне  $u_z^{(j)}$  из (1) имеем уравнение Пуассона, а вне ее — уравнения Лапласа. Непрерывным, ограниченным на оси включения и затухающим на бесконечности решением этих уравнений с соответствующими ему непрерывными касательными к рассматриваемым границам

<sup>1</sup> Такое состояние реализуется, например, в тонком кольце из скрученного многожильного композитного сверхпроводника, находящемся в магнитном поле, перпендикулярном его плоскости. При  $x > 0$  и  $x < 0$  (см. рисунок) продольные силы Лоренца равны по величине и противоположно направлены.

напряжениями является

$$\begin{aligned}
 u_z^{(i)} &= \frac{a}{G^{(i)}} r \cos \theta, & u_z^{(j)} &= \frac{1}{G^{(i)}} (br + Wr^3 + cr^{-1}) \cos \theta, \\
 u_z^{(e)} &= \frac{1}{G^{(e)}} (dr + er^{-1}) \cos \theta, & u_z^{(m)} &= \frac{g}{G^{(m)}} r^{-1} \cos \theta, \\
 \sigma_{rz}^{(i)} &= a \cos \theta, & \sigma_{rz}^{(j)} &= (b + 2Wr^2 - cr^{-2}) \cos \theta, \\
 \sigma_{rz}^{(e)} &= (d - er^{-2}) \cos \theta, & \sigma_{rz}^{(m)} &= -gr^{-2} \cos \theta, \\
 \sigma_{\theta z}^{(i)} &= -a \sin \theta, & \sigma_{\theta z}^{(j)} &= -(b + Wr^2 + cr^{-2}) \sin \theta, \\
 \sigma_{\theta z}^{(e)} &= -(d + er^{-2}) \sin \theta, & \sigma_{\theta z}^{(m)} &= -gr^{-2} \sin \theta.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь и ниже перемещения — безразмерны,  $W = \alpha_{\perp} W_j [2(1 - \delta^2)]$ ,  $W_j = (B_j^{(j)})^2 / (2\mu_0)$ ,  $B_j^{(i)}$  — индукция магнитного поля круговых токов в области  $0 \leq r \leq \delta$ ,  $\alpha_{\perp} = B_{\perp} / B_j^{(i)}$ ,  $\mu_0$  — магнитная постоянная. Нормированные на  $2W(1 - \delta^4)$  коэффициенты равны

$$\begin{aligned}
 a &= b + \frac{\delta^2}{1 - \delta^4} = -\frac{1}{2} \frac{3 + \delta^2}{1 + \delta^2} - \beta_1(1 + \beta_2), & c &= \frac{1}{2} \frac{\delta^4}{1 - \delta^4}, \\
 d &= -\beta_1, & e &= \beta_1 \beta_2, & g &= \beta_1(\delta_*^2 + \beta_2),
 \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\beta_1 = \left[ \frac{G^i}{G^{(e)}} (1 - \beta_2) - 1 - \beta_2 \right]^{-1}, \quad \beta_2 = \delta_*^2 \frac{G^{(m)} + G^{(e)}}{G^{(m)} - G^{(e)}}.$$

Рассмотрим теперь взаимодействие круговых токов с продольной составляющей магнитного поля, равной сумме поля этих токов  $B_j = B_j^{(j)}(1 - r^2) / (1 - \delta^2)$  и однородного поля  $B_{\parallel}$ . В этом случае объемная сила имеет лишь радиальную компоненту  $f_r = j_{\theta}(B_j + B_{\parallel})$ . Из (1) в каждой области для радиальных перемещений имеем обыкновенные дифференциальные уравнения. При плоском деформированном состоянии их решением, удовлетворяющим условиям на границах раздела

областей (2), ограниченности напряжений на оси включения и их стремления к нулю при  $r \rightarrow \infty$ , является

$$\begin{aligned}
 u_r^{(i)} &= Ar, & u_r^{(e)} &= Dr + \frac{E}{r}, & u_r^{(m)} &= \frac{F}{r}, \\
 u_r^{(j)} &= Br - Pr^3 \left( 3\alpha_{\parallel} + \frac{3-r^2}{1-\delta^2} \right) + \frac{C}{r}, \\
 \sigma_r^{(i)} = \sigma_{\theta}^{(i)} &= \frac{2G^{(i)}A}{1-2\nu^{(i)}}, & \begin{pmatrix} \sigma_r^{(e)} \\ \sigma_{\theta}^{(e)} \end{pmatrix} &= 2G^{(e)} \begin{pmatrix} D \\ \frac{D}{1-2\nu^{(e)}} \mp \frac{E}{r^2} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \sigma_r^{(j)} \\ \sigma_{\theta}^{(j)} \end{pmatrix} &= \frac{2G^{(j)}}{1-2\nu^{(j)}} \left\{ B + Pr^2 \left[ \frac{(5-4\nu^{(j)})r^2}{(1+4\nu^{(j)})1-\delta^2} - 3 \frac{(3-2\nu^{(j)})}{(1+2\nu^{(j)})} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \left( \alpha_{\parallel} + \frac{1}{1-\delta^2} \right) \right] \mp (1-2\nu^{(j)}) \frac{C}{r^2} \right\}, \\
 \sigma_r^{(m)} = -\sigma_{\theta}^{(m)} &= -2G^{(m)} \frac{F}{r^2}, & \sigma_z^{(k)} &= \nu^{(k)} (\sigma_r^{(k)} + \sigma_{\theta}^{(k)}). \quad (5)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 P &= \left[ (1-2\nu^{(i)}) / (1-\nu^{(i)}) \right] W_j / \left[ 12G^{(i)}(1-\delta^2) \right], & \alpha_{\parallel} &= B_{\parallel} / B_j^{(i)}, \\
 A &= B - 3P\delta^2 \left( 2\alpha_{\parallel} + \frac{2-\delta^2}{1-\delta^2} \right) = P(1-\delta^2)^2(2+3\alpha_{\parallel}) + (1+\chi)D, \\
 D &= \frac{E}{\chi} = \frac{F}{\delta_*^2 + \chi} = \frac{W_j}{6} \left[ (1+\delta^2)(2+3\alpha_{\parallel}) - 1 \right] \left[ \frac{G^{(i)}}{1-2\nu^{(i)}}(1+\chi) \right. \\
 &\quad \left. - G^{(e)} \left( \frac{1}{1-2\nu^{(e)}} - \chi \right) \right]^{-1}, & C &= -P\delta^4 \left( 3\alpha_{\parallel} + \frac{3-2\delta^2}{1-\delta^2} \right), \\
 \chi &= -\delta_*^2 \left[ 1 + 2 \frac{1-\nu^{(e)}}{1-2\nu^{(e)}} \left( \frac{G^m}{G^e} - 1 \right) \right]^{-1}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Суперпозиция решений, полученных в [2,3] и определяемых уравнениями (3)–(6), дает возможность в общем случае рассчитать напряженно-деформированное состояние матрицы и ”впянного” в нее

длинного провода из скрученного многожильного композитного сверхпроводника с транспортным током при наличии произвольно ориентированного внешнего магнитного поля. Численные оценки, основанные на решении (3), (4), показывают, что в представляющем практический интерес случае сильного поперечного поля и эпоксидной матрицы анализ ее предельного напряженного состояния и близкой ей по упругим свойствам тонкой оболочки [4] можно проводить с точностью не хуже 1–2%, исходя из решения, полученного в [2].

Результаты работы могут быть использованы для анализа напряженного состояния элементов конструкций, содержащий слабоупруговзаимодействующие между собой сверхпроводники.

## Список литературы

- [1] Девяткин Е.А. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 10. В. 22. С. 74–79.
- [2] Deviatkin E.A. // Cryogenics. 1997. V. 37. N 3. P. 129–134.
- [3] Девяткин Е.А. // Тез. докл. IV Межд. совещания-семинара "Инженерно-физические проблемы новой техники". М., 1996. С. 66–67.
- [4] Bobrov E.S., Williams J.E.S., Iwasa Y. // Cryogenics. 1985. V. 25. N 6. P. 307–316.
- [5] Гуревич А.В., Миц Р.Г., Рахманов А.Л. // Физика композитных сверхпроводников. М.: Наука, 1987. 240 с.
- [6] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.