01;03

Модуляция капиллярных колебаний заряженной капли маловязкой жидкости ее упругими колебаниями

© *С.О. Ширяева, О.А. Григорьев*

Ярославский государственный университет

Поступило в Редакцию 19 сентября 1997 г.

Выписано линейное дифференциальное уравнение второго порядка с комплексным коэффициентом при первой производной, описывающее временнýю эволюцию амплитуд капиллярных волн в капле маловязкой жидкости, обладающей упругими свойствами. Показано, что имеет место модуляция капиллярных колебаний капли ее колебаниями, связанными с эффектом релаксации вязкости жидкости.

Исследование капиллярных и упругих колебаний сферической капли вязкой жидкости представляет интерес для весьма широкого круга задач технической физики, геофизики [1], ядерной физики [2] и космогонии [3]. Общие закономерности реализации мелкомасштабных волновых явлений в вязкоупругой жидкости исследованы в [4]. И все же некоторые частные вопросы, связанные с этой проблемой, например о взаимодействии капиллярных и упругих волн, пока не изучены. В связи с этим разберем эту задачу для случая маловязкой жидкости, когда имеется возможность выписать уравнения временнóй эволюции амплитуд волн на свободной поверхности жидкости.

1. Рассмотрим сферическую каплю радиуса R вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ, с коэффициентом кинематической вязкости ν, на поверхности которой существуют капиллярные волны бесконечно малой амплитуды, возникающие вследствие теплового движения молекул жидкости. Пусть жидкость является диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, а заряд капли Q равномерно распределен по ее объему.

Система уравнений электрогидродинамики с электростатическим потенциалом Φ, создаваемым зарядом Q, распределенным в жидкости, в сферической системе координат с началом в центре капли имеет вид [5]:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P^{in} + \nu \cdot \Delta\mathbf{U}, \quad \operatorname{div}\mathbf{U} = 0,$$

$$\Delta\Phi^{in} = -\frac{3Q}{4\pi\varepsilon R^3}; \quad \Delta\Phi^{ex} = 0,$$

$r = R + \xi$:

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\nabla} F = 0,$$

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - R - \xi(\theta, \phi, t) = 0.$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} = 0,$$

$$-(P^{in} - P^{ex}) - 2\rho\nu\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} + P_\sigma - P_{\mathbf{E}} = 0,$$

$$\Phi^{in} = \Phi^{ex}; \qquad \varepsilon\,\frac{\partial \Phi^{in}}{\partial n} = \frac{\partial \Phi^{ex}}{\partial n},$$

$r = 0$:

$$\Phi^{in} = 0;$$

$r \to \infty$:

$$\Phi^{ex} = 0.$$

$$P_\sigma(\xi) = \frac{2\sigma}{R} - \frac{\sigma}{R^2}\,(2 + L)\,\xi(\theta, \phi, t);$$

$$L \equiv \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2};$$

$$P_{\mathbf{E}} = -\frac{3Q}{4\pi R^3}\Phi^{in} + \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}\,\frac{E_n^{ex^2}}{8\pi} + (\varepsilon - 1)\frac{E_\tau^{ex^2}}{8\pi}.$$

В этих выражениях $\xi(\theta, \phi, t)$ — функция, описывающая возмущение равновесной сферической поверхности капли; P^{ex} — давление внешней среды на поверхность капли; $P^{in}(\mathbf{r}, t)$ — давление внутри жидкости, $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей жидкости; P_σ — лапласовское давление под искаженной сферической поверхностью капли; $\Phi^{in}(\mathbf{r}, t)$ — потенциал силы электрического поля внутри жидкости; E_n^{ex} и E_τ^{ex} — нормальная и касательная компоненты вектора напряженности электрического поля собственного заряда капли вне ее.

Решая сформулированную задачу методом, подробно изложенным в [5,6], несложно найти, что уравнения, описывающие временну́ю эволюцию амплитуд X_n капиллярных колебаний капли, получающиеся при решении задачи в приближении малой вязкости, в указанных безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{d^2X_n}{dt^2} + 2\alpha_n \frac{dX_n}{dt} + \omega_n^2 \cdot X_n = 0; \qquad (1)$$

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3}\left[n\cdot(n-1)\cdot(n+2) - n\cdot(n-1)\frac{(\varepsilon-1)^2 n + 5\varepsilon + 1}{\varepsilon(\varepsilon\cdot n + n + 1)}W\right];$$

$$W = \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3}; \qquad \alpha_n = \frac{\nu}{R^2}(n-1)\cdot(2n+1).$$

Здесь W — параметр Рэлея, характеризующий устойчивость капли по отношению к собственному заряду [1].

2. Учтем теперь, что жидкость на малых временны́х интервалах обладает свойством упругости [7]. При аналитических расчетах в рамках модели сплошной среды вязкоупругие свойства жидкости можно описать введением комплексной кинематической вязкости посредством формулы Максвелла [7,8]:

$$\nu = \nu_0(1 - i\omega\tau)^{-1}, \qquad (2)$$

здесь ν_0 — коэффициент кинематической вязкости на нулевой частоте; ω — частота; τ — характерное время релаксации упругих напряжений в жидкости ($\tau \sim 10^{-5}$ s [9]); i — мнимая единица.

Подставляя (2) в (1), получим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с комплексным коэффициентом при первой производной:

$$\frac{d^2X_n}{dt^2} + 2(\beta_n + i\gamma_n)\frac{dX_n}{dt} + \omega_n^2 X_n = 0; \qquad (3)$$

$$\beta_n = \frac{\nu_0}{R^2}\frac{(n-1)\cdot(2n+1)}{(1+\omega^2\tau^2)}; \qquad \gamma_n \equiv \frac{\nu_0}{R^2}\frac{\omega\tau(n-1)\cdot(2n+1)}{(1+\omega^2\tau^2)}.$$

Решение уравнения (3) в линейном по малой вязкости приближении записывается в виде

$$X = X_0\cdot\exp(-\beta_n t)\cdot\cos(\gamma_n t)\cdot\cos(\omega_n t + \delta), \qquad (4)$$

где X_0 и δ — константы интегрирования (поправки к частоте ω_n капиллярных колебаний из-за вязкого затухания появятся лишь в квадратичном по вязкости приближении). Из (4) видно, что в капле одновременно реализуются затухающие колебания двух типов: капиллярные с частотой ω_n и упругие с частотой γ_n.

Условие малости вязкости колеблящейся капли означает, что

$$(\beta_n/\omega_n) \ll 1; \qquad (\gamma_n/\omega_n) \ll 1. \tag{5}$$

С учетом (5) из (4) видно, что упругие колебания капли модулируют ее капиллярные колебания. Из выражения (1) для ω_n несложно заметить, что с увеличением заряда капли (с увеличением параметра W) условия (5) для вязкости жидкости становятся более жесткими.

Интересно отметить, что γ_n как функция от $\omega\tau$ имеет максимум при $\omega\tau = 1$ и обращается в нуль при $\omega\tau = 0$ и $\omega\tau \to \infty$.

3. При исследовании параметрических колебаний и устойчивости капли вязкоупругой жидкости по отношению к зависящему от времени собственному или индуцированному заряду уравнения для временно́й зависимости амплитуд различных мод капиллярных колебаний являются уравнениями Матье–Хилла [1,10,11]. В этом случае для маловязкой капли в линейном по вязкости приближении не отмечается ни изменения диапазона частот, в которых реализуются различные типы капиллярных движений жидкости, ни изменения критических условий реализации параметрической неустойчивости. Поправка к критическим условиям реализации такой неустойчивости из-за наличия у жидкости упругих свойств появляется лишь в третьем порядке приближений по малой вязкости.

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.

[2] *Бастpуков С.И., Молодцова И.В.* // ДАН РАН. 1996. Т. 350. № 3. С. 321–323.

[3] *Bastrukov S.I.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. № 2. P. 1917–1922.

[4] *Ширяева С.О., Григорьев О.А., Муничев М.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. № 10. С. 47–62.

[5] *Ширяева С.О., Лазарянц А.Э., Григорьев А.И.* и др. Метод скаляризации векторных краевых задач / Препринт № 27. ИМ РАН. Ярославль. 1994. 128 с.

[6] *Ширяева С.О., Лазарянц А.Э.* // ЖВММТФ. 1992. Т. 31. № 6. С. 929–938.

[7] *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975. 592 с.

[8] *Быковский Ю.А., Маныкин Э.А., Полуэктов П.П.* и др. // ЖТФ. 1976. Т. 46. № 11. С. 2211–2213.
[9] *Бадмаев Б.Б., Лайдабон Ч.С., Дерягин Б.В., Базарон У.В.* // ДАН СССР. 1992. Т. 322. № 2. С. 307–311.
[10] *Лазарянц А.Э., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. № 9. С. 33–39.
[11] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. № 11. С. 49–56.