01;03

Нелинейная динамика свободной поверхности проводящей жидкости в электрическом поле

© Н.М. Зубарев

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург

Поступило в Редакцию 10 декабря 1997 г.

Рассмотрена нелинейная динамика свободной поверхности идеальной проводящей жидкости во внешнем электрическом поле. Обнаружено, что в отсутствие поля тяжести и поверхностного натяжения уравнения двухмерного движения среды могут быть разрешены в приближении малых углов наклона поверхности. Показано, что на поверхности проводящей жидкости за конечное время могут формироваться особенности корневого типа, для которых кривизна оказывается бесконечной, а сама поверхность остается гладкой.

Неустойчивость Тонкса–Френкеля границы проводящей жидкости в сильном электрическом поле [1,2] вызывает лавинообразное нарастание возмущений поверхности, формирование за конечное время областей со значительной концентрацией энергии. Ее существенной особенностью является то, что она за конечное время приводит систему в состояние, когда линейное описание процессов становится неприменимым. Это обусловливает необходимость построения адекватной модели нелинейных стадий развития неустойчивости.

Рассмотрим потенциальное движение идеальной проводящей жидкости, ограниченной свободной поверхностью $z = \eta(x, y, t)$, во внешнем однородном электрическом поле E, для которого справедливо

$$E \gg (g\alpha\rho)^{1/4},$$

где g — ускорение свободного падения, α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность. При соблюдении такого условия можно не учитывать влияния поля тяжести и поверхностного натяжения.

Потенциал скорости жидкости Φ и потенциал поля φ удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Delta\varphi = 0$$

с условиями на бесконечности

$$\varphi_z \to -E \quad (z \to \infty),$$

$$\Phi \to 0 \quad (z \to -\infty),$$

а также, вследствие эквипотенциальности поверхности проводящей жидкости, условием

$$\varphi = 0 \quad (z = \eta).$$

Функции $\eta(x, y, t)$ и $\psi(x, y, t) = \Phi_{z=\eta}$ являются канонически сопряженными величинами [3], так что уравнения движения принимают стандартную форму:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \eta}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi}, \tag{2}$$

где гамильтониан

$$H = \int\limits_{z \leqslant \eta} \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} d^3 r - \int\limits_{z \geqslant \eta} \frac{(\nabla \varphi)^2}{8\pi\rho} d^3 r$$

с точностью до константы совпадает с полной энергией системы.

Полагая характерные углы наклона поверхности $|\nabla \eta|$ малыми и ограничиваясь в разложениях по возмущениям η и ψ членами до третьего порядка малости, представим гамильтониан в виде поверхностного интеграла. После масштабного преобразования $t \to t/\sqrt{W}$, $\psi \to \psi\sqrt{W}$ и $H \to HW$ (W — плотность энергии невозмущенного электрического поля) получим окончательно:

$$H = \frac{1}{2} \int \left[\psi \hat{k} \psi + \eta \big((\nabla \psi)^2 - (\hat{k} \psi)^2 \big) \right] d^2 r$$
$$- \frac{1}{2} \int \left[\eta \hat{k} \eta - \eta \big((\nabla \eta)^2 - (\hat{k} \psi)^2 \big) \right] d^2 r,$$

где $\hat{k}$ — двумерный интегральный оператор с ядром, Фурье-образ которого равен модулю волнового вектора.

Заметим, что вычитание уравнений (1) и (2) приводит в линейном приближении к релаксационному уравнению

$$(\psi - \eta)_t = -\hat{k}(\psi - \eta),$$

из которого следует, что на временах, превышающих характерное время релаксации $1/|k|$, можно приближенно считать $\psi = \eta$. В таком случае, суммируя уравнения (1) и (2) и вводя новую функцию $f = (\psi + \eta)/2$, получаем с точностью до квадратичных членов:

$$f_t - \hat{k} f = \frac{1}{2}(\hat{k} f)^2 - \frac{1}{2}(\nabla f)^2, \tag{3}$$

что соответствует рассмотрению нарастающей ветви возмущений.

В простейшем случае одномерных возмущений поверхности интегральный оператор $\hat{k}$ выражается через преобразование Гильберта $\hat{H}$:

$$\hat{k} = -\frac{\partial}{\partial x}\hat{H}, \quad \hat{H} f = \frac{1}{\pi} P.V. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x')}{x' - x} dx'.$$

Тогда (3) принимает вид

$$f_t + \hat{H} f_x = \frac{1}{2}(\hat{H} f_x)^2 - \frac{1}{2}(f_x)^2. \tag{4}$$

Это нелинейное уравнение, как показано выше, описывает двумерное движение идеальной проводящей жидкости во внешнем поле в приближении малых углов наклона поверхности. Следует отметить, что если это уравнение переписать с использованием новой функции $\tilde{f} = \hat{H} f$, то оно совпадет с уравнением, предложенным в работе [4] для описания нелинейного развития неустойчивости тангенциального разрыва в течениях жидкости.

Уравнение (4) допускает полное интегрирование при любых начальных условиях. Действительно, представим f_x в виде суммы

$$f_x = v^{(+)} + v^{(-)},$$

где $v^{(\pm)} = (1 \mp i\hat{H})v/2$ — функции, аналитические в верхней и соответственно нижней полуплоскости комплексной переменной x. Подстановка этого выражения в (4) с учетом того, что $\hat{H}v^{(\pm)} = \pm i v^{(\pm)}$, приводит к независимым дифференциальным уравнениям типа Хопфа

$$v_t^{(\pm)} \pm i v_x^{(\pm)} = -2v^{(\pm)} v_x^{(\pm)},$$

интегрируемым методом характеристик. Подобные уравнения практически для любого начального условия описывают возникновение особенностей типа опрокидывания за конечное время. Сингулярность возникает в некоторый момент времени t_0, когда особенности (точки ветвления) функций $v^{(\pm)}$ выходят за действительную ось. Причем в малой окрестности сингулярности $\delta x = x - x_0$ в основном порядке справедливо:

$$\eta_{xx} \approx f_{xx} = 2\mathrm{Re}(v_x^{(+)}|_{t=t_0}) \sim |\delta x|^{-1/2},$$

т. е. кривизна поверхности жидкости становится бесконечной за конечное время, а сама поверхность при этом остается гладкой. Подобное поведение поверхности аналогично поведению поверхности идеальной жидкости в отсутствие внешних сил [5,6], где формирование особенностей обусловлено влиянием сил инерции и описывается уравнением с такой же нелинейностью, что и в рассматриваемом уравнении (4).

Необходимо отметить, что появление сингулярностей в решениях (4) не нарушает условия малости углов, т. е. не выходит за рамки применимости модели. Так, например, для уединенного возмущения поверхности вида

$$\eta\big|_{t=0} = \frac{sA}{A^2 + x^2},$$

с малыми характерными углами наклона поверхности $\gamma|_{t=0} \approx s/A^2$, в момент формирования сингулярности t_0 справедливо: $\gamma|_{t=t_0} \sim (\gamma|_{t=0})^{1/3}$, т. е. углы остаются малыми.

Таким образом, рассмотрение поведения границы проводящей жидкости в электрическом поле показало, что нелинейность приводит к образованию слабых корневых сингулярностей, что соответствует появлению на поверхности жидкости точек с бесконечной кривизной. Это свидетельствует о тенденции к формированию областей с высокой концентрацией энергии, последующее разрушение которых может сопровождаться интенсивными эмиссионными процессами и, как следствие, приводить к нарушению электрической прочности системы.

В заключение считаю своим долгом поблагодарить А.М. Искольдского и Н.Б. Волкова за стимулирующие обсуждения, а также Е.А. Кузнецова, любезно указавшего на работы [5,6].

Данная работа выполнена в рамках проекта РФФИ, грант 97–02–16177.

Список литературы

[1] *Tonks L.* // Phys. Rev. 1935. V. 48. P. 562.
[2] *Френкель Я.И.* // ЖТФ. 1936. Т. 6. С. 347.
[3] *Захаров В.Е.* // ПМТФ. 1968. В. 2. С. 86.
[4] *Жданов С.К., Трубников Б.А.* // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. В. 8. С. 104.
[5] *Kuznetsov E.A., Spector M.D., Zakharov V.E.* // Phys. Lett. A. 1993. V. 182. P. 387.
[6] *Kuznetsov E.A., Spector M.D., Zakharov V.E.* // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. N 2. P. 1283.