01;07;09

Качественный анализ поведения динамической системы Лоренца на основе геометрических представлений

© В.В. Афанасьев, Ю.Е. Польский, В.С. Чернявский

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева

Поступило в Редакцию 9 января 1998 г.

Приводится качественный анализ поведения динамической системы Лоренца на основе геометрических представлений. Рассмотренный аналитический подход позволяет анализировать поведение широкого класса систем с динамическим хаосом.

В настоящее время основным способом исследования сложных нелинейных динамических систем (ДС) со странными аттракторами (СА) является математическое моделирование на ЭВМ. Представляет интерес поиск методов, которые позволяли бы делать качественные выводы о характере поведения динамической системы без ее решения, заранее прогнозировать момент возникновения стохастизации в системе. Одним из таких методов является метод расщепления сепаратрис Мельникова, однако он применим к ограниченному классу ДС [1]. Нами предлагается аналитический подход, который может быть использован для анализа поведения широкого класса систем с динамическим хаосом.

Предлагаемый подход основан на представлении системы из n дифференциальных уравнений, описывающих нелинейную динамическую систему, в виде дифференциального уравнения

$$\Phi_1'(x, a) = -\Phi_2(x, a), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вектор фазовых переменных системы, $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ — вектор параметров системы. Функции $\Phi_{1,2}$ определяют собой поверхности $\Phi_1 = A$ и $\Phi_2 = B$ в фазовом пространстве системы. По знаку B можно судить о характере движения изображающей точки ДС относительно семейства поверхностей $\Phi_1 = \text{const}$ (в направлении, соответствующем увеличению или уменьшению A). Для одной и той же ДС возможно получение набора различных функций $\Phi_{1,2}$, что позволяет с помощью надлежащего выбора $\Phi_{1,2}$ судить о характере движения траектории в фазовом пространстве системы в целом.

Проиллюстрируем предлагаемый подход для исследования системы Лоренца:

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y; \qquad \dot{y} = -y + rx - xz; \qquad \dot{z} = -bz + xy, \tag{2}$$

где r, σ, b — параметры системы. Уравнение (1) для системы (2) возможно получить в виде суммы линейной комбинации уравнений (2) с линейной комбинацией уравнений (2), умноженных сответственно на x, y, z, как это сделано, например, в [2, с. 92]:

$$\begin{aligned} &\left\{\left(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2\right)/2 + k_4x + k_5y + k_6z + k_7\right\}' \\ &\quad = -\left\{\sigma k_1x^2 + k_2y^2 + bk_3z^2 - xyz(k_3 - k_2) - xy(\sigma k_1 + rk_2 + k_6)\right. \\ &\quad \left. + k_5xz + x(\sigma k_4 - k_5r) + y(k_5 - \sigma k_4) + k_6bz\right\}, \end{aligned} \tag{3}$$

где k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7 — постоянные коэффициенты. В зависимости от нахождения изображающей точки внутри или за пределами поверхности

$$\begin{aligned} &\sigma k_1x^2 + k_2y^2 + bk_3z^2 - xyz(k_3 - k_2) - xy(\sigma k_1 + rk_2 + k_6) \\ &\quad + k_5xz + x(\sigma k_4 - k_5r) + y(k_5 - \sigma k_4) + k_6bz = B \end{aligned}$$

(где B — некоторая постоянная, определяемая текущими значениями x, y, z) характер движения изображающей точки в фазовом пространстве относительно семейства поверхностей

$$(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2)/2 + k_4x + k_5y + k_6z + k_7 = A = \mathrm{const}$$

меняется качественным образом: движение в направлении, соответствующем увеличению A ($B < 0$) или уменьшению A ($B > 0$). Сечения этих поверхностей плоскостью, перпендикулярной оси OX, в проекции на плоскость YOZ имеют вид кривых второго порядка. При выборе коэффициентов $k_1 = 1/\sigma$, $k_2 = k_3 = 1/r$, $k_4 = k_5 = k_7 = 0$, $k_6 = -2$ уравнение (1) для системы Лоренца (2) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} &(x^2/\sigma + y^2/r + (z - 2r)^2/r)' \\ &\quad = -2br\left(x^2/br + y^2/br^2 + (z - r)^2/r^2 - 1\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнение (4) справедливо как для системы Лоренца (2), так и для других видов нелинейных ДС, которые могут быть сведены к уравнению (1) при данном выборе $\Phi_{1,2}$, но с другим набором коэффициентов k_1, $k_2, \ldots, k_7$.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что соотношение вида (4) определяет область асимптотического движения фазовой траектории ДС [3]. Функция Φ_1 в (4) представляет собой обобщенное расстояние ρ от изображающей точки с текущими координатами (x, y, z) до точки с координатами $(0{,}0{,}2r)$. Функция $\Phi_2 = 0$ в (4) представляет собой эллипсоид. Внутри эллипсоида $\Phi_2 < 0$, ρ увеличивается; вне — $\Phi_2 > 0$, ρ уменьшается. Это означает, что при любых начальных условиях, асимптотическое движение фазовой траектории, в том числе при возникновении режима СА, будет происходить в ограниченной области фазового пространства. Оценим границы этой области. Из (4) максимальное значение $\rho_{\max} = b^2r^2/(b-1)$. При $b > 1$ область представляет собой эллипсоид вида

$$x^2/\left(\sqrt{\rho_{\max}\sigma/r}\right)^2 + y^2/\left(\sqrt{\rho_{\max}}\right)^2 + (z-2r)^2/\left(\sqrt{\rho_{\max}}\right)^2 = 1 \tag{5}$$

с центром в точке с координатами $(0,\ 0,\ 2r)$. Из (5) следует, что при возникновении СА в системе Лоренца величины значений текущих фазовых координат находятся в границах, определяемых неравенствами:

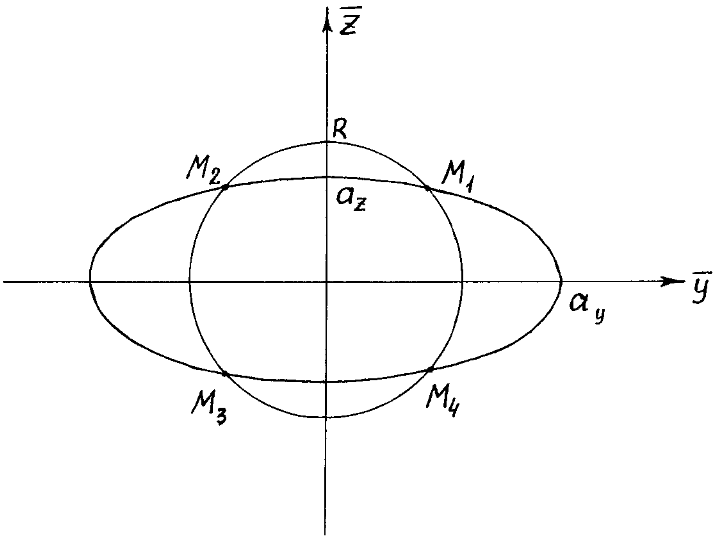
$$\begin{gathered} -b\sqrt{\sigma r/(b-1)} \leqslant x \leqslant b\sqrt{\sigma r/(b-1)}, \\ -br\sqrt{1/(b-1)} \leqslant y \leqslant br\sqrt{1/(b-1)}, \\ 2r - br\sqrt{1/(b-1)} \leqslant z \leqslant 2r + br\sqrt{1/(b-1)}. \end{gathered} \tag{6}$$

При выборе коэффициентов: $k_1 = r/\sigma$, $k_2 = k_3 = -1$, $k_4 = k_5 = k_6 = k_7 = 0$ $\Phi_{1,2}$ принимают следующий вид:

$$\Phi_1(x, y, z) = x^2r/\sigma - y^2 - z^2, \tag{7}$$

$$\Phi_2(x, y, z) = x^2r - y^2 - bz^2. \tag{8}$$

Изменение знака $\Phi_{1,2}$, определяемых текущими координатами x, y, z, приводит к изменению вида поверхностей $\Phi_{1,2}$. Так, при $\Phi_{1,2} > 0$ поверхности имеют вид двухполостных гиперболоидов, при $\Phi_{1,2} = 0$ — конусов, а при $\Phi_{1,2} < 0$ — однополостных гиперболоидов. Для текущих



координат x, y, z поверхностям постоянства $\Phi_1 = A$ и $\Phi_2 = B$ в плоскости $x = \bar{x} = \text{const}$ соответствуют сечения:

$$(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)/(\bar{x}^2 r/\sigma - A) = 1 \text{ — окружность,}$$

$$\bar{y}^2/(\bar{x}^2 r - B) + \bar{z}^2/(\bar{x}^2 r/b - B/b) = 1 \text{ — эллипс.}$$

При изменении текущих координат x, y, z изменяются A и B и соответственно изменяются размеры окружности и эллипса, а также их взаимное расположение. Для $\bar{x} = x$ получим окружность радиусом $R|_{\bar{x}=x} = \sqrt{y^2 + z^2}$ и эллипс с полуосями $a_y|_{\bar{x}=x} = \sqrt{y^2 + bz^2}$ и $a_z|_{\bar{x}=x} = \sqrt{y^2/b + z^2}$ (см. рисунок). Точка M_i $(i = \overline{1, 4})$ соответствует текущему значению фазовых координат x, y, z. Так как значение фазовой координаты z для системы Лоренца в силу неравенств (6) положительно, то положению изображающей точки системы соответствуют точки M_1 и M_2. При $a_z = R$ $(y = 0)$ точки M_1 и M_2 совпадают. Начиная с момента $(y = 0)$, обязательно происходит в течение времени $\Delta t \leqslant T$ $(T = 4\pi/\sqrt{8\sigma(r-1) - (\sigma + r)^2}$ — период колебания системы, определяемый в соответствии с [4]) переход фазовой траектории из области одного состояния неустойчивого равновесия в область другого. Таким образом, предложенный подход позволяет аналитически определить начало качественных изменений в поведении ДС, а именно: показывает, что при переходе между областями состояний неустойчивого равновесия сначала происходит смена знака у координаты y, а затем — у x. Такая последовательность смены знака координат x и y подтверждается результатами экспериментов [2].

Возможность определения момента качественных изменений в поведении системы позволяет найти конкретные временны́е интервалы эффективной подачи внешних управляющих воздействий на параметры ДС Лоренца [4], обеспечивающих требуемое ее поведение.

Представление (1) возможно использовать для анализа поведения и других видов нелинейных ДС со СА (система Ресслера, система Рюэля–Таккенса и др.), что однако, выходит за рамки данной статьи.

Выводы:

1. Дифференциальное представление (1) является эффективным методом исследования поведения ДС со СА.
2. Анализ функций $\Phi_{1,2}$ (4) позволяет определить ограниченный объем фазового пространства, в котором происходит асимптотическое движение фазовой траектории ДС Лоренца.
3. Анализ сечений поверхностей $\Phi_{1,2}$ (7), (8) системы Лоренца позволяет получить аналитическое обоснование условия ($y = 0$) возникновения перехода между областями состояний неустойчивого равновесия и оценить границы временны́х интервалов таких переходов в ДС.

Список литературы

[1] *Афанасьев В.В., Польский Ю.Е., Чернявский В.С.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. В. 23. С. 40–45..

[2] *Странные* аттракторы / Под ред. Я.Г. Синай, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1988.

[3] *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М., 1949.

[4] *Афанасьев В.В., Польский Ю.Е.* // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 18. С. 86–89.