01

Фазовая синхронизация переключений в стохастических бистабильных системах

© *А.Н. Сильченко, А.Б. Нейман, В.С. Анищенко*

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступило в Редакцию 8 января 1998 г.

На основе концепции аналитического сигнала доказывается, что эффекту стохастической синхронизации бистабильных систем отвечает режим захвата мгновенной фазы колебаний в ее полном соответствии с классической теорией фазовой синхронизации.

Фундаментальное явление вынужденной и взаимной синхронизации автоколебательных систем [1] недавно было обнаружено и исследовано в системах с детерминированным хаосом [2,3,9] и стохастических системах с контролируемыми шумом временны́ми масштабами [4–8]. Наличие в фазовом пространстве хаотической системы направления, вдоль которого один из ляпуновских показателей нулевой, позволяет ввести понятие мгновенной фазы [9] и исследовать эффект захвата частоты методами теории фазовой синхронизации. Другой класс представлен нелинейными системами, которые, в принципе, не обладают собственными детерминированными частотами. Их динамика существенно зависит от интенсивности шума, который управляет характерными временны́ми масштабами системы.

Одна из типичных моделей этого класса — стохастическая бистабильная система, которая описывает движение броуновской частицы в двухъямном потенциале. Характерный временно́й масштаб для этой модели представлен средним временем выхода из потенциальной ямы (время Крамерса) [10]. Стохастические бистабильные системы, возмущаемые слабым периодическим сигналом, стали недавно предметом пристального внимания в связи с изучением явления стохастического резонанса (СР) [11,12]. Отклик системы на слабое периодическое воздействие существенно усиливается и при оптимально выбранном уровне шума (в режиме СР) достигает максимального значения. В пределе малой амплитуды периодической силы СР описывается с помощью теории линейного отклика [13,14]. Однако с ростом амплитуды сигнала (остающейся, однако, малой в сравнении с потенциальным барьером) СР приобретает черты явления внешней синхронизации, которые регистрируются по изменениям структуры плотности вероятности времен пребывания системы в метастабильных состояниях [4]. Более того, средняя частота переключений захватывается в широкой области изменения интенсивности шума и на плоскости параметров "интенсивность шума — амплитуда" сигнала возникают области синхронизации, подобные языкам Арнольда [6]. Синхронизация при СР сопровождается упорядочиванием сигнала на выходе бистабильной системы, регистрируемого по уменьшению энтропии Шеннона [7]. В случае связанных стохастических бистабильных систем имеет место взаимная синхронизация индуцированных шумом переключений [5,15]. В этой ситуации в системе вообще отсутствуют детерминированные временны́е масштабы. В отличие от классической синхронизации автоколебательных систем, имеющих детерминированные собственные частоты, при стохастической синхронизации [5,8] взаимодействуют глобальные временны́е масштабы, определяемые как моменты функции распределения.

Цель данной работы — дать описание синхронизации стохастических бистабильных систем в режиме СР на языке теории фазовой синхронизации. Возникающая сложность в определении мгновенной фазы стохастического сигнала может быть преодолена путем использования концепции аналитического сигнала [16,17], которая широко используется в радиофизике [18,19] и в теории обработки сигналов [20]. Эта методика была успешно прменена для исследования фазовой синхронизации хаотических систем [9].

Как известно, под аналитическим сигналом $z(t)$ понимают комплексную функцию $z(t) = s(t) + is_H(t) = a(t)e^{i\phi(t)}$, где функция $s_H(t)$ есть преобразование Гильберта исходного сигнала $s(t)$: $s_H(t) = 1/\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(\tau)d\tau/(t-\tau)$ (интеграл берется в смысле главного значения Коши). Мгновенные амплитуда $a(t)$ и фаза $\phi(t)$ сигнала $s(t)$ однозначно определяются с помощью приведенных выше выражений. Напомним, что для синхронизируемых автоколебательных систем с шумом динамика разности фаз $\Delta\phi$ описывается универсальным стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) вида

$$\Delta\dot{\phi} = \delta - \epsilon \sin(\Delta\phi) + \xi(t), \qquad (1)$$

где параметр расстройки δ определяется разностью значений собственной частоты автогенератора и частоты силы (или разностью собственных частот генераторов при взаимной синхронизации), ϵ — параметр нелинейности, $\xi(t)$ — источник шума [21]. Приведенное СДУ описывает броуновское движение в потенциале $V(\Delta\phi) = -\delta\Delta\phi - \epsilon\cos(\Delta\phi)$. В отсутствие шума синхронизация имеет место при $\delta < \epsilon$: разность фаз стремится к фиксированному значению $\Delta\phi_0 = \arcsin(\delta\epsilon) + 2\pi j$. Однако с учетом шума разность фаз при $\delta < \epsilon$ будет длительное время флуктуировать в соответствии с движением внутри ям потенциала $V(\Delta\phi)$ и редко осуществлять перескоки из одних ям в другие, резко меняясь на 2π [21].

Базовой моделью для исследования стохастического резонанса является передемпфированная стохастическая система, возмущаемая периодической силой:

$$\dot{x} = \alpha x - x^3 + \sqrt{2D}\xi(t) + A\sin(\omega t), \tag{2}$$

где $\xi(t)$ — гауссов белый шум, параметр D определяет интенсивность шума, параметр α определяет глубину ям симметричного потенциала (в нашем случае $\alpha = 5$). В отсутствие периодического сигнала и при слабом шуме характерный временно́й масштаб системы определяется скоростью Крамерса или средней частотой выхода из метастабильного состояния [10]: $\Omega_0 = (\alpha/\sqrt{2\pi})\exp(-\alpha^2/4D)$. В ходе численного моделирования СДУ (2) рассчитывалась мгновенная разность фаз бистабильного осциллятора и периодического сигнала $\Delta\phi(t) = \phi(t) - \omega t$ и определялась средняя частота $\Omega = \langle\dot{\phi}\rangle$ стохастического процесса $x(t)$. Наряду с этим рассчитывалась средняя частота переключений бистабильной системы [6]. На рис. $1, a, b$ приведены зависимости от времени разности фаз при различных интенсивностях шума для случая $A = 4.0$, $\omega = 0.01$. Эти результаты демонстрируют принципиальное различие динамики разности фаз при изменении интенсивности шума. Кривая *1* на рис. $1, a$ соответствует случаю синхронизации или захвату фаз сигнала и стохастической системы: разность фаз флуктуирует около некоторого фиксированного значения. При этом средняя частота процесса $x(t)$ совпадает с частотой сигнала. Отметим, что временна́я эволюция разности фаз может быть качественно описана с помощью СДУ (1). В отсутствие синхронизации (кривые *2, 3* на рис. $1, a$ и b) разность фаз неограниченно возрастает. Зависимости средней частоты Ω и средней частоты переключений, определяемой без учета внутриямного движения,

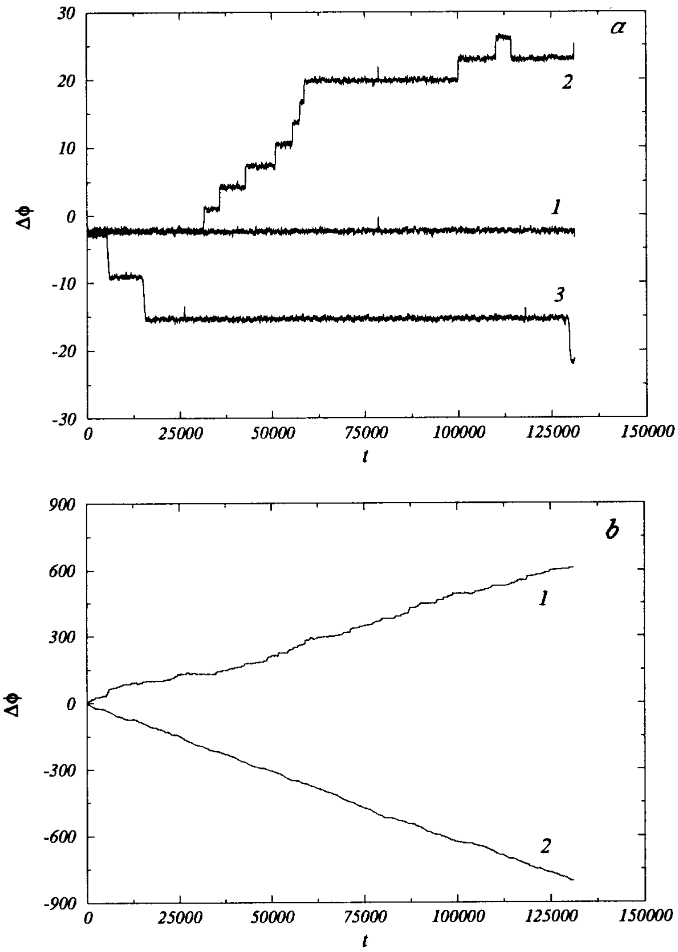

Рис. 1. *a* — зависимость разности фаз от времени в случае полной — кривая *1* ($D = 0.9$) и частичной — кривые *2* и *3* ($D = 1.15$ и $D = 0.45$) фазовой синхронизации стохастических колебаний; *b* — зависимость разности фаз от времени при отсутствии фазовой синхронизации дня значений интенсивности $D = 0.3$ (кривая *1*) и $D = 1.7$ (кривая *2*); *c* — зависимость средней частоты (сплошная линия) и средней частоты переключений (пунктирная линия) от интенсивности шума для случаев $A = 0$ (кривая *1*), $A = 4.0$, $\omega = 0.01$ (кривая *2*), $A = 4.0$, $\omega = 0.03$ (кривая *3*).

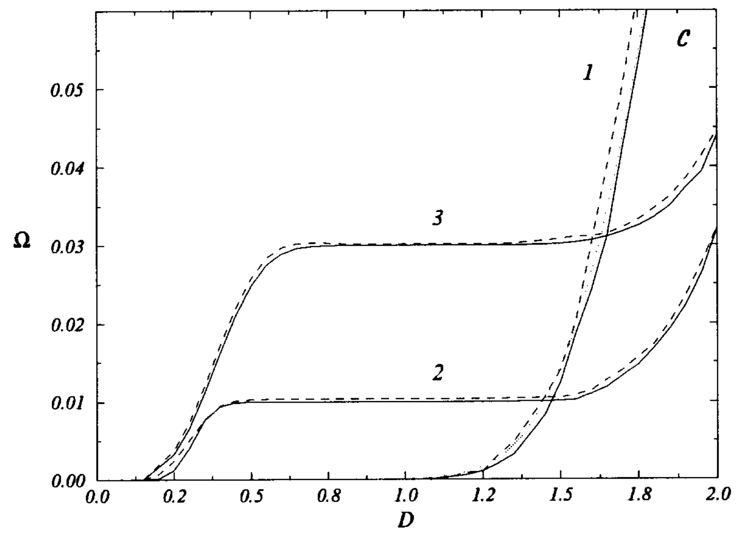

Рис. 1 (*продолжение*).

от интенсивности шума приведены на рис. 1, *c*. Как видно из рисунка, средняя частота Ω, определенная через преобразование Гильберта, практически полностью совпадает со средней частотой переключений и демонстрирует эффект захвата, совпадая в некоторой области значений интенсивности шума с частотой сигнала. Как показали исследования, в случае слабого сигнала, когда имеет место стохастический резонанс, фазовой синхронизации и захвата средней частоты не наблюдается!

Рассмотрим случай взаимной стохастической синхронизации [5,15]. Используя базовую модель (2), рассмотрим систему двух связанных бистабильных осцилляторов

$$\dot{y}_1 = p\alpha y_1 - y_1^3 + \gamma(y_2 - y_1) + \sqrt{2D}\xi_1(t),$$
$$\dot{y}_2 = \alpha y_2 - y_2^3 + \gamma(y_1 - y_2) + \sqrt{2D}\xi_2(t), \tag{3}$$

где ξ_1 и ξ_2 — статистически независимые источники белого гауссова шума интенсивности D, p —параметр расстройки и γ — параметр связи. С ростом параметра связи наблюдается захват частот переключений в подсистемах, т. е. синхронизация переключений между метастабильными

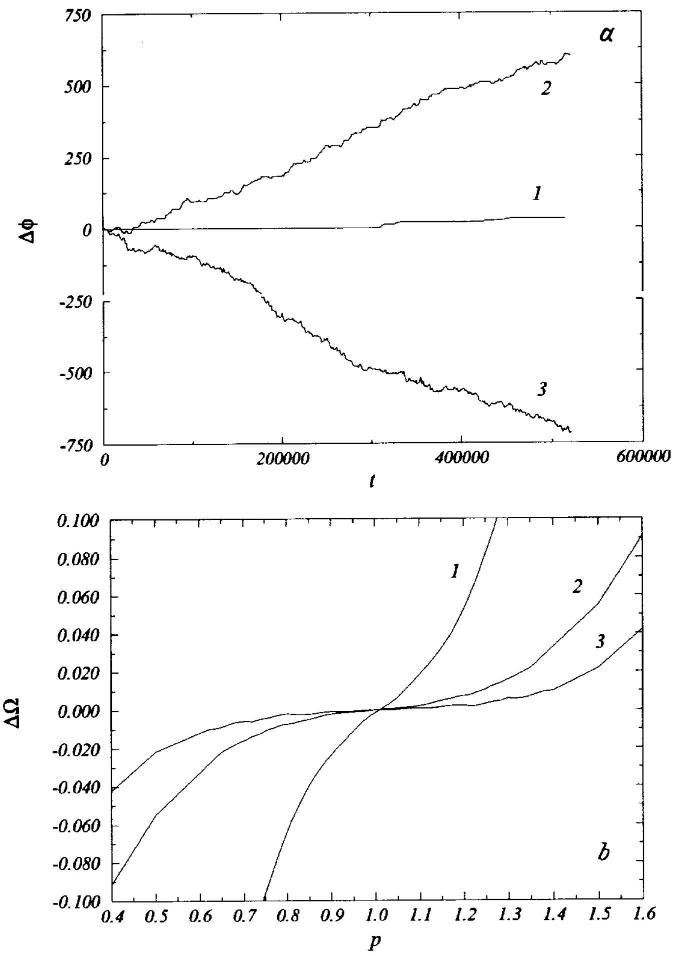

Рис. 2. *a* — зависимость разности фаз от времени для различных значений параметра связи и параметра расстройки $\gamma = 2.5$, $\Delta = 0.96$ (кривая *1*), $\gamma = 1.5$, $\Delta = 1.2$, $\Delta = 0.8$ (кривые *2* и *3* соответственно); *b* — зависимость разности средних частот $\Delta\Omega$ от величины параметра расстройки $p = \alpha_1/\alpha_2$ при различных значениях параметра связи между подсистемами: $\gamma = 1$ (кривая *1*), $\gamma = 3$ (кривая *2*), $\gamma = 4.2$ (кривая *3*).

состояниями подсистем [5]. Ниже мы показываем, что в системе (3) будет иметь место взаимная фазовая синхронизация, т. е. захват мгновенных фаз переключений подсистем. На рис. 2, *a* приведена зависимость разности фаз парциальных подсистем от времени при различных значениях параметра связи и параметра расстройки. Видно, что и здесь имеют место две качественно различные ситуации: разность фаз ограничена во времени при синхронизации процессов переключений (кривая *1*) и нарастает в случае, когда синхронизации нет (кривые *2* и *3*). На рис. 2, *b* приведена зависимость разности средних частот $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ от величины расстройки между подсистемами, подтверждающая реализацию эффекта взаимной стохастической синхронизации. При увеличении связи между подсистемами появляются области значений параметра расстройки, при которых средние частоты подсистем практически совпадают (кривая *3*).

Таким образом, приведенные результаты убедительно свидетельствуют, что внешняя и взаимная стохастическая синхронизация переключений бистабильных систем действительно имеет место и допускает исчерпывающее описание на языке классической теории фазовой синхронизации.

Авторы благодарны М.Г. Розенблюму за обсуждение метода аналитического сигнала.

Настоящая работа частично была поддержана Госкомвузом РФ (грант 95–0–8.3–66) и российско-германским грантом DFG and RFFI 436 RUS 113/334/0(R).

Список литературы

[1] *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
[2] *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. С. 795.
[3] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А.* // РЭ. 1991. Т. 36. N 2. С. 338–351.
[4] *Gammaitoni L., Marchesoni E., Santucci S.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 1052.
[5] *Neiman A.B.* // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. P. 3484.
[6] *Shulgin B.V., Neiman A.B., Anishchenko V.S.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 4157.

[7] *Neiman A., Shulgin B., Anishchenko V., Ebeling W., Schimansky-Geier L., Freund J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 4299.
[8] *Anishchenko V., Neiman A.* // Stochastic Dynamics / Ed. by L. Schimansky-Geier and T. Pöschel. Springer, Berlin, 1997. P. 155–166.
[9] *Rosenblum M.G., Pikosky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 1804.
[10] *Hänggi P., Talkner P., Borkovec M.* // Rev. Mod. Phys. 1990. V. 62. N 2. P. 251–341.
[11] *Weisenfeld K., Moss F.* // Nature. 1995. V. 373. P. 33.
[12] *Bulsara A.R., Gammaitoni L.* // Physics Today. 1996. March. P. 39.
[13] *Дыкман М.И., МакКлинток П.В.Е., Маннелла Р., Стокс Н.Г.* // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 52. С. 780–782.
[14] *Lung P., Hänggi P.* // Phys. Rev. A. 1991. V. 44. P. 8032.
[15] *Neiman A., Schimansky-Geier L.* // Phys. Lett. A. 1995. V. 197. P. 379.
[16] *Gabor D.* // J. IEE London. 1946. V. 93. P. 429.
[17] *Panter P.* Modulation, Noise and Spectral Analysis. McGraw–Hill, New York, 1965.
[18] *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Случайные процессы. М.: Наука, 1976.
[19] *Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983.
[20] *Бендат Д., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989.
[21] *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.