01;09

К теории возбуждения нерегулярных волноводов

© В.И. Короза

Научно-исследовательский институт импульсной техники, Москва

Поступило в Редакцию 3 июля 1997 г.

Предложен вариационный метод исследования возбуждения волноводов источниками с произвольной зависимостью от времени, пригодный для нерегулярных волноводов.

Теории возбуждения волноводов в монохроматическими [1,2], а затем и произвольно зависящими от времени [3] источниками применимы к волноводам специальных форм, которые допускают "отщепление" координаты в направлении распространения. Этим ограничивается область применимости указанных методов. Ниже приводятся пригодные для нерегулярных волноводов уравнения возбуждения произвольно зависящими от времени источниками.

Для расчетов используем функционал

$$J(\mathbf{H},\mathbf{H}_0,\mathbf{j}) = \int\limits_{\Omega}\Big\{\varepsilon^{-1}(\mathbf{r})\left(\operatorname{rot}\mathbf{H}-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\operatorname{rot}\mathbf{H}_0\right) - \frac{\mu(\mathbf{r})}{o^2}\left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\frac{\partial\mathbf{H}_0}{\partial t}\right)\Big\}d\Omega, \tag{1}$$

зависящий от 3 вектор-функций: напряженностей $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{H}_0(\mathbf{r},t)$ магнитного и вспомогательного полей и плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$. При этом каждая из них — функция 4 независимых переменных (времени — t и 3 пространственных координат — $\mathbf{r}$). Область интегрирования Ω в (1) является внутренностью отрезка 4-мерного цилиндра с интервалом $t_0 < t < t_0+T$ в качестве образующей (t_0 и T фиксированы) и направляющей — границей отрезка волноведущей вдоль прямолинейной оси Z системы ($z_0 < z < z_1$), которая состоит из идеально проводящей боковой поверхности Π и двух плоских сечений $S(z)$, ортогональных оси и пересекающих ее при $z = z_0(S(z_0))$ и $z = z_1(S(z_1))$.

Условие стационарности

$$\delta_{\mathbf{H}_0} J(\mathbf{H}, \mathbf{H}_0, \mathbf{j}) = 0 \tag{2}$$

при варьировании по $\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t)$ с "закрепленными концами"

$$\delta\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t_0) = \delta\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t_0 + T) = \delta\mathbf{H}_0(\mathbf{r}|_{z=z_0}, t) = \delta\mathbf{H}_0(\mathbf{r}|_{z=z_1}, t) = \mathbf{0} \tag{3}$$

эквивалентно такому выбору фиксированной в условии (2) величины $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, которая внутри Ω удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{rot}\left(\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\right) + \frac{\mu}{c^2} = \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\mathrm{rot}(\varepsilon^{-1}\mathbf{j}), \tag{4}$$

а на поверхности π — условию

$$\left[\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\right), \mathbf{n}\right]\Big|_{\mathbf{r}\in\pi} = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Краевое условие (5) с точностью до стационарного слагаемого эквивалентно условию на границе идеального проводника.

Таким образом, определение многообразия решений краевой задачи электродинамики (4)–(5) с учетом неединственности, связанной с незамкнутостью поверхности π в условии (5) и неопределенностью начальных условий, сводится к вариационной задаче (2)–(3) для функционала (1). Неединственность устраняется последующим отбором из получаемого многообразия решения, отвечающего необходимым дополнительным условиям.

Полагаем

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_\perp, z) \cdot f_i(z, t), \quad \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t) = \sum \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_\perp, z) \cdot g_i(z, t), \tag{6}$$

где $\{\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_\perp, z)\}$ — совокупность базисных вектор-функций в сечениях $S(z)$ волновода, перпендикулярными оси Z плоскостями. Каждая из $\mathbf{e}_i$ зависит от координат $\mathbf{r}_\perp$ в поперечных сечениях $S(z)$ и от соответствующих значений z как параметра.

После подстановки (6) в (1) вследствие (2) и условий

$$\delta g_i(z, t_0) = \delta g_i(z, t_0 + T) = \delta g_i(z_0, t) = \delta g_i(z_1, t) = 0,$$

соответствующих (3), приходим к системе дифференциальных уравнений для определения $\{f_i(z,t)\}$, которая в векторной форме может быть записана в виде

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[G(z)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}+Q(z)\mathbf{f}\right]-Q^{\tau}(z)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}-P(z)\mathbf{f}-T(z)\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\rho}. \quad (7)$$

Здесь $G(z)$, $Q(z)$, $P(z)$ и $T(z)$ — матрицы-функции с элементами

$$Q_{mn}=\iint\limits_{S(z)}\varepsilon^{-1}\left([\mathbf{z},\mathbf{e}_m],[\mathbf{z}^0,\mathbf{e}_n]\right)ds; \quad Q_{mn}=\iint\limits_{S(z)}\varepsilon^{-1}([\mathbf{z}^0,\mathbf{e}_m]\operatorname{rot}\mathbf{e}_n)ds;$$

$$P_{mn}=\iint\limits_{S(z)}\varepsilon^{-1}(\operatorname{rot}\mathbf{e}_m,\operatorname{rot}\mathbf{e}_n)dS; \quad T_{mn}=\frac{1}{c^2}\iint\limits_{S(z)}\mu(\mathbf{e}_m,\mathbf{e}_n)dS; \quad (8)$$

$Q^{\tau}(z)$ — транспонированная $Q(z)$; $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(z,t)$ и $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}(z,t)$ — столбцы с координатами:

$$\rho_i(z,t)=\frac{4\pi}{c}\iint\limits_{S(z)}\varepsilon^{-1}(\mathbf{r})(\mathbf{j},\operatorname{rot}\mathrm{e}_i)ds,$$

$$\lambda_i(z,t)=\frac{4\pi}{c}\iint\limits_{S(z)}\varepsilon^{-1}(\mathbf{r})\left(\mathbf{j},[\mathbf{z}^0,\mathbf{e}_i]\right)ds. \quad (9)$$

Размерности квадратных матриц в (7) и столбцов $\mathbf{f}(z,t)=(f_1,f_2,\ldots,f_N)^{\tau}$, $\rho(z,t)$ и $\lambda(z,t)$ одинаковы, равны числу N удерживаемых слагаемых в суммах (6) (общему для каждой из этих сумм) и отвечают числу учитываемых мод.

Векторное уравнение (7) распространяет метод связанных струн для неустановившегося режима свободных колебаний в нерегулярных волноводах [4] на исследование их возбуждения при произвольно зависящих от времени источника и отвечает строгому электродинамическому подходу. Отметим, что опыт численного исследования (7), но для свободных колебаний в неустановившемся режиме [5] разностными методами показывает достижимость высокой точности расчетов.

Здесь мы ограничимся приближенным рассмотрением примера нерегулярной системы простейшего типа — планарного слоя с однородной средой, ограниченного двумя идеально проводящими поверхностями $x = 0$ и $x = \Delta(z)$ (в декартовой системе XYZ, при этом $\Delta(z) > 0$ — толщина слоя), возбуждаемого током

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{v}\delta(x - vt)\delta(z), \quad \mathbf{v} = v\mathbf{x}^0, \quad v > 0 \tag{10}$$

в приближении одномодовой ТЕМ-модели, для которой $\mathbf{e}(\mathbf{r}_\perp, z) = \mathbf{y}^0$. Ток (10) обусловлен равномерно движущейся с линейной плотностью заряда q нитью. Для определения $f(z, t)$ из соответствующей строки векторного уравнения (7) имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\Delta'}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \begin{cases} -(4\pi/c)qv\delta'(z), & t < \Delta(z)/v; \\ 0, & t > \Delta(z)/v. \end{cases} \tag{11}$$

При этом при вычислении значений (8) и (9) интегрирование по ds свелось к интегрированию по dx в интервалах $[0, \Delta(z)]$. При медленном изменении $\Delta(z)$ для требуемого решения (11) имеем в адиабатическом приближении

$$f(z, t) = -\operatorname{sign} z \cdot \frac{2\pi qv}{c\sqrt{\Delta_0\Delta(z)}}$$
$$\times \begin{cases} 1, & (\sqrt{\varepsilon\mu}/c)|z| < t < (\sqrt{\varepsilon\mu/c})|z| + (\Delta_0/v); \\ 0, & t < (\sqrt{\varepsilon\mu}/c)|z| \text{ или } t > (\sqrt{\varepsilon\mu}/c)|z| + (\Delta_0/r), \end{cases}$$

что соответствует представлениям о формировании в слое двух ступенчатых импульсов ширины $\Delta_0 = \Delta(0)$, бегущих с одинаковыми скоростями $C/\sqrt{\varepsilon\mu}$ в противоположных направлениях оси Z. При этом в процессе распространения импульсов их амплитуды изменяются $\sim [\Delta(z)]^{-1/2}$.

Список литературы

[1] *Фельд Я.Н.* // ЖТФ. 1947. Т. 17. № 11. С. 1471–1482.
[2] *Вайнштейн Л.А.* // ЖТФ. 1953. Т. 23. № 4. С. 654–666.
[3] *Борисов В.В.* Неустановившиеся поля в волноводах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1991. 156 с.
[4] *Короза В.И.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 21. С. 6–9.
[5] *Короза В.И., Кондрашов В.Е.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 17. С. 91–94.