01;07

Линза Люнеберга из кубиков. Геометрооптический расчет

© А.В. Голубятников, Б.З. Каценеленбаум

Институт радиотехники и электроники РАН, Москва
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Поступило в Редакцию 30 января 1998 г.

Рассмотрен эффект фокусировки сферической линзой Люнеберга, составленной из дискретных диэлектрических кубиков с различными диэлектрическими проницаемостями. В результате геометрооптического расчета определяется степень фокусировки лучей линзой, состоящей из 2600 кубиков. Показано, что при этом степень фокусировки еще значительно хуже, чем при нерерывном распределении ε.

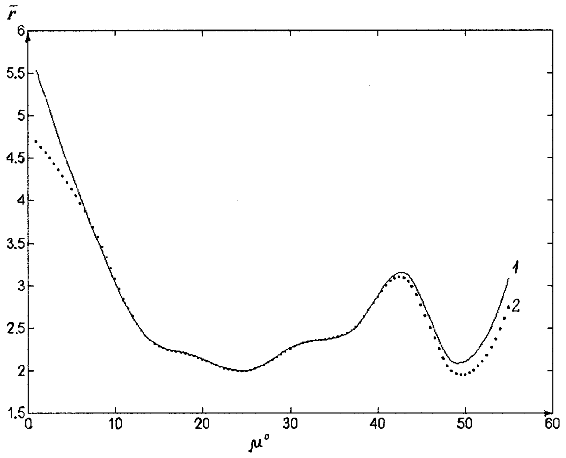
1. Линза Люнеберга представляет собой неоднородую диэлектрическую сферу, в которой диэлектрическая проницаемость ε есть функция расстояния R от центра, $\varepsilon = 2 - R^2/d^2$ (a — радиус сферы). В геометрооптическом приближении при падении на нее пучка параллельных лучей все они соберутся в одной точке — фокусе. Ниже рассматривается линза с дискретным распределением ε; она состоит из однородных кубиков, в каждом из которых ε имеет то значение, которое должно быть в центре кубика. Грани кубиков образуют три системы параллельных плоскостей. На линзу падает параллельный пучок лучей с одинаковыми амплитудами и фазами. Прослеживается путь каждого луча до фокальной плоскости и определяются три числа: расстояние до фокуса, фаза и амплитуда. В приведенных расчетах число лучей M было порядка 10^3 и рассматривалось падение пучка под ≈ 10 направлениями.

Сторона кубика равна единице. Координаты x, y, z — центра каждого кубика — целые числа l, m, n. Значение ε кубика номер (l, m, n) равно $\varepsilon_{l,m,n} = 2 - \frac{1}{p^2}(l^2 + m^2 + n^2)$, если $l^2 + m^2 + n^2 \leqslant p^2$; $\varepsilon_{l,m,n} = 1$, если $l^2 + m^2 + n^2 > p^2$. Здесь $p = a - 1/2$. Было принято $2a = 17$, линза содержала ≈ 2600 кубиков.

Направление пучка задается тремя неположительными числами α_0, β_0, γ_0 ($\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1$) — косинусами углов с осями x, y, z. Угол μ с осью z — наименьший, $|\gamma_0| \geqslant |\gamma_0|$, $|\gamma_0| \geqslant |\beta_0|$, $\gamma_0 = \cos\mu$. Почти всюду принималось, что $\alpha_0 = \beta_0$, и это ограничение не оказало влияния на результат. Угол μ менялся от $\mu = 0^\circ$ $(|\gamma_0 = 1|)$ до $\mu = 55^\circ$ $(|\gamma_{\gamma_0}| = 1/\sqrt{3})$. На входной плоскости $\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z + a = 0$ N-й $(N \leqslant M)$ луч имеет координаты x_0^N, y_0^N, z_0^N. Надо найти его параметры на фокальной плоскости $\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z - a = 0$. Чтобы луч попал на линзу, должно быть $(x_0^N)^2 + (y_0^N)^2 + (z_0^N)^2 \leqslant 2 \cdot a^2$. На плоскости x, y проекции этих точек должны образовывать квадратную сетку со стороной $d/\sqrt{|\gamma_0|}$, где d — сторона квадратной сетки, образуемой лучами на входной плоскости. Было принято $d = 1/2$, на каждой кубик падает 4 луча.

2. Итерационный процесс последовательного определения точек пересечения луча номера N с гранями кубиков производится по следующей схеме: находится номер кубика, в котором лежит точка x_0, y_0, z_0 (индекс N опускаем), т. е. такие целые числа l, m, n, что $l - 1/2 < x_0 < l + 1/2$; $m - 1/2 < y_0 < m + 1/2$; $n - 1/2 < z_0 < n + 1/2$. Уравнение луча до следующего преломления имеет вид $x = x_0 + \alpha_0 t$; $y = y_0 + \beta_0 t$; $z = z_0 + \gamma_0 t$, где $t \geqslant 0$. Находятся корни шести уравнений (граней кубов) $x = l - 1/2$; $x = l + 1/2$; $y = m - 1/2$; $y = m + 1/2$; $z = n - 1/2$; $z = n + 1/2$, независимо решаемых совместно с уравнением луча. Наименьший положительный корень t этих уравнений дает координату следующей точки, а это значение t, умноженное на $\sqrt{\varepsilon}$ данного кубика, — оптический путь луча в нем. Направляющие косинусы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ в следующем кубике находятся из трех уравнений. Одно из них очевидно: $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$. Два других зависят от того, на какой грани произошло преломление и в каком кубике оказался луч. Если, например, упомянутое значение t соответствует первому из шести уравнений, то новый кубик имеет номер $l - 1, m, n$, а нормаль к границе имеет направляющие косинусы $(1, 0, 0)$. Тогда второе уравнение есть $\gamma_1\beta_0 - \beta_1\gamma_0 = 0$, а третье $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_0\sqrt{\frac{\varepsilon_{l,m,n}}{\varepsilon_{l-1,m,m}}}$, где углы φ_1 и φ_0 определяются (в нашем примере) тем, что $\cos\varphi_0 = \alpha_0$, $\alpha_1 = \cos\varphi_1$. Если угол φ_0 столь велик, что получается $(|\sin\varphi_1| > 1)$, т. е. происходит полное внутреннее отражение, то на этом этапе итерационного процесса два угла сохраняются, а косинус третьего меняет знак.

Все получаемые координаты точек преломления последовательно подставляются в левую часть уравнения фокальной плоскости. Когда результат впервые станет положительным, надо вернуться к предыдущей точке и решить уравнение луча с уравнением фокальной плоскости (а не с уравнениями граней кубов). Так получится координата луча на фо-



кальной плоскости. Сумма всех оптических путей (включая последний отрезок) дает оптический путь луча.

В проделанных расчетах поляризация луча не прослеживалась, а квадрат амплитуды прошедшего луча умножался на полусумму квадратов коэффициентов Френеля для обеих поляризаций. Квадрат амплитуды на фокальной плоскости есть произведение этих множителей во всех итерациях. При скользящем падении в преломленный луч может уходить меньше энергии, чем в отраженный. В одном из вариантов программы в этом случае прослеживается далее путь отраженного луча.

Некоторые лучи покидают линзу в направлении, почти параллельном фокальной плоскости; их движение вне линзы описывается как многочисленные итерации. Наименьшее число итераций равно, разумеется, $2, a$. Программа отбрасывала луч, за $6a$ итераций не достигший фокальной плоскости.

3. Если $\mu = 0$ (пучок нормален двум граням кубиков), то лучи не испытывают преломлений, фокусировки нет, распределение лучей на фокальной плоскости повторяет их распределение на входной плоскости. При малых μ (т.е. при $1 - |\gamma_0| \ll 1$) отличие дискретной линзы от непрерывной хотя и не столь велико, но фокусировка значительно ослаблена; то же будет при $1 - |\alpha_0| \ll 1$, $1 - |\beta_0| \ll 1$. Однако при случайном направлении пучка вероятность малости угла между пучком и ребрами будет порядка $\frac{3}{2}\mu^2$, и даже при $\mu \approx 1/10$ таких "плохих" направлений будет только примерно 6%.

Тем не менее расчет показал, что при том "грубом" разбиении, которое рассматривалось ($2a = 17$), дискретность все же приводит к значительному ослаблению фокусировки. Приведем некоторые из полученных результатов.

Одной их характеристик фокусирующего действия линзы из кубиков является среднее — по всем лучам, пересекшим фокальную плоскость — расстояние $\bar{r}$ от фокуса до точки пересечения. Для непрерывной линзы было бы $\bar{r} = 0$ (геометрооптический расчет). При $\mu = 0$, т.е. при отсутствии преломления, $r = 2a/3$, что при $a = 8.5$ дает $r = 5.7$. На рисунке представлено $\bar{r}$ как функция μ для двух вариантов программы: *1* — когда при скользящем падении прослеживается далее путь того луча, преломленного или отраженного, который уносит больше энергии; *2* — всегда (кроме случаев полного внутреннего отражения) прослеживается путь преломленного луча. Вариант *1* точнее передает процесс прохождения луча. Значение $\bar{r}$ при не очень малых μ имеет порядок $1 \div 2$. Эту величину надо сравнить с дифракционным радиусом фокального пятна, имеющим порядок λ [1].

Качество фокусировки характеризуется также распределением энергии на фокальной плоскости. Например, если пучок образует равные углы ($= 55°$) со всеми тремя осями, то в кольце на фокальной плоскости между радиусами $r = 1$ и $r = 2$ оказывается 0.24 часть всей энергии, доходящей до этой плоскости.

Другой характеристикой является дисперсия длины оптических путей; для непрерывной линзы она равна нулю. Для лучей, расстояние которых от фокуса меньше 1, эта дисперсия равна ≈ 0.5; при расстоянии от фокуса, меньше $a/2$, дисперсия равна ≈ 1.

Эти примеры (и более подробные данные, которые здесь не приводятся) показывают, что при числе кубиков $\approx 2 \div 3$ тысяч линза фокусирует еще значительно хуже, чем при непрерывном распределении ε. При такой дискретизации скачок ε на гранях имеет порядок $\Delta\varepsilon = 0.1$, что по-видимому, слишком велико.

Заметим, что число лучей M пропорционально a^2, число итераций для каждого луча пропорционально a, так что число операций в описанном методе растет как a^3, т.е. $(\Delta\varepsilon)^{-3}$.

Список литературы

[1] *Голубятников А.В., Каценеленбаум Б.З.* // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42. № 12.