01;03;08

Рост глубины модуляции акустической волны, рассеянной на слабоустойчивых колебательных состояниях пузырьков

© *А.О. Максимов*

Институт проблем морских технологий ДВО РАН

Поступило в Редакцию 4 марта 1998 г.

Теоретически исследуется механизм нелинейной диагностики газовых включений в жидкости. Показано, что в окрестности критических значений поля накачки, отвечающих появлению слабоустойчивых колебательных состояний пузырьков, значительно возрастает глубина модуляции рассеянной акустической волны.

Необходимость оценить размеры и пространственное распределение газовых включений в жидкости возникает как при изучении природных объектов, так и в большом числе промышленных, медицинских и экологических приложений [1]. Два обстоятельства: резонансный характер взаимодейтвия и значительная сжимаемость газа в пузырьке обеспечивают приоритет акустическим методам при диагностике этих объектов, представляющих пример нелинейных осцилляторов. Простейшие проявления нелинейных пульсаций сводятся к возбуждению высших гармоник $2\omega_p, 3\omega_p, \ldots$ [2]. Их регистрация в сигнале обратного рассеяния позволяет выделить вклад пузырьков на фоне других (твердых) включений. Более рафинированные методы диагностики основаны на двухчастотном озвучивании исследуемой среды [3–7]. При реализации этих методик звуковое поле состояло из высокочастотной (как правило, превышающей резонансные частоты пузырьков) сигнальной волны и относительно низкочастотной волны накачки, возбуждающей резонансные колебания пузырьков. Одновременно совершенствовались линейные методы акустической спектроскопии газовых включений [8], основанные на использовании амплитудно-модулированных и фазоманипулированных сигналов. Наряду с возбуждением высших гармоник и комбинационных частот нелинейные пульсации пузырьков проявляются и в более сложных эффектах, обусловленных бифуркациями динамических состояний этого нелинейного осциллятора [9–11].

В настоящей работе анализируется взаимодействие мощной амплитудно-модулированной акустической волны $P_p = 0.5\{(A_p + A_i \sin\omega_i t) \times \exp[i(k_p x - \omega_p t)] + \text{k.c.}\}$ с пеленой пузырьков. Между амплитудами и частотами накачки A_p, ω_p и модуляции A_i, ω_i предполагатся выполненными соотношения $A_p \gg A_i$, $\omega_p \gg \omega_i$. Режим нелинейных колебаний отдельных включений задается действием мощной накачки. Воздействие слабой модуляции будет существенным только в окрестности тех динамических состояний пузырьков, которые теряют устойчивость (обращается в нуль хотя бы один из двух показателей Ляпунова). При этом за счет перекачки энергии из поля в слабоустойчивые моды колебаний, раскачиваемые модуляционной компонентой, глубина модуляции рассеянного сигнала может значительно возрастать и служить средством диагностики пузырьков.

Основой количественного рассмотрения этого эффекта будет анализ уравнения Рэлея–Плесета, описывающего пульсации пузырька в поле давления P_p

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{P_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}\right] + 2\delta R_o \dot{R} = -\frac{P_p}{\rho_0}, \tag{1}$$

здесь γ — показатель политропы; δ — затухание, эффективно учитывающее диссипативные процессы вязкости и теплопроводности, а также радиационные потери; P_0, ρ_0, R_0 — равновесные значения давления и плотности жидкости, радиусов пузырьков. Методика построения приближенного решения (2) стандартна (см., например, [12]). В окрестности основного резоанса $|\omega_p - \Omega_0| \ll \omega_p$ асимптотический ряд имеет вид $(R - R_0)/R_0 = 0.5(a \cdot \exp(-i\omega_p t + i\varphi) + \text{k.c.}) + \varepsilon u_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 u_2(a, \varphi) + \dots$ (сравните [13]), здесь $\Omega_0 = (3\gamma P_0/\rho_0 R_0^2)^{1/2}$ — собственная частота пузырька; ε — безразмерный малый параметр, вводимый для обозначения порядка нелинейных членов. Медленно меняющиеся амплитуда a и фаза φ колебаний определяются из системы "укороченных" уравнений, следующей из требования отсутствия секулярных членов в разложении. Учет в (1) нелинейных членов до третьего порядка включительно приводит к следующему виду уравнения для $z = a \cdot \exp(i\varphi)$

$$\dot{z} = -\delta z - i\left[\omega_p - \Omega_0 + k\Omega_0 a^2\right] z + i\frac{[A_p + A_i \sin(\omega_j t)]}{6\gamma P_0 \Omega_0^{-1}}; \tag{2}$$

здесь $\kappa = (6\gamma^2 - 3\gamma - 2)/16$ и при выводе (2) предполагалось, что $\omega_i \leqslant \delta$. В отсутствие модуляционного слагаемого структура решения уравнения (3) хорошо известна. Амплитуда a_* и фаза ϑ_* установившихся колебаний ($\dot{a} = 0$; $\dot{\vartheta} = 0$) описываются при этом выражениями [12,9]

$$a_*^2[(\omega_p - \Omega_0 + \kappa\Omega_0 a_*^2) + \delta^2] = \frac{A_p^2}{36\gamma^2 P_0^2 \Omega_0^{-2}},$$

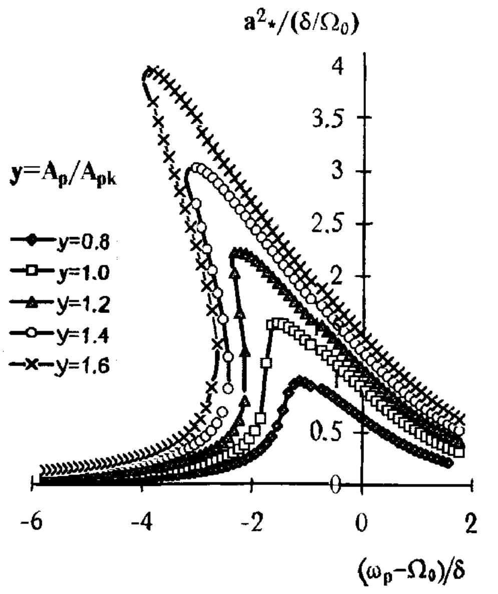
$$\cos\varphi_* = \frac{6\gamma(\delta/\Omega_0)P_0 a_*}{A_p}. \tag{3}$$

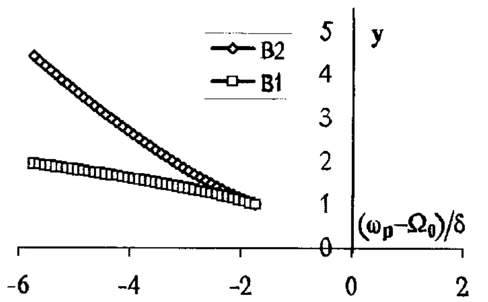
Рисунок (1) иллюстрирует зависимость амплитуды установившихся колебаний a_* от определяющих параметров: расстройки $\omega_p - \Omega_0$ и амплитуды накачки A_p. Вне области, ограниченной кривыми B_1, B_2, у динамической системы (3) (в отсутствие модуляционной составляющей) имеется только одно устойчивое состояние, которому соответствует простой узел на фазовой плоскости a, ϑ. Внутри области, ограниченной кривыми B_1, B_2, имеется три стационарных состояния: два устойчивых — узлы, и одно неустойчивое — седло. На бифурационых кривых B_1 и B_2 происходит слияние узловых и седловых точек. Точка $\mathcal{F}(\omega_{pk} - \Omega_0 = -\sqrt{3} - \delta$, $A_{pk}^2 = (32\sqrt{3}/\kappa)\ (\delta/\Omega_0)^3 P_0^2)$ является особой: в ней происходит слияние всех особых точек — двух узлов и седла.

Используя свойство нелинейных систем усиливать слабые сигналы вблизи порога динамической устойчивости [4], проанализируем влияние модуляционной составляющей в окрестности точки $\mathcal{F}$ — порога возникновения бистабильности. Для пороговых значений определяющих параметров обращается в нуль один из двух показателей Ляпунова динамической системы (2) (в пренебрежении модуляцией), в силу чего при описании временно́й эволюции можно выделить быструю и медленную составляющие. Для достаточно низкочастотной модуляции $\omega_i \ll \delta$ принцип подчинения [15] позволяет исключить быструю переменную, время релаксации которой определяется $1/\delta$, и получить одно уравнение для медленной переменной $\eta = a\sin\vartheta - a_k\sin\vartheta_k$, $(a_k\sin\vartheta_k) = [(\sqrt{3}/2)(\delta/\kappa\Omega_0)]^{1/2}$.

$$\frac{d\eta}{dt} = \left[\frac{\Delta A}{2\Omega_0\rho_0 R_0^2}\,\Delta\Omega\left(\frac{\delta}{2\sqrt{3\kappa\Omega_0}}\right)^{1/2}\right] - \Delta\Omega\,\frac{\eta}{\sqrt{3}}$$

$$- \frac{4}{3\sqrt{3}}\,\kappa\Omega_0\eta^3 + \frac{A_i\sin\omega_i t}{6\gamma P_0\Omega_0^{-1}}. \tag{4}$$





В (4) входят отклонения определяющих параметров от критических значений $\Delta A = A_p - A_{pk}$, $\Delta\Omega = (\omega_p - \Omega_0) + \sqrt{3}\delta(|\Delta\Omega| \ll \delta,\ |\Delta A| \ll A_{pk})$. В настоящем сообщении будет проанализировано простейшее решение (4), отвечающее столь медленной частоте модуляции

$(\omega_i/\Omega_0)^3 \ll (A_i/6\gamma P_0)$, что в главном порядке $d\eta/dt = 0$, при этом квазистационарные значения амплитуды колебаний будут описываться формулами (4) с заменой $A_p \Rightarrow [A_p + A_i \sin\omega_i t]$.

В силу того что сечение рассеяния $\sigma_s \sim a^2$, определение глубины модуляции в расходящейся волне сводится к нахождению явного вида решения алгебраического (кубического) уравнения (3). В окрестности порога бистабильности для $\Delta\Omega \geqslant 0$ имеем

$$a^2 = \left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\frac{\delta}{k\Omega_0}\right)\left\{\frac{1}{4} - \frac{\Delta\Omega}{4\sqrt{3}\delta} - \frac{\mu}{2\sqrt{3}+\nu}\right\},$$

$$\mu \equiv \frac{\Delta A + A_i\sin(\omega_i t)}{A_{pk}}, \qquad \nu = B_+ + B_-, \tag{5}$$

$$B_\pm = \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}\left\{\left(\frac{\Delta\Omega}{\delta} + \frac{4}{\sqrt{3}}\mu\right)\right.$$

$$\left.\pm\left[\left(\frac{\Delta\Omega}{\delta} + \frac{4}{\sqrt{3}}\mu\right)^2 + \frac{2}{9\sqrt{3}}\left(\frac{\Delta\Omega}{\delta}\right)^3\right]^{1/2}\right\}^{1/3}.$$

При $|\Delta A| \ll A_i$, $(\Delta\Omega_0/\delta) \ll A_iA_{pk}$ величина модуляционной составляющей $a_m \sim (\delta/\kappa\Omega_0)^{1/2}\left[(A_i/A_{pk})\sin(\omega_i t)\right]^{1/3}$ значительно превосходит ее значение вдали от порога ($|\Delta A| \sim A_{pk}$, $(\Delta\Omega_0/\delta) \sim 1$) $a_m \sim (\delta/\kappa\Omega_0)^{1/2}\left[(A_i/A_{pk})\sin(\omega_i t)\right]$.

При $\Delta\Omega < 0$ изменения амплитуды колебаний в области бистабильности $\left[(\Delta\Omega/\delta) + (4\mu/\sqrt{3})\right]^2 + (2/9\sqrt{3})(\Delta\Omega/\delta)^3 \leqslant 0$ будет сопровождаться гистерезисными явлениями. Однако в окрестности порога размеры этой области малы (по сравнению с амплитудой изменения внешнего поля $|\Delta A| \ll A_i$), как мала и модуляционная составляющая колебаний на том отрезке времени, который отвечает пересечению области бистабильности. По этой причине формула (5) достаточно хорошо описывает модуляцию рассеянного поля в окрестности порога и при $\Delta\Omega < 0$.

Таким образом, наличие медленной амплитудной модуляции поля накачки приводит в окрестности порога бистабильности динамических состояний пузырька к значительному росту и существеннно нелинейному характеру модуляции рассеянного поля. Данное обстоятельство обеспечивает новые возможности для диагностики газовых включений в жидкости.

Список литературы

[1] *Leighton T.G.* // The Acoustical Bubble. London.: Academic Press, 1994.
[2] *Заболотская Е.А., Солуян С.И.* // Акустический журнал. 1972. Т. 18. В. 3. С. 472–474.
[3] *Сандлер Б.М., Селивановский Д.А., Соколов А.Ю.* // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. В. 6. С. 1474–1476.
[4] *Newhouse V.L., Shankar P.M.* // J. Acoust. Soc. Am. 1984. V. 75. N 5. P. 1473–1477.
[5] *Leighton T.G., Lingard R.J., Field J.E.* // Ultrasonics. 1991. V. 29. P. 319–323.
[6] *Leighton T.G., Phelps A.D., Ramble D.G., Sharpe D.A.* // Ultrasonics. 1996. V. 34. P. 661–667.
[7] *Maksimov A.O.* // Ultrasonics. 1997. V. 35. P. 79–86.
[8] *Буланов В.А.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. В. 15. С. 67–71.
[9] *Максимов А.О.* // ЖТФ. 1986. Т. 56. № 1. С. 185–189.
[10] *Максимов А.О.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. № 4. С. 822–825.
[11] *Максимов А.О.* // Акустический журнал. 1989. Т. 35. № 4. С. 91–96.
[12] *Найфэ А.Х.* // Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
[13] *Prosperetti A.* // J. Acoust. Soc. Am. 1974. V. 56. N 3. P. 878–885.
[14] *Weisenfeld K., Mc Namara B.* // Phys. Rev. A. 1986. V. 33. N 1. P. 629–643.
[15] *Хакен Г.* // Синергетика, М.: Мир, 1985. 424 с.