

01

## **Фазовая синхронизация переключений в стохастической бистабильной системе при аperiodическом внешнем воздействии**

© А.Н. Сильченко, Т. Капитаник, В.С. Анищенко

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступило в Редакцию 20 марта 1998 г.

Рассматривается эффект синхронизации переключений в стохастической бистабильной системе, возмущаемой хаотическим сигналом. Описание эффекта дается в рамках классической теории фазовой синхронизации.

Как известно, при взаимодействии автоколебательных систем имеют место эффекты взаимной и вынужденной синхронизации колебаний [1]. Результаты недавних исследований показали, что данные эффекты наблюдаются также в хаотических автоколебательных системах [2–4] и в системах с контролируемым шумом временными масштабами [5–8]. Более того, на примере системы Ресслера корректно введено понятие мгновенной фазы хаотических колебаний, а эффект взаимной хаотической синхронизации описан в терминах классической теории фазовой синхронизации [9,10]. Стохастическая бистабильная система, рассматриваемая в данной работе, является моделью, описывающей движение броуновской частицы в двухъямном потенциале и принадлежит к классу нелинейных систем, которые не обладают собственными детерминированными частотами. Их динамика существенным образом зависит от интенсивности шума, а характерным временным масштабом таких систем является среднее время выхода из потенциальной ямы (время Крамерса) [11]. Стохастические бистабильные системы, возмущаемые слабым периодическим сигналом, стали недавно предметом пристального внимания в связи с изучением явления стохастического резонанса (СР) [12–14]. Отклик системы на слабое периодическое воздействие существенно усиливается и при оптимально выбранном уровне шума (в режиме СР) достигает максимума. В пределе малой амплитуды

периодической силы СР описывается с помощью теории линейного отклика [15,16]. В случае, когда амплитуда периодического воздействия сравнима по величине (но остается меньше) с величиной потенциального барьера в стохастической бистабильной системе, имеет место синхронизация переключений [7]. Анализ степени предсказуемости отклика бистабильной системы с помощью различных мер сложности показал, что стохастическая синхронизация обусловлена самоорганизацией системы [8]. Эффект взаимной стохастической синхронизации переключений в системе двух связанных бистабильных осцилляторов, возмущаемых статистически независимыми источниками шума, был впервые рассмотрен в работах [6,18]. В этом случае в системе вообще отсутствуют детерминированные временные масштабы и с ростом связи наблюдается взаимодействие статистических временных масштабов подсистем, определяемых как моменты функции распределения. В работе [17] эффекты взаимной и вынужденной синхронизации переключений в бистабильных стохастических системах были рассмотрены с позиций классической теории фазовой синхронизации.

Как показали результаты недавних исследований, СР также имеет место в более сложном случае, когда воздействие является аperiodическим. В работах [19,20] было введено понятие аperiodического стохастического резонанса (АСР), а также было показано, что отклик бистабильной системы на медленно меняющееся аperiodическое воздействие может быть оптимизирован шумом. Оптимизация с помощью шума процесса передачи информации между двумя односторонне связанными нелинейными осцилляторами, генерирующими хаотические последовательности импульсов, была продемонстрирована в работе [21].

Целью настоящей работы является описание эффекта АСР в терминах теории фазовой синхронизации. В качестве входного сигнала берется сигнал, генерируемый некоторой динамической системой в режиме динамического хаоса, амплитуда которого сравнима по величине с высотой потенциального барьера. В отсутствие шума амплитуды сигнала недостаточно, чтобы вызвать переключения в бистабильной системе.

Как уже упоминалось выше, базовой моделью при рассмотрении эффектов СР и АСР является модель передемпфированной бистабильной системы, возмущаемой белым гауссовым шумом и внешним сигналом, которая описывается следующим стохастическим дифференциальным

уравнением:

$$\dot{x} = \alpha x - x^3 + \sqrt{2D}\xi(t) + \mu y(t), \quad (1)$$

где  $\mu$  — некоторая константа,  $y(t)$  — хаотический сигнал,  $\xi(t)$  — гауссов белый шум, параметр  $D$  определяет интенсивность шума, параметр  $\alpha$  определяет глубину ям симметричного потенциала (в нашем случае  $\alpha = 5$ ).

Рассмотрим сначала случай, когда входной сигнал генерируется системой Ресслера:

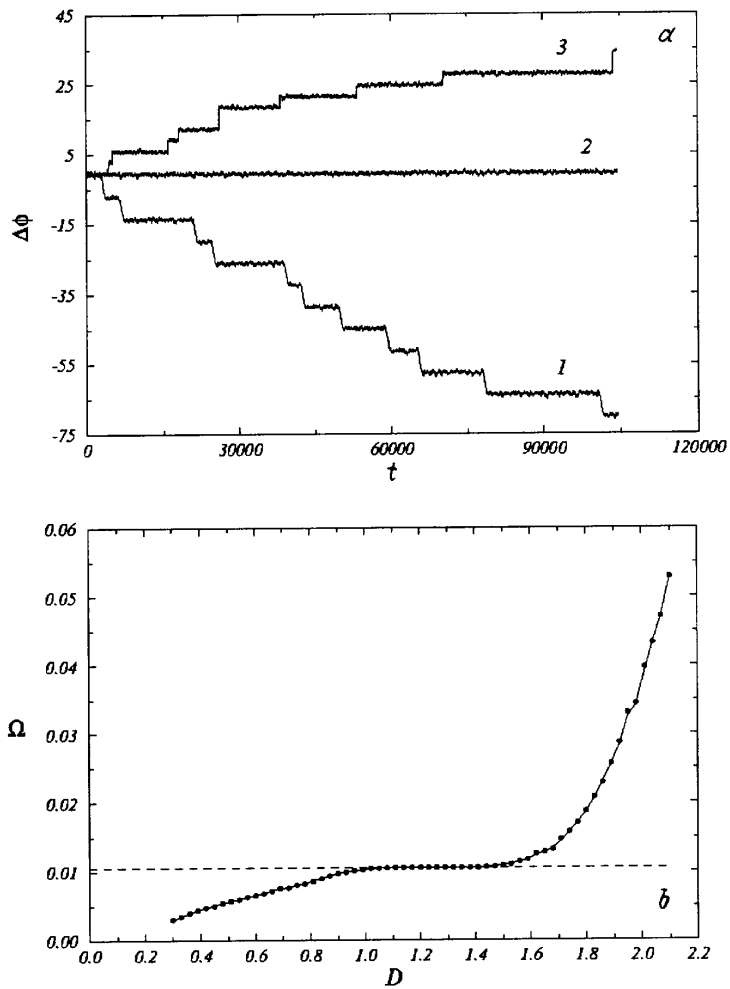
$$\dot{x}_1 = \tau(-x_2 - x_3), \quad \dot{x}_2 = \tau(x_1 + 0.15x_2), \quad \dot{x}_3 = \tau(0.2 + x_3(x_1 - 6.26)). \quad (2)$$

В этом случае  $y(t) = x_1$ ,  $\mu = 0.42$ , а параметр  $\tau = 0.01$  (вводя нормировку времени, мы увеличиваем базовый период хаотических колебаний по сравнению с характерным временем релаксации внутри потенциальных ям). Как показано в работе [10], для системы Ресслера можно несколькими способами корректно ввести мгновенную фазу хаотических колебаний. В нашем конкретном случае мгновенная фаза воздействия и мгновенная фаза отклика бистабильной системы будут определяться на основании концепции аналитического сигнала [22,23] через преобразование Гильберта, которое получило широкое распространение в радиофизике [24,25] и теории обработки сигналов [26]. Как известно, преобразование Гильберта ставит в соответствие некоторому произвольному сигналу  $s(t)$  аналитический сигнал  $\psi(t) = s(t) + is_H(t) = a(t)e^{i\phi(t)}$ , где  $a(t) = \sqrt{s(t)^2 + s_H^2(t)}$  и  $\phi(t) = \arctan(s_H(t)/s(t))$ , а функция  $s_H(t)$  есть преобразование Гильберта исходного сигнала  $s(t)$ :  $s_H(t) = 1/\pi \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)d\tau/(t - \tau)$  (интеграл берется в смысле главного значения Коши).

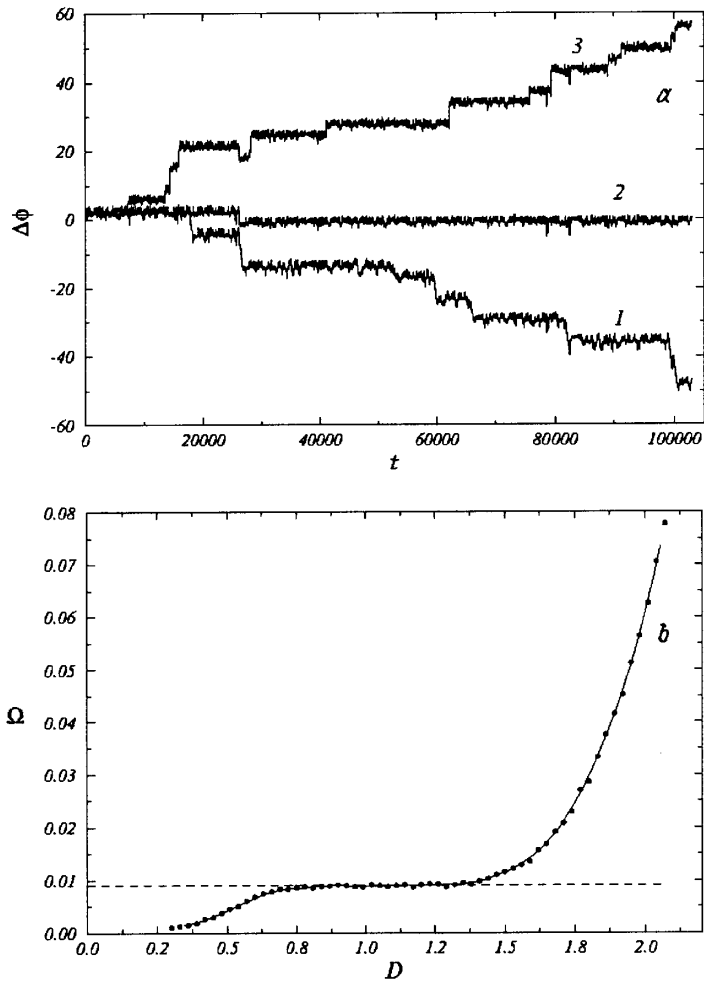
В классическом случае, рассмотренном в работе [27], СДУ для разности фаз имеет вид

$$\Delta\dot{\phi} = \delta - \epsilon \sin(\Delta\phi) + \xi(t). \quad (3)$$

Разность фаз  $\Delta\phi$  в этом случае диффундирует в потенциале  $V(\Delta\phi) = -\delta\Delta\phi - \epsilon \cos(\Delta\phi)$ , длительное время флуктуируя внутри потенциальных ям и совершая редкие  $2\pi$ -скачки [27]. В нашем случае фаза воздействия определяется уравнением:  $\dot{\phi} = \langle\omega\rangle + \rho(\phi)$ , где  $\rho(\phi)$  — некоторый малый "фазовый шум" в системе Ресслера [9], а  $\langle\omega\rangle$  — средняя частота хаотических колебаний. Несмотря на имеющуюся модуляцию фазы входного сигнала при некоторой интенсивности шума, как



**Рис. 1.** *a* — зависимость разности фаз от времени для различных значений интенсивности шума для случая входного сигнала из системы Ресслера: кривая 1 —  $D = 0.9$ , кривая 2 —  $D = 1.15$ , кривая 3 —  $D = 1.4$ ; *b* — зависимость средней частоты  $\Omega$  (сплошная линия) и средней частоты переключений (точки) от интенсивности шума, пунктирной линией показано значение средней частоты хаотических колебаний в системе.



**Рис. 2.** *a* — зависимость разности фаз от времени для различных значений интенсивности шума для случая входного сигнала из системы Лоренца: кривая 1 —  $D = 0.76$ , кривая 2 —  $D = 1.0$ , кривая 3 —  $D = 1.3$ ; *b* — зависимость средней частоты  $\Omega$  (сплошная линия) и средней частоты переключений (точки) от интенсивности шума, пунктирной линией показано значение средней частоты переключений в системе Лоренца.

и в случае периодического воздействия, наблюдается эффект фазовой синхронизации переключений. В этом случае разность фаз флуктуирует около некоторого фиксированного значения (кривая 2 на рис. 1, *a*). В отсутствие синхронизации разность фаз неограниченно возрастает, совершая  $2\pi$ -скачки (кривые 1 и 3 на рис. 1, *a*). Зависимости средней частоты  $\Omega = \langle \dot{\phi} \rangle$  и средней частоты переключений, определяемой без учета внутриямного движения, от интенсивности шума приведены на рис. 1, *b*. Из рисунка видно, что две эти характеристики демонстрируют идентичное поведение и в некоторой области значений интенсивности шума совпадают со средней частотой хаотических колебаний в системе Ресслера.

Теперь рассмотрим случай, когда в качестве входного сигнала рассматривается  $x$ -переменная системы Лоренца:

$$\dot{x}_1 = 10(y - x)\tau, \quad \dot{y} = (28x - y - xz)\tau, \quad \dot{z} = (xy - 8/3z)\tau. \quad (4)$$

В этом случае в (1)  $y(t) = x$ ,  $\mu = 0.245$ ,  $\tau = 0.005$ . Из рис. 2, *a* видно, что, как и в предыдущем случае, при некоторой интенсивности шума наблюдается фазовая синхронизация переключений в стохастической бистабильной системе и разность фаз остается ограниченной (кривая 2), а вне области синхронизации разность фаз неограниченно нарастает (кривые 1 и 3). Более того, как следует из рис. 2, *b*, средняя частота  $\Omega = \langle \dot{\phi} \rangle$  и средняя частота переключений бистабильной системы демонстрируют одинаковое поведение и в некоторой области значений интенсивности шума совпадают со средней частотой переключений в системе Лоренца. Как показали исследования, в случае малой амплитуды хаотического воздействия захвата средних частот и фазовой синхронизации не наблюдается.

Таким образом, результаты исследований приведенные выше свидетельствуют о том, что в стохастической бистабильной системе, возбуждаемой хаотическим сигналом, имеет место фазовая синхронизация переключений и наблюдается захват средней частоты хаотического воздействия.

Авторы благодарны А.Б. Нейману за обсуждение полученных результатов.

## Список литературы

- [1] Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
- [2] Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. С. 795.
- [3] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. // РЭ. 1991. Т. 36. В. 2. С. 338–351.
- [4] Blekhtman I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G. // Appl. Mech. Rev. 1995. V. 48. P. 733.
- [5] Gammaitoni L., Marchesoni F., Santucci S. // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 1052.
- [6] Neiman A.B. // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. P. 3484.
- [7] Shulgin B.V., Neiman A.B., Anishchenko V.S. // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 4157.
- [8] Neiman A., Shulgin B., Anishchenko V., Ebeling W., Schimansky-Geier L., Freund J. // Phys Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 4299.
- [9] Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 1804.
- [10] Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J. // Physica D. 1997. V. 104. N 3–4. P. 219–238.
- [11] Hänggi P., Talkner P., Borkovec M. // Rev. Mod. Phys. 1990. V. 62. N 2. P. 251–341.
- [12] Wiesenfeld K., Moss F. // Nature. 1995. V. 373. P. 33.
- [13] Bulsara A.R., Gammaitoni L. // Physics Today. 1996. March. P. 39.
- [14] Gammaitoni L., Hänggi P., Jung P., Marchesoni F. // Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70. N 1. P. 223.
- [15] Дыкман М.И., МакКлинток П.В.Е., Р. Маннелла, Н.Г. Стокс // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 52. С. 780–782.
- [16] Jung P., Hänggi P. // Phys. Rev. A. 1991. V. 44. P. 8032.
- [17] Сильченко А.Н., Нейман А.Б., Анищенко В.С. // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24. В. 15. С. 12–19.
- [18] Neiman A., Schimansky-Geier L. // Phys. Lett. A. 1995. V. 197. P. 379.
- [19] Gollins J.J., Chow C.C., Imhoff T.T. // Phys. Rev. E. 1995. V. 52. R3321.
- [20] Collins J.J., Chow C.C., Capela A.C., Imhoff T.T. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 5575.
- [21] Eichwald C., Walleczek J. // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. R6315.
- [22] Gabor D. // J. IEE London. 1946. V. 93. P. 429.
- [23] Panter P. Modulation, Noise and Spectral Analysis. McGr. New York, 1965.
- [24] Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Случайные процессы. М.: Наука, 1976.

- [25] *Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983.
- [26] *Бендат Д., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989.
- [27] *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.