01;07

Спин-орбитальное взаимодействие в поле оптического вихря маломодового волокна

© *А.В. Воляр, В.З. Жилайтис, В.Г. Шведов*

Симферопольский государственный университет

Поступило в Редакцию 3 апреля 1998 г.

Построен квантово-механический аналог оператора $\hat{\mathbf{V}}$ спин-орбитального взаимодействия для полей оптических CV вихрей, TE и TM мод в оптическом волокне. Показано, что поляризационная поправка $\delta\beta$ к постоянной распространения, являющаяся средним значением этого оператора, представляет меру "расщепления уровня" постоянной распространения $\tilde{\beta}$ в скалярном случае. Различие в действии отдельных частей оператора $\hat{\mathbf{V}}$ на поля CV вихрей и TM, TE мод указывает на наличие двух различных физических процессов — циркулярного и линейного двулучепреломления в локально-изотропном оптическом волокне. Преобразование "скалярного" поля $\tilde{\mathbf{e}}$ в векторное поле $\mathbf{e}_1$, вызванное оператором спин-орбитального взаимодействия, можно рассматривать как результат переизлучения дополнительного поля $\mathbf{e}_1$ вращающимся вокруг оптической оси волокна полем вихря $\tilde{\mathbf{e}}$. В таком представлении дополнительное поле $\mathbf{e}_1$ можно рассматривать как "релятивистскую" поправку к полю вихря, вызванную искажениями основного поля $\tilde{\mathbf{e}}$, возникающую в результате вращения поля оптического вихря в среде маломодового волокна.

Распространение оптического вихря вдоль маломодового оптического волокна сопровождается прецессией вектора Пойнтинга электромагнитного поля вокруг оси волокна [1]. Эта прецессия является результатом неголономной связи между электромагнитными аналогами орбитального и спинового угловых моментов поля направляемого вихря. Мерой такой неголономной связи является топологическая фаза [2], которая принимает форму поляризационной поправки $\delta\beta$ к постоянной распространения $\tilde{\beta}$ оптических вихрей волокна [3]. В таком представлении поляризационная поправка $\delta\beta$ характеризует величину расщепления "невозмущенного уровня" постоянной распространения $\tilde{\beta}$. Процесс, вызывающий расщепление уровня $\tilde{\beta}$, можно связать (по аналогии с моделью атома вещества [4]) со спин-орбитальным взаимодействием в поле оптического вихря. Тогда одному расщепленному подуровню будет соответствовать постоянная распространения $\beta_{\mathrm{CV}} = \tilde{\beta}_{\mathrm{CV}} + \delta\beta_{\mathrm{CV}}$ для CV вихря, а другим подуровням — постоянные распространения β_{TE} и β_{TM} — TE и TM собственных мод соответственно (при $l = 1$).

Целью данной работы явилось построение оператора спин-орбитального взаимодействия $\delta\hat{\mathbf{H}}$ для поля оптических CV вихрей, TE и TM мод. Изучение этой проблемы проводилось в рамках формального подхода квантовой механики, использованного в работах [5–7] для электромагнитного поля.

Запишем векторное волновое уравнение для света в неоднородной среде [8]:

$$\left(\boldsymbol{\nabla}_{\perp}^2 + n^2(r)k^2 - \beta^2\right)\mathbf{e}_{\perp} = -\boldsymbol{\nabla}_{\perp}\left(\mathbf{e}_{\perp}\boldsymbol{\nabla}_{\perp}\ln n^2(r)\right), \quad (1)$$

где индекс $\perp$ указывает на поперечные компоненты векторов, β — постоянная распространения собственных мод в оптическом волокне с градиентным профилем показателя преломления $n^2(r) = n_{co}^2(1 - 2\Delta f(r))$, где Δ — высота профиля $n(r)$. Если показатели преломления сердцевины n_{co} и оболочки n_{cl} близки по величине, т.е. параметр Δ мал, то уравнение (1) в первом приближении теории возмущений можно переписать в виде [8]:

$$\left(\boldsymbol{\nabla}_{\perp}^2 + n^2(r)k^2 - \tilde{\beta}^2\right)\tilde{\mathbf{e}}_{\perp} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) не учитывает поляризационные свойства поля и поэтому называется скалярным волновым уравнением. Векторные свойства полей учитываются трансформацией скалярной амплитуды поля в векторную амплитуду $\tilde{\mathbf{e}} \to \mathbf{e}$, где $\mathbf{e} \approx \tilde{\mathbf{e}} + \Delta\mathbf{e}_1$ и постоянной распространения $\tilde{\beta} \to \beta$, так что $\beta = \tilde{\beta} + \delta\beta$, где $\delta\beta$ — поляризационная поправка.

Найдем выражение для $\delta\beta$. Искомое уравнение для поляризационной поправки $\delta\beta$ можно получить, последовательно сложив сопряженные уравнения (1) и (2), умноженные на $\tilde{\mathbf{e}}$ и $\mathbf{e}$ соответственно. Тогда, пользуясь свойством эрмитовости оператора $\boldsymbol{\nabla}^2$, получим (индекс $\perp$ будем в дальнейшем опускать):

$$\delta\beta = A\int\limits_S \left\{\partial_i\left[\left(\tilde{e}_i e_k^* + \tilde{e}_i^* e_k\right)\partial_k \ln n^2\right] - \left(e_k^*\partial_i\tilde{e}_i - e_k\partial_i\tilde{e}_i^*\right)\partial_k \ln n^2\right\} dS, \quad (3)$$

где

$$A^{-1} = \frac{2V}{\rho\sqrt{2\Delta}}\int\limits_S \left(\tilde{\mathbf{e}}^*\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{e}}\mathbf{e}^*\right)dS$$

— нормировочный множитель, индексы i и k принимают значения x и y, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ и по повторяющимся индексам производится суммирование. Первое слагаемое в выражении (3) при интегрировании может быть преобразовано к криволинейному интегралу от действительной функции, который с учетом ограниченности поля на бесконечности обращается в нуль. При малых величинах Δ можно считать [8], что $\mathbf{e} \approx \tilde{\mathbf{e}}$. Разложим $\boldsymbol{\nabla} \ln n^2(r)$ в ряд по Δ и ограничимся первым приближением ($\boldsymbol{\nabla} \ln n^2 \approx -2\Delta \boldsymbol{\nabla} f$) [8]. Можно показать, что для всех собственных полей оптического волокна $\tilde{e}_k^* \partial_k f \partial_i \tilde{e}_i = \tilde{e}_k \partial_k f \partial_i \tilde{e}_i^*$. В этом случае для поляризационной поправки $\delta\beta$ получим

$$\delta\beta = 2\Delta A \int\limits_S \tilde{e}_i^* \partial_i f \partial_k \tilde{e}_k dS, \tag{4}$$

которое выполняется как для действительных, так и для комплексных полей $\mathbf{e}$, в отличие от выражения, приведенного в работе [8], которому удовлетворяют только действительные поля. Подынтегральное выражение в (4) представим в операторном виде

$$\tilde{e}_i^* \partial_i f \partial_k \tilde{e}_k = \left(\tilde{e}_x^*, \tilde{e}_y^*\right) \begin{pmatrix} \partial_x f \partial_x & \partial_x f \partial_y \\ \partial_y f \partial_x & \partial_y f \partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{e}_x \\ \tilde{e}_y \end{pmatrix} = \left\langle \tilde{\mathbf{e}} | \hat{\mathbf{V}} | \tilde{\mathbf{e}} \right\rangle. \tag{5}$$

Матричный дифференциальный оператор $\hat{\mathbf{V}}$ разложим по матрицам Паули:

$$\hat{\mathbf{V}} = \hat{\sigma}_0 \hat{\mathbf{V}}_0 + \hat{\sigma}_1 \hat{\mathbf{V}}_1 + \hat{\sigma}_2 \hat{\mathbf{V}}_2 + \hat{\sigma}_3 \hat{\mathbf{V}}_3,$$

где

$$\hat{\mathbf{V}}_0 = \frac{1}{2}\Big(\partial_x f \partial_x + \partial_y f \partial_y\Big) = \frac{1}{2}\,\partial_r f \partial_r;$$

$$\hat{\mathbf{V}}_1 = \frac{1}{2}\Big(\partial_x f \partial_x - \partial_y f \partial_y\Big) = \frac{1}{2}\partial_r f \left(\cos 2\varphi \partial_r - \frac{1}{r} \sin 2\varphi \partial_\varphi\right);$$

$$\hat{\mathbf{V}}_2 = \frac{1}{2}\Big(\partial_x f \partial_y + \partial_y f \partial_x\Big) = \frac{1}{2}\partial_r f \left(\sin 2\varphi \partial_r + \frac{1}{r} \cos 2\varphi \partial_\varphi\right);$$

$$\hat{\mathbf{V}}_3 = \frac{i}{2}\Big(\partial_x f \partial_y + \partial_y f \partial_x\Big) = \frac{i}{2r}\,\partial_r f \partial_\varphi. \tag{6}$$

При переходе в цилиндрическую систему координат мы ограничились случаем осесимметричного волокна ($\partial_\varphi f = 0$). Удобно представить оператор $\hat{\mathbf{V}}$ в виде

$$\hat{\mathbf{V}} = \frac{1}{2\rho^2}\frac{\partial f}{\partial R}\left(\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{D}}\right), \quad \text{где} \quad \hat{\mathbf{D}} = \hat{\sigma}_0\frac{\partial}{\partial R} + \frac{i}{R}\hat{\sigma}_3\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\sigma}_1\cos 2\varphi + \hat{\sigma}_2\sin 2\varphi = \begin{pmatrix}\cos 2\varphi & \sin 2\varphi\\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi\end{pmatrix}_L$$

$$= \begin{pmatrix}0 & e^{-i2\varphi}\\ e^{i2\varphi} & 0\end{pmatrix}_C. \tag{7}$$

Индекс L указывает на представление матричных операторов в линейно-поляризованном базисе, а индекс C — в циркулярно поляризованном базисе.

Форма оператора (7) аналогична форме оператора спин-орбитального взаимодействия для электронов в цилиндрически-симметричном поле. Среднее значение физической величины оператора $\hat{\mathbf{V}}$ равно поляризованной поправке $\delta\beta$ в выражении (3). В оператор $\hat{\mathbf{D}}$ входят слагаемые, которые аналогичны оператору контактного взаимодействия $\hat{\mathbf{K}} = \hat{\sigma}_0\frac{\partial}{\partial R}$ и спин-орбитального взаимодействия $\hat{\mathbf{S}} = \frac{i}{R}\hat{\sigma}_3\frac{\partial}{\partial\varphi}$ для электрона в атоме водорода [9]. Из уравнений (1) и (2) следует, что поля $\mathbf{e}$ для CV вихрей, TE и TM мод являются собственными векторами оператора

$$\hat{\mathbf{H}} = \boldsymbol{\nabla}^2 + n^2(r)k^2 + \frac{\Delta}{2\rho^2}\frac{\partial f}{\partial R}\left(\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{D}}\right), \tag{8}$$

а постоянные распространения β его собственными значениями.

В таблице приведены результаты действия операторов $\hat{\mathbf{D}}$ и $\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{D}}$ на поля собственных мод волокна. Из таблицы видно, что действие этих операторов на циркулярно поляризованные CV вихри существенно отличается от их действия на линейно поляризованные азимутально-симметричные поля TE и TM мод. Оператор $\hat{\mathbf{D}}$ осуществляет преобразование радиального распределения поля: $F_l(R) \Rightarrow G_l^{-\varkappa}(R)$, где $G_l^{-\varkappa}(R) = \frac{dF_l}{dR} - \varkappa\frac{l}{R}F_l$. Матрицу $\hat{\mathbf{T}}$ можно представить в виде произведения матрицы Паули $\hat{\sigma}_1$ и оператора вращения на угол 2φ:

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\sigma}_1\hat{\mathbf{R}}(2\varphi) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2\varphi & \sin 2\varphi\\ -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Преобразование полей и их постоянных распространения при действии оператора спин-орбитального взаимодействия

		$\varkappa=+1\quad l\geqslant 1$, $\varkappa=-1\quad l>1$, $\sigma=\pm 1$ — $CV_{\sigma l}^{\varkappa\sigma}$	$\varkappa=-1\quad l=1$ — TM	$\varkappa=-1\quad l=1$ — TE
$\lvert\tilde{\mathbf{e}}\rangle$	e_x	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}F_l e^{i\sigma l\varphi}$	$F_1\cos l\varphi$	$F_1\sin l\varphi$
	e_y	$\dfrac{i\varkappa\sigma}{\sqrt{2}}F_l e^{i\sigma l\varphi}$	$F_1\sin l\varphi$	$-F_1\cos l\varphi$
$\hat{\mathbf{D}}\lvert\tilde{\mathbf{e}}\rangle$	e_x	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}G_l^{-\varkappa}e^{i\sigma l\varphi}$	$G_1^+\cos l\varphi$	$G_1^+\sin l\varphi$
	e_y	$\dfrac{i\varkappa\sigma}{\sqrt{2}}G_l^{-\varkappa}e^{i\sigma l\varphi}$	$G_1^+\sin l\varphi$	$-G_1^+\cos l\varphi$
$\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{D}}\lvert\tilde{\mathbf{e}}\rangle$	e_x	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}G_l^{-\varkappa}e^{i\sigma(l+2\varkappa)\varphi}$	$G_1^+\cos l\varphi$	$-G_1^+\sin l\varphi$
	e_y	$\dfrac{-i\varkappa\sigma}{\sqrt{2}}G_l^{-\varkappa}e^{i\sigma(l+2\varkappa)\varphi}$	$G_1^+\sin l\varphi$	$G_1^+\cos l\varphi$
$a\langle\tilde{\mathbf{e}}\rvert\dfrac{\partial f}{\partial R}\hat{\mathbf{D}}\lvert\tilde{\mathbf{e}}\rangle$		$I_l^{-\varkappa}$	I_l^+	I_1^+
$a\langle\tilde{\mathbf{e}}\rvert\dfrac{\partial f}{\partial R}\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{D}}\lvert\tilde{\mathbf{e}}\rangle$		0	I_l^+	$-I_1^+$
$\delta\beta$		$I_l^{-\varkappa}$	$2I_l^+$	0
$\delta\beta\ (f=R^2)$		$-\varkappa(l+\varkappa)\dfrac{(\sqrt{2\Delta})^3}{2\rho V}$	0	0

$$a=\frac{(\sqrt{2\Delta})^3}{4\rho V}\frac{1}{\langle\tilde{\mathbf{e}}|\tilde{\mathbf{e}}\rangle},\qquad \delta\beta=\frac{(\sqrt{2\Delta})^3}{4\rho V}\,\frac{\langle\tilde{\mathbf{e}}|\dfrac{\partial f}{\partial R}(\hat{\mathbf{D}}+\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{D}})|\tilde{\mathbf{e}}\rangle}{\langle\tilde{\mathbf{e}}|\tilde{\mathbf{e}}\rangle},$$

$$I_l^{-\varkappa}=\frac{(\sqrt{2\Delta})^3}{4\rho V}\int_0^\infty\frac{\partial f}{\partial R}F_lG_l^{-\varkappa}RdR\Bigg/\int_0^\infty F_l^2RdR.$$

Оператор вращения $\hat{\mathbf{R}}$ преобразует величину топологического заряда $l \Rightarrow l + 2\varkappa$. Матрица $\hat{\sigma}_1$ преобразует направление циркуляции на противоположное $\sigma^+ \Leftrightarrow \sigma^-$. Действие оператора $\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{D}}$ на поля $\tilde{\mathbf{e}}$ для CV вихрей преобразует их в ортогональные модовые состояния. Поэтому вклад в поляризационную поправку $\delta\beta$ дает только оператор $\hat{\mathbf{D}}$, который не изменяет состояние поляризации поля, но преобразует фазу поля с определенной циркулярной поляризацией. Иначе сказывается действие операторов $\hat{\mathbf{D}}$ и $\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{D}}$ на поля TE и TM мод. Здесь вклад в изменение поля вносят обе части оператора $\hat{\mathbf{V}}$. Следовательно, в переизлученном поле TE и TM изменяется как фаза, так и поляризация. Такое различие в действии оператора $\hat{\mathbf{V}}$ на поляризации полей CV вихрей и TE, TM мод указывает на наличие двух различных физических процессов: 1) для поля CV вихрей — циркулярное двулучепреломление; 2) для TE и TM мод — линейное двулучепреломление. На присутствие этих двух процессов двулучепреломления в локально изотропной неоднородной среде также указывалось в работах [10,11].

Величины полей $\tilde{\mathbf{e}}$, приведенные в таблице, соответствуют нулевым поправкам теории возмущений рассматриваемой в работе [8]. Таким образом, действие оператора $\hat{\mathbf{H}}$ в (8) на поля собственных CV и парциальных IV вихрей можно представить следующим образом. Вращающееся вокруг оси z поле $\tilde{\mathbf{e}}$ оптического вихря переизлучает как свое собственное поле $\tilde{\mathbf{e}}$, так и дополнительное поле $\mathbf{e}_1$. Поле $\mathbf{e}_1$ является "релятивистской" поправкой к вращающемуся полю $\tilde{\mathbf{e}}$, которое восстанавливает вращающиеся поля вдали от оптической оси z, таким образом, что полный угловой момент, несмотря на изменения топологического заряда l и спиральности σ_z, остается неизменным.

Список литературы

[1] *Воляр А.В., Фадеева Т.А., Грошенко Н.А.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. В. 22. С. 58–65.

[2] *Berry M.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1984. V. 392. P. 45–57.

[3] *Воляр А.В., Жилайтис В.З., Фадеева Т.А., Шведов В.Г.* // Письма в ЖТФ. 1998 (принято к печати).

[4] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. III. М.: Наука, 1989. 768 с.

[5] *Gloge D., Marcuse D.* // J. Opt. Soc. Am. 1969. V. 59. N 12. P. 1629–1631.

[6] *Eichmann G.* // J. Opt. Soc. Am. 1970. V. 61. N 2. P. 161–168.

[7] *Liberman V.S., Zel'dovich B.Ya.* // Phys. Rev. A. 1992. V. 46. N 8. P. 5199–5207.
[8] *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987. 656 с.
[9] *Давыдов А.С.* Квантовая механика. М.: Наука, 1976. 703 с.
[10] *Воляр А.В., Мицай Ю.Н., Мягков В.И., Фадеева Т.А.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. В. 3. С. 48–52.
[11] *Liberman V.S., Zel'dovich B.Ya.* // Phys. Rev. A. 1994. V. 49. N 3. P. 2389–2396.