01;03

Влияние сжимаемости газа на критические условия неустойчивости в электростатическом поле пузыря в диэлектрической жидкости

© А.Н. Жаров

Ярославский государственный университет

Поступило в Редакцию 20 апреля 1998 г.

Показано, что критическое для неустойчивости газового пузыря в жидком диэлектрике значение напряженности однородного электростатического поля в отличие от жидкой капли снижается с увеличением сжимаемости газа в пузыре.

Задача о неустойчивости газового пузыря в однородном электростатическом поле $\mathbf{E}_0$ представляет интерес в связи с излучением электрического пробоя жидких диэлектриков, поскольку в момент пробоя у катода образуется область пониженной плотности среды, которая расценивается как появление газового (парового) микропузырька [1]. Сам же электрический пробой диэлектрика может быть связан с развитием электростатической неустойчивости такого пузырька в поле $\mathbf{E}_0$.

Неустойчивость пузырька, так же как и неустойчивость капли [2], может быть связана с его делением на два дочерних пузыря [3] или со сбросом большого количества сильно заряженных еще на два порядка более мелких дочерних пузырьков с вершин родительского пузыря [4,5]. Реализация того или иного типа неустойчивости определяется физическими свойствами жидкости и газа, такими как проводимость, диэлектрическая проницаемость, температура, сжимаемость и т. д.

В нижеследующем рассмотрении остановимся на втором из упомянутых типов неустойчивости. Он может реализоваться для пузыря с хорошо проводящими стенками. Хорошая проводимость стенок пузыря может быть связана с ионизацией газа в пузыре (с возникновением плазменного пузыря при локальном пробое), а также с оседанием на стенках пузыря носителей заряда из жидкости (ионов обоих знаков), поверхностная подвижность которых может значительно превосходить объемную.

Пусть в отсутствие электрического поля $\mathbf{E}_0$ в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε образовался сферический газовый пузырек, имеющий начальный радиус r_0. Свободная поверхность диэлектрика испытывает действие атмосферного давления P_{at}. Газ в пузыре характеризуется изотермическим коэффициентом сжимаемости χ, а начальное давление газа превосходит атмосферное в μ_0 раз. Граница раздела фаз имеет коэффициент поверхностного натяжения σ. Величина безразмерного давления в пузыре μ_0 определяется соотношением

$$\mu_0 = 1 + \frac{2\sigma}{P_{at} r_0}. \tag{1}$$

Для оценки максимального значения начального давления примем $P_{at} \approx 10^6\,\mathrm{din/cm^2}$, $\sigma \approx 50\,\mathrm{din/cm}$, $r_0 = 10^{-5}\,\mathrm{cm}$. Тогда выражение (1) дает $\mu_0 \approx 11$.

В однородном электростатическом поле $\mathbf{E}_0$ пузырь вытянется вдоль $\mathbf{E}_0$ в сфероид вращения с квадратом эксцентриситета e^2. При этом изменится и объем пузыря. Будем считать, что в результате вытягивания пузыря в сфероид радиус равновеликого ему пузыря r увеличится в $(1+K)$ раз по сравнению с начальным радиусом r_0, т. е.

$$r = r_0(1+K). \tag{2}$$

Давление газа в соответствии с основным уравнением молекулярно-кинетической теории будет определяться объемом системы и температурой. Считая, что температура жидкости не меняется, учитывая (2), найдем безразмерное давление газа в пузыре μ, воспользовавшись определением изотермического коэффициента сжимаемости χ [6]:

$$\mu = \mu_0 - \frac{1}{(\chi P_{at})}\Big((1+K)^3 - 1\Big). \tag{3}$$

Уравнение (3) при соответствующем выборе χ описывает газ или жидкость. Для газа $\chi P_{at} \approx 1$, для жидкостей $\chi P_{at} \approx 10^{-4}$.

Несмотря на то что пузырь меняет форму и объем, на его стенках должно выполняться условие баланса давлений в каждой точке, в частности в точке полюса и на линии экватора пузыря [4,6].

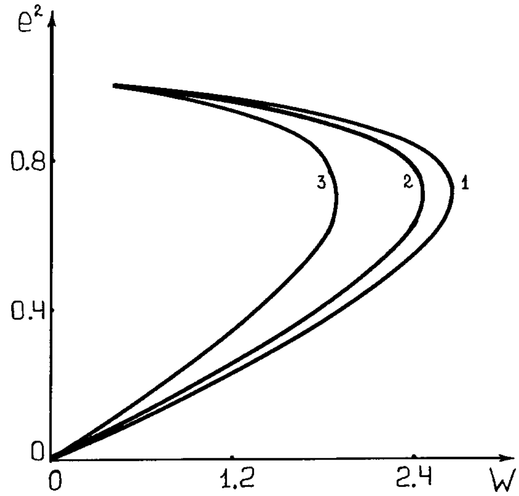

Рис. 1. Зависимости квадрата эксцентриситета e^2 от параметра Тейлора W при безразмерном начальном давлении в пузыре $\mu_0 = 2$ для различных ситуаций: *1* — капли $\chi P_{at} = 10^{-4}$; *2* и *3* — газового пузыря соответственно $\chi P_{at} = 1$ и $\chi P_{at} = 4$.

Запишем выражения для лапласовского давления на экваторе P_σ^{eq} и полюсе P_σ^p сфероидального пузыря, изменившего свой объем согласно (2) [4,7]:

$$P_\sigma^{eq} = \frac{\sigma(1-e^2)^{5/6}}{r_0(1+K)}\left(1+\frac{1}{(1-e^2)}\right), \quad P_\sigma^p = \frac{2\sigma}{r_0(1+K)(1-e^2)^{2/3}}. \quad (4)$$

Электрическое давление на экваторе P_E^{eq} и полюсе P_E^p сфероидального пузыря с проводящими стенками можно записать в виде [6]:

$$P_E^{eq} = 0, \qquad P_E^p = \frac{\varepsilon E_0^2 e^6}{8\pi(1-e^2)^2(\operatorname{arth} e - e)^2}. \quad (5)$$

Используя выражения (1), (3)–(5), легко выписать два уравнения, выражающие собой условия баланса давлений на экваторе и полюсе сфероидального пузыря. Решая совместно эти уравнения, получаем систему уравнений, из который можно определить зависимости квадрата

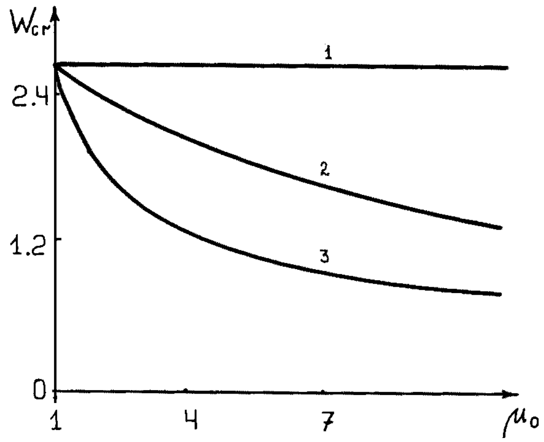

Рис. 2. Зависимости критического значения параметра Тейлора W_{cr} от безразмерного начального давления в пузыре μ_0 для: *1* — капли $\chi P_{at} = 10^{-4}$; *2* и *3* — газового пузыря соответственно $\chi P_{at} = 1$ и $\chi P_{at} = 4$.

эксцентриситета пузыря e^2 и величины K от параметра Тейлора для пузыря $W = (\varepsilon E_0^2 r_0)/\sigma$:

$$\frac{We^6}{16\pi(1-e^2)^2\big(\operatorname{arth}(e)-e\big)^2} = \frac{1}{(1+K)}\left\{\frac{1}{(1-e^2)^{2/3}} - \frac{(1-e^2)^{5/6}}{2}\left[1+\frac{1}{(1-e^2)}\right]\right\}; \tag{6}$$

$$\left[\mu_0 - 1 + \frac{1}{\chi P_{at}}\right](1+K) - \frac{(1+K)^4}{\chi P_{at}} - \frac{(\mu_0-1)(1-e^2)^{5/6}}{2}\left[1+\frac{1}{(1-e^2)}\right] = 0. \tag{7}$$

Расчеты по уравнениям (6), (7) показывают, что производная $\partial e^2/\partial W$ при некотором значении W становится бесконечной (рис. 1). Как отмечено в [4,7], когда пузырь вытягивается до эксцентриситета, отвечающего максимальному значению параметра Тейлора W_{cr}, он становится неустойчив.

Зависимости W_{cr} от безразмерного начального давления в пузыре μ_0 представлены на рис. 2. Видно, что для капли критическое значение параметра Тейлора не зависит от начального давления в капле. Полученное значение $W_{cr} = 2.64$ хорошо согласуется со значением, найденным Тейлором, $W_{cr} = 2.63$ [7]. Из рис. 2 также видно, что увеличение сжимаемости при переходе к газу приводит к уменьшению W_{cr}. Для выяснения этого обстоятельства сравним качественно процессы вытягивания жидкой капли и пузыря.

Предположим, что напряженность электрического поля, в котором находится пузырь (капля), увеличилась на величину $\Delta\mathbf{E}_0$. Это приводит к увеличению давления электрического поля на стенки проводящего пузыря (капли) на величину $\Delta P_E \sim (\varepsilon\mathbf{E}_0\Delta\mathbf{E}_0)/(4\pi)$. Но для равновесного пузыря (капли) это увеличение должно привести к уменьшению внутреннего давления газа в пузыре или жидкости капли на величину $\Delta P_g \sim -(\varepsilon\mathbf{E}_0\Delta\mathbf{E}_0)/(4\pi)$. Уменьшение внутреннего давления в пузыре (капле) связано с относительным увеличением объема пузыря (капли) на величину

$$\frac{\Delta V}{V_0} \sim \chi\,\frac{\varepsilon\mathbf{E}_0\Delta\mathbf{E}_0}{4\pi}. \tag{8}$$

Из (8) видно, что относительное увеличение объема жидкой капли примерно на четыре порядка меньше, чем для газового пузыря, в силу различных величин χ для жидкости и газа, т. е. пузырь расширяется существенно. При этом лапласовское давление уменьшается на величину $\Delta P_\sigma \sim -\left[\sigma/(V_0)^{1/3}\right]\,(\Delta V/V_0)$. Таким образом, при увеличении электрического давления внутреннее давление жидкости капли или газа в пузыре уменьшается из-за увеличения объема (для капли бесконечно малого). Но лапласовское давление из-за увеличения объема уменьшается только для газового пузыря. Именно это обстоятельство и приводит к уменьшению критического значения параметра Тейлора W_{cr} для газового пузыря по сравнению с каплей.

Список литературы

[1] *Глазков В.В., Синкевич О.А., Смирнов П.В.* // ТВТ. 1991. Т. 29. В. 6. С. 1095–1102.

[2] *Sherwood J.D.* // J. Fluid Mech. 1988. V. 188. P. 133–146.

[3] *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н.* // ПЖТФ. 1997. Т. 23. В. 19. С. 60–65.

[4] *Garton C.G., Krasucki Z.* // Tranc. Faraday Soc. 1964. V. 60. P. 211–226.
[5] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1994. В. 2. С. 3–22.
[6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 568 с.
[7] *Taylor F.R.S.* // Proc. Roy. Soc. A. 1964. V. 280. P. 383–397.