

01;04

Аналитическая модель вольт-амперной характеристики малого зонда в магнитном поле

© В.А. Рожанский, А.А. Ушаков

Санкт-Петербургский государственный технический университет

Поступило в Редакцию 15 мая 1998 г.

Предложена аналитическая модель малого стеночного зонда (с размерами поперек магнитного поля, меньшими, чем ларморовский радиус ионов) в полностью ионизованной плазме. Описана структура областей сбора тока. Получено аналитическое выражение для вольт-амперной характеристики зонда. Показано, что модель с классическим коэффициентом диффузии дает результаты, близкие к экспериментальным.

1. Введение

Электростатические зонды широко используются для определения параметров плазмы в установках для термоядерного синтеза. Тем не менее теория зонда в магнитном поле все еще далека от завершения. Несмотря на многочисленные теоретические и экспериментальные работы, все еще не получены ответы на такие вопросы, как отсутствие насыщения ионной и электронной ветвей ВАХ, линейный характер зависимости тока от напряжения на переходном участке характеристики зонда и относительно небольшое по сравнению с $(m_i/m_e)^{1/2}$ отношение величин электронного и ионного токов насыщения. В настоящей работе представлена аналитическая модель, описывающая электронную ветвь

ВАХ малого зонда в полностью ионизованной плазме в магнитном поле. Поперечный размер зонда предполагается малым по сравнению с ларморовским радиусом ионов ρ_{ci} (обратный случай большого зонда рассмотрен в [1]), но большим, чем ларморовский радиус электронов ρ_{ce} . Показано, что величина электронного тока насыщения дается формулой Бома с классическим коэффициентом поперечной диффузии. Результаты расчетов по предложенной в работе аналитической формуле для переходного участка ВАХ находятся в соответствии с результатами численного моделирования, выполненного Санмартином [2]. Отсутствие насыщения тока электронной ветви, наблюдаемое в экспериментах, объясняется ростом толщины слоя пространственного заряда около зонда. Показания аналитической модели находятся в разумном согласии с данными экспериментов, полученными на токамаке TdeV [3].

2. Модель

Рассмотрим однородную плазму с плотностью n_0 и температурой $T_e = T_i = T$ в магнитном поле B . Сначала для простоты рассмотрим цилиндрически-симметричный случай, когда магнитное поле перпендикулярно круглому стеночному зонду радиуса a (рис. 1). (Случай наклонного магнитного поля будет аналогичным образом рассмотрен далее). К зонду относительно окружающей его стенки приложено положительное напряжение. Потенциал стенки принимается равным нулю, а потенциал зонда будем обозначать φ_p .

В случае, когда плазма полностью ионизована, можно применить подход, сходный с используемым для слабоионизованной плазмы [4] (см. также [2]). Похожие идеи обсуждаются и в [5]. Когда зонд заряжен положительно, он собирает электроны, и плотность плазмы понижена в эллипсоидальной зоне с характерными размерами a и $l_{||}$ поперек и вдоль магнитного поля соответственно. Поскольку радиус зонда a меньше ларморовского радиуса ионов, они могут двигаться свободно поперек магнитного поля гораздо быстрее, чем электроны. Таким образом, ионы в электронном эллипсоиде должны быть заперты, т.е. электрическое поле должно быть скомпенсировано градиентом ионного давления, и для ионов устанавливается распределение Больцмана

$$\varphi = -\frac{T_i}{e} \ln \frac{n}{n_0} + \varphi_f, \quad (1)$$

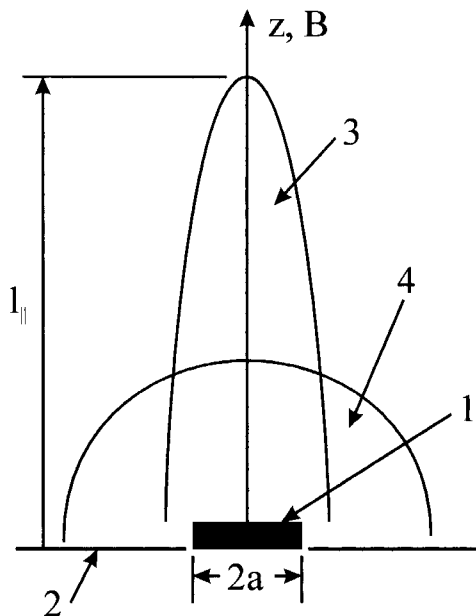


Рис. 1. Структура областей сбора электронного и ионного токов: 1 — зонд, 2 — стенка, 3 — область сбора электронов, 4 — область сбора ионов.

где φ_f — потенциал плазмы. Плотность электронного потока $\Gamma_e = nu_e$ может быть получена из уравнения баланса сил

$$-\nabla p_e + en\nabla\varphi - en[\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}] + \mathbf{R}_{ei} = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{R}_{ei} — сила трения электронов об ионы:

$$\mathbf{R}_{ei} = -knm_e\nu_{ei}(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i). \quad (3)$$

Численный коэффициент принимает значения $k = 0.51$ и $k = 1.0$ вдоль и поперек магнитного поля соответственно. Из (1)–(3) получаем выражения для плотности продольного $\Gamma_{e\parallel}$ и поперечного $\Gamma_{e\perp}$ потоков электронов:

$$\Gamma_{e\parallel} = \Gamma_{i\parallel} - D_{e\parallel}^* \frac{\partial n}{\partial z}, \quad \Gamma_{e\perp} = -D_{e\perp} \nabla_{\perp} n, \quad (4)$$

где $D_{e\parallel}^* = (T_e + T_i)/(0.51m_e v_{ei})$ — эффективный продольный коэффициент диффузии электронов, $D_{e\perp} = (T_e + T_i)v_{ei}/(m_e\omega_{ce}^2)$ — классический поперечный коэффициент диффузии электронов, ω_{ce} — электронная циклотронная частота. Эффективный продольный коэффициент диффузии электронов обратно пропорционален плотности плазмы n , в то время как поперечный коэффициент диффузии прямо пропорционален n . Подставляя (4) в уравнение неразрывности для электронов, $\nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_e = 0$, получаем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D_{e\perp} \frac{\partial n}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{e\parallel}^* \frac{\partial n}{\partial z} - \Gamma_{i\parallel} \right) = 0. \quad (5)$$

Пренебрегая дивергенцией продольного ионного потока, что допустимо вне зоны сбора ионов на расстояниях от зонда, больших чем ρ_{ci} , получаем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{n}{n_0} \frac{\partial n}{\partial r} \right) + \frac{\omega_{ce}^2}{0.51v_{ei}^2(n_0)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{n_0}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \right) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) сходно с уравнением, которое решено численно в [2]. Из (6) следует выражение для характерного продольного размера электронного эллипсоида

$$l_{\parallel} = a(\omega_{ce}/v_{ei}). \quad (7)$$

Если электронный ток на зонд меньше, чем электронный ток насыщения, продольный профиль потенциала в плазме должен быть немонотонным (рис. 2). Этот эффект известен под названием "overlap" [2,4]. В основной части электронного эллипсоида профиль потенциала соответствует распределению Больцмана для ионов (1). Потенциал в этой области возрастает от потенциала плазмы φ_f на бесконечности до своего максимального значения φ^* . Последнее связано со значением плотности плазмы n^* в той же точке

$$\varphi^* = -(T_i/e) \ln(n^*/n_0) + \varphi_f. \quad (8)$$

С другой стороны, вблизи зонда должна существовать область, где электроны заперты, так как их поток должен быть меньше теплового. Следовательно, в этой области профиль потенциала должен соответствовать распределению Больцмана для электронов и, следовательно,

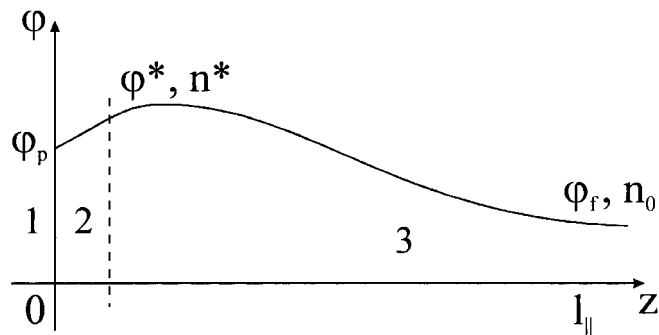


Рис. 2. Распределение потенциала вдоль магнитного поля: 1 — зонд, 2 — слой пространственного заряда, 3 — область сбора электронов.

уменьшаться по мере приближения к зонду. Электронный поток на зонд может быть выражен через разность потенциалов $\varphi^* - \varphi_p$

$$\Gamma_{e\parallel} = n^* \sqrt{\frac{T_e}{2\pi m_e}} \exp\left(-\frac{e(\varphi^* - \varphi_p)}{T_e}\right). \quad (9)$$

Далее, подставляя максимальное значение потенциала φ^* (8) в (9), получим

$$-\frac{T_i}{e} \ln\left(\frac{n^*}{n_0}\right) - \frac{T_e}{e} \ln\left(\frac{n^*}{\Gamma_{e\parallel}} \sqrt{\frac{T_e}{2\pi m_e}}\right) = \varphi_p - \varphi_f. \quad (10)$$

Большая часть электронного тока на зонд I_e собирается вдали от зонда, там где возмущение плотности плазмы мало. Таким образом, нелинейное уравнение (6) можно заменить соответствующим линейным (уравнение Лапласа)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right) + \frac{D_{e\parallel}^*(n_0)}{D_{e\perp}(n_0)} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} = 0. \quad (11)$$

Задачу можно решить аналитически, если наложить граничное условие $n = n^*$ на поверхности зонда (пренебрегая, таким образом, продольным размером ионного эллипсоида по сравнению с продольным размером электронного). В рассматриваемом линеаризованном случае электронный ток I_e должен быть линейной функцией плотности плазмы на

границе слоя n^*

$$\frac{n^*}{n_0} = 1 - \frac{I_e - I_i(n^*)}{I_e^{sat}}. \quad (12)$$

Мы полагаем, что ионный ток на положительно заряженный зонд соответствует Бомовскому с концентрацией плазмы n^* : $I_i = en^*c_s S_{probe} = I_i^0 n^*/n_0$, где $c_s = ((T_e + T_i)/m_i)^{1/2}$ — ионная звуковая скорость, S_{probe} — проективная площадь зонда вдоль магнитного поля. Электронный ток на зонд $I_e = e\Gamma_{e\parallel} S_{probe}$. Электронный ток насыщения I_e^{sat} вычисляется на основе решения уравнения Лапласа (11) с нулевыми граничными условиями на поверхности зонда, аналогично случаю слабоионизованной плазмы [6]:

$$I_e^{sat} = k2\pi en_0 \sqrt{D_{e\parallel}^* D_{e\perp}} C = k2.8\pi en_0 \rho_{ci} c_s C, \quad \rho_{ci} = c_s/\omega_{ci}. \quad (13)$$

Нелинейность исходного уравнения (6) учитывается введением коэффициента k порядка единицы. Функция C — геометрический фактор, определяемый размерами и формой зонда, и соответствует емкости проводника, той же формы, что и зонд, но с продольным размером в $(D_{e\parallel}^*/D_{e\perp})^{1/2}$ раз короче. Для наиболее интересных случаев величина C может быть получена аналитически. Для зонда в форме диска с радиусом a коэффициент $C = 2a/\pi$. В случае, когда магнитное поле образует угол α со стенкой, сбор тока определяется проекцией зонда вдоль магнитного поля. Для зонда в форме диска эта проекция есть эллипс с полуосями a и $b = a \sin \alpha$. Соответствующее значение C есть

$$C = \frac{a}{K(\sqrt{1 - b^2/a^2})}, \quad K(\xi) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (14)$$

Выражение для переходного участка ВАХ получается подстановкой (12) в (10)

$$\left(1 - \frac{I_e}{I_e^{sat}}\right)^2 \frac{en_0 S_{probe}}{I_e} \sqrt{\frac{T}{2\pi m_e}} = \left(1 - \frac{I_i^0}{I_e^{sat}}\right)^2 \exp\left(\frac{e(\varphi_f - \varphi_p)}{T}\right). \quad (15)$$

На рис. 3 зондовые характеристики, полученные из (15), сравниваются с численным решением нелинейной задачи [2] для случая $a = b$. (Поскольку в [2] рассматривается изолированный зонд, а не стеночный,

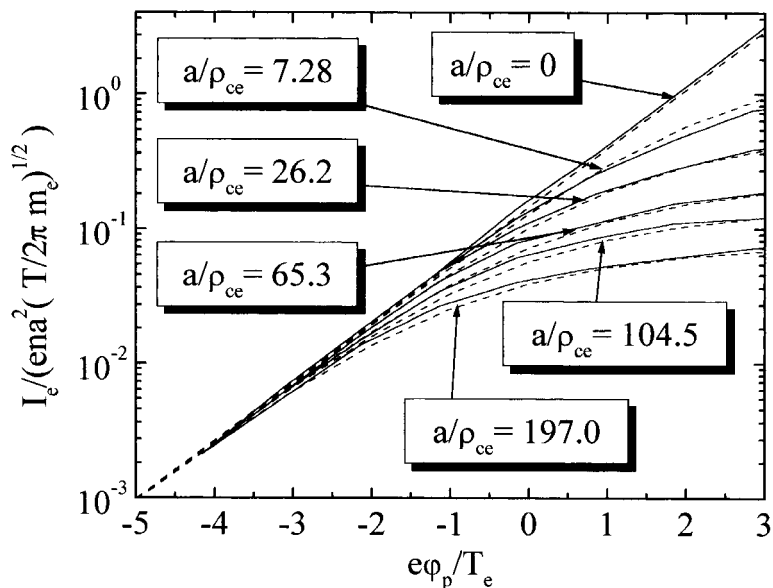


Рис. 3. Зависимости электронного тока на зонд I_e от приложенного потенциала φ_p ($\varphi_p = 0$, когда потенциал зонда равен потенциалу стенки) для различных величин магнитного поля. Сравнение результатов численного моделирования, выполненного Санмартинем [2] (штриховые линии), и полученных из аналитического решения предлагаемой модели (15) (непрерывные линии).

величину тока насыщения I_e^{sat} , (13), следует удвоить). Показано, что хорошее совпадение достигается при численном коэффициенте $k = 0.7$ в широком диапазоне величин магнитного поля.

Для случая магнитного поля, почти параллельного стенке ($\alpha \ll 1$), выражение (13) может быть упрощено ($k = 0.7$)

$$I_e^{sat} = 2\pi en_0 \rho_{ci} c_s \frac{a}{K(\sqrt{1 - b^2/a^2})} \approx en_0 \rho_{ci} c_s \frac{2\pi a}{\ln(4\sqrt{2}/\sin \alpha)}. \quad (16)$$

На рис. 4 представлены электронная ветвь ВАХ, вычисленная на основе уравнений (15, 16), и экспериментальная зондовая характеристика, полученная на токамаке TdeV [3]. В этом эксперименте $B = 1.4$ Т,

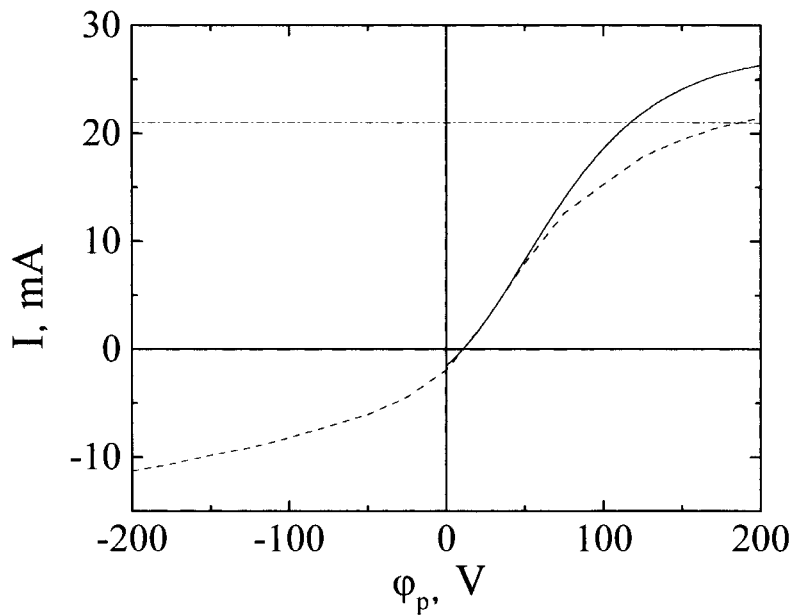


Рис. 4. Сравнение экспериментальной зондовой характеристики, полученной на токамаке TdeV (штриховая линия), с результатами аналитического решения предлагаемой модели (15), (16) (непрерывная линия). Штрихпунктирная линия соответствует максимально возможному электронному току I_e^{lim} .

$\alpha = 3^\circ$, $a = 0.95$ mm, температура, вычисленная по экспоненциальному участку, $T^{stand} = 27$ eV, плотность плазмы, полученная из ионного тока насыщения, $n^{stand} = 3.6 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$. Сплошная линия на рис. 4 получена из уравнения (15), где температура подобрана таким образом, чтобы экспериментальная и теоретическая кривые совпадали в большей части переходного участка. Плотность плазмы для полученной таким образом температуры снова вычислялась по ионному току насыщения. Согласно нашему методу, получается $T = 24$ eV, $n = 4.0 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$. Соответствующая величина электронного тока насыщения $I_e^{sat} = 27$ mA.

Представленная простая модель может быть уточнена принятием во внимание следующих факторов.

1. Для потенциалов зонда, существенно больших, чем потенциал плазмы, электроны в слое уже не могут быть заперты. Таким образом, (9) не справедливо и должно быть заменено условием равенства электронного потока тепловому. Следовательно, выражение (15) для электронной ветви ВАХ верно лишь для величин тока, меньших $I_e^{lim} = I_e^{sat} / (1 + (I_e^{sat} - I_i^0) / I_e^T) < I_e^{sat}$ ($I_e^T = S_{probe} e n_0 \sqrt{T_e / 2\pi m_e}$). Для больших приложенных потенциалов электронный ток I_e просто равен I_e^{lim} . Для параметров плазмы и зонда, при которых I_e^{lim} оказывается существенно меньше, чем I_e^{sat} , за счет рассмотренного эффекта соответствующим образом уменьшается и электронный ток насыщения. Величина максимально возможного электронного тока I_e^{lim} также приведена на рис. 4 (штрихпунктирная линия).

2. Для больших положительных потенциалов зонда толщина слоя пространственного заряда d зависит от перепада потенциала в слое, $d \sim r_d (e\varphi_p / T)^{3/4}$. Эффективная собирающая площадь зонда соответственно увеличивается. (Для случая $\alpha \ll 1$, например, для больших потенциалов зонда следует для малой полуоси эллипса взять d вместо b). Этот эффект приводит к отсутствию насыщения электронного тока I_e^{sat} и I_e^{lim} .

3. Выводы

Предложена аналитическая модель стеночного зонда, с размерами поперек магнитного поля меньшими, чем ларморовский радиус ионов. Показано, что модель с классическим коэффициентом диффузии дает результаты, близкие к экспериментальным.

Авторы благодарят за поддержку РФФИ (грант 96-02-16919-а), С.-Петербургский государственный университет (грант 97-0-5.3-17), Министерство науки и технологии Российской Федерации (подпрограмма "УТС и плазменные процессы", грант 377).

Список литературы

- [1] *Rozhansky V., Ushakov A., Voskoboynikov S.* // *Contrib. Plasma Physics.* 1996. V. 36. P. 391.
- [2] *Sanmartin J.R.* // *Physics of Fluids.* 1970. V. 13. P. 103.
- [3] *Gunn J.P., Boucher C., Stansfield B.L., Mac Latchy C.S.* // *Contrib. Plasma Physics.* 1996. V. 36. P. 45.
- [4] *Rozhansky V.A., Tsendin L.D.* // *Soviet Physics–Technical Physics.* 1978. V. 23. P. 932.
- [5] *Stangeby P.C.* // *J. Phys. D: Appl. Physics.* 1982. V. 15. P. 1007.
- [6] *Bohm D.* // *The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields* / Ed. by A. Guthrie, R. Wakerling, N. Y.: McGraw-Hill, 1949. Chapt 1, 2, 9.