*01*

# Критические возмущения в моностабильной активной среде

© *А.А. Пухов*

Объединенный институт высоких температур. Научно-исследовательский центр прикладных проблем электродинамики РАН, Москва

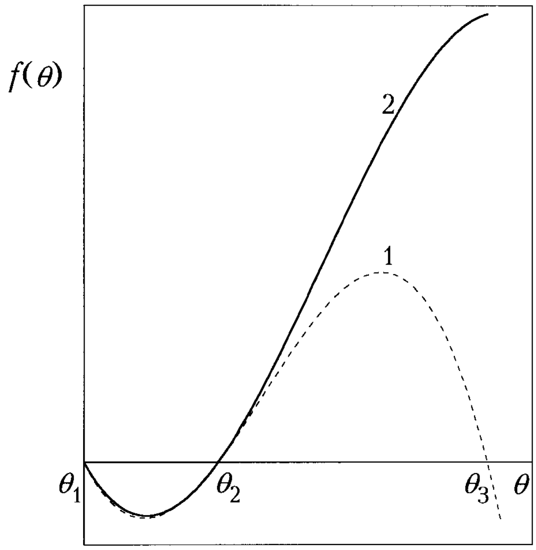
*Поступило в Редакцию 19 мая 1998 г.*

Рассмотрены критические возмущения, инициирующие развитие неустойчивости в моностабильной активной среде, описываемой уравнением типа "реакция–диффузия". Теоретико-групповой анализ задачи позволяет получить аналитическое выражение для энергии критических возмущений. Полученные результаты могут быть существенны при анализе устойчивости по отношению к внешним возмущениям широкого класса активных сред.

Инициация развития неустойчивости в сильнонеравновесных физических системах (активных средах) внешними возмущениями имеет пороговый характер [1]. Возмущения с достаточно большой энергией $e > e_c$ возбуждают развитие неустойчивости в среде, а величина критической энергии $e_c$ зависит от пространственной и временно́й протяженности возмущения [2]. Наиболее "опасными" для активных сред являются локальные и импульсные возмущения, обладающие минимальной критической энергией [3]. Действие локального импульсного критического возмущения в целом ряде активных сред описывается нелинейным уравнением типа "реакция–диффузия"

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \Delta\theta + f(\theta) + e_c\delta^D(r)\delta(t), \tag{1}$$

где $\Delta = r^{-(D-1)}(\partial/\partial r)r^{D-1}(\partial/\partial r)$ — радиальная часть лапласиана, $r$ и $t$ — безразмерные координата и время, $D = 1, 2, 3$ — пространственная размерность задачи, $\delta^D(r) = (k_d r^{D-1})^{-1}\delta(r)$, $k_D$ — геометрический фактор ($k_1 = 1$, $k_2 = 2\pi$, $k_3 = 4\pi$), $\delta(r)$ — дельта-функция, а $\theta$ в зависимости от характера диссипативного процесса может представлять собой температуру среды, концентрацию реагентов, электрическое поле и т.д. (см. [1] и цитируемую там литературу). Ниже для определенности




Характерная зависимость нелинейной функции источника $f(\theta)$ от $\theta$ в бистабильном (кривая *1*) и моностабильном (кривая *2*) случаях.

под величиной $\theta$ будем подразумевать температуру. Величина критической энергии $e_c$ и характер нелинейной стадии развития неустойчивости в таких системах полностью определяются видом функции источника $f(\theta)$. Например, для бистабильных систем (см. рисунок, кривая *1*) возмущение с $e > e_c$ может разрушить устойчивое состояние среды $\theta = \theta_1$ и перевести ее в метастабильное состояние $\theta = \theta_3$ [2]. Способы приближенного вычисления $e_c$ и ее зависимость от параметров задачи в этом случае к настоящему времени достаточно подробно изучены [2,3].

Однако в целом ряде ситуаций бистабильность утрачивается системой (сильная зависимость диссипации от температуры, резкое возрастание дифференциальной проводимости и т. д. [1,2]). Качественный вид зависимости $f(\theta)$ в этом случае приведен на рисунке (кривая *2*). В достаточно общем виде нелинейную функцию источника $f(\theta)$ при этом можно предствить как [4]

$$f(\theta) = a\theta^m(\theta^n - b), \tag{2}$$

где $m$, $n$, $a$, $b$ — произвольные положительные величины, $b = \theta_2^n$. Такая среда является моностабильной (одно устойчивое состояние $\theta = \theta_1 = 0$) и при превышении температурой $\theta$ в достаточно большой области среды порогового значения $\theta_2$ происходит ее неограниченный саморазогрев. Это обстоятельство является причиной особого характера нелинейной стадии развития неустойчивости в моностабильной среде [5]. Для нахождения величины $e_c$ в этом случае можно воспользоваться теоретико-групповыми соображениями [6,7]. Будем считать, что степени $m$ и $n$ фиксированы, а $a$ и $b$ являются управляющими параметрами задачи. Тогда уравнения (1), (2) инвариантны относительно группы преобразования переменных вида

$$\begin{aligned} t &= L^{2p}t', \\ r &= L^{p}r', \\ \theta &= L^{q}\theta', \\ e_c &= L^{q+Dp}e_c', \\ a &= L^{(1-m-n)q-2p}a', \\ b &= L^{nq}b', \end{aligned} \tag{3}$$

представляющих собой группу растяжений с масштабным фактором $L$. Степени масштабных факторов растяжения определяются условием инвариантности (1), (2) относительно преобразования (3) так, что новые (штрихованные) переменные удовлетворяют тем же уравнениям (1), (2). Это приводит к тому, что группа преобразований (3) содержит свободные параметры $L$, $p$ и $q$, которые могут принимать произвольные значения.

Из физических соображений ясно, что величина критической энергии $e_c$ в (1), (2) является функцией только $a$ и $b$: $e_c = F(a, b)$. Это соотношение должно быть инвариантно относительно группового преобразования (3), т.е. $e_c' = F(d', b')$ [8]. Будем искать решение в виде $e_c \propto a^r b^s$ [9], где степени $r$ и $s$ подлежат определению. Тогда

$$e_c/a^r b^s = L^{p(2r+D)+q[(m+n-1)r+1-ns]}e_c'/a'^r b'^s \tag{4}$$

и из условия инвариантности $e_c/a^r b^s = e_c'/a'^r b'^s$ получаем $p(2r + D) + q[1 + (m + n - 1)r - ns] = 0$. В силу произвольности $p$

и $q$ в (3) получаем однозначные выражения для степеней: $r = -D/2$, $s = [1 - D(m + n - 1)/2]/n$. Итак, для критической энергии $e_c$ имеем:

$$e_c \propto a^{-D/2} b^{[1-D(m+n-1)/2]/n}. \tag{5}$$

Коэффициент пропорциональности порядка единицы в (5) не может быть получен с помощью групповых соображений. Для его определения необходимы либо численные расчеты [4], либо привлечение дополнительных соображений [9,10]. Таким образом, теоретико-групповой анализ уравнений (1), (2) позволяет получить функциональную зависимость $e_c$ от управляющих параметров при любой размерности задачи.

Из (5) следует, что с ростом пороговой температуры $\theta_2 = b^{1/n}$ устойчивость моностабильной среды по отношению к внешним возмущениям возрастает — при не слишком больших значениях $m$, $n$ критическая энергия $e_c$ растет степенным образом. Обсудим это условие подробнее. Рассмотренный выше метод вычисления критической энергии $e_c$ применим и для активных сред с сильной зависимостью теплоемкости и теплопроводности от температуры, описываемых уравнением

$$\theta^k \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla(\theta^l \nabla \theta) + f(\theta) + e_c \delta^D(r)\delta(t). \tag{6}$$

Здесь $\nabla(\theta^l \nabla \theta) = r^{-(D-1)}(\partial/\partial r) r^{D-1} \theta^l (\partial\theta/\partial r)$. Применяя описанную выше процедуру к уравнениям (2), (6), для критической энергии $e_c$ получаем

$$e_c \propto a^{-D/2} b^{[k+1-D(m+n-l-1)/2]/n}. \tag{7}$$

Для таких сред характерно наличие так называемых "режимов с обострением" [11]. В частности, при условии

$$m + n - k > 1 \tag{8}$$

происходит "тепловой взрыв": температура достаточно большой, однородно прогретой области среды (диффузия тепла от границ мала по сравнению с диссипацией внутри области) обращается в бесконечность за конечное время [11]. Из (7) видно, что в этом случае существенным образом меняется зависимость критической энергии $e_c$ от пороговой температуры $\theta_2 = b^{1/n}$. Так, при

$$m + n - k > 1 + 2/D + l + k(2/D - 1) \tag{9}$$

величина $e_c$ убывает степенным образом с ростом $\theta_2$, т.е. стабильность среды снижается с ростом пороговой температуры. Отметим, что условие (9) может быть более "жестким", чем условие (8). Физический смысл поправки в (9) связан с локальностью разогрева среды внешним возмущением. Энергия возмущения расходуется не только на разогрев и расширение области "горячей" фазы ($\theta \gtrsim \theta_2$), но и на диффузию тепла от ее границ. Быстрый рост теплоемкости ($\sim \theta^k$) и теплопроводности ($\sim \theta^l$) затрудняют процесс образования в среде области "горячей" фазы, достаточной для инициации развития неустойчивости.

Автор признателен Н.А. Бузникову за полезные обсуждения полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке ГНТП "Актуальные направления в физике конденсированных сред" (проект № 96083) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 96–02–18949 и № 98–02–16046).

## Список литературы

[1] *Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г.* Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987. 240 с.
[2] *Гуревич А.Вл., Минц Р.Г.* Тепловые автоволны в нормальных металлах и сверхпроводниках. М.: ИВТАН, 1987. 168 с.
[3] *Гуревич А.Вл., Минц Р.Г., Пухов А.А.* // ДАН. 1988. Т. 301. № 5. С. 1104–1107.
[4] *Петровский С.В.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. № 8. С. 1–6.
[5] *Пухов А.А.* // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24 (принято к публикации, рег. № 5).
[6] *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
[7] *Bluman G.W., Kumei S.* Symmetries and Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1989. 412 p.
[8] *Dresner L.* Similarity Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations. London: Pitman books Ltd., 1983. 60 p.
[9] *Dresner L.* // IEEE Trans. Magn. 1985. V. 21. N 2. P. 392–395.
[10] *Buznikov N.A., Pukhov A.A.* // Cryogenics. 1996. V. 36. N 7. P. 547–553.
[11] *Самарский А., А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 477 с.