01;03

Об инкременте неустойчивости незаряженной капли в однородном электростатическом поле

© А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Поступило в Редакцию 29 июня 1998 г.

Дается истолкование эффекту более быстрого нарастания со временем сфероидальной деформации капли, неустойчивой по отношению к индуцированному заряду, чем по экспоненциальному закону.

В силу нелинейности процесса роста амплитуды возмущения формы капли, неустойчивой по отношению к однородному электростатическому полю критической величины, временнáя эволюция амплитуды сфероидального осесимметричного возмущения ее формы происходит существенно быстрее, чем по экспоненциальному закону.

С явлением неустойчивости незаряженной капли электропроводной жидкости в однородном электростатическом поле **E**, проявляющемся в быстром увеличении со временем амплитуды ее сфероидальной деформации с последующим сбросом с вершин избыточного поляризационного заряда в виде серии высокодисперсных сильно заряженных капелек, приходится сталкиваться в связи с разнообразными приложениями в физике, геофизике, научном приборостроении, технике и химической технологии (см., например, [1–3] и указанную там литературу). Тем не менее некоторые аспекты реализации такой неустойчивости остаются малоизученными, что касается и вопроса о скорости нарастания со временем сфероидальной деформации неустойчивой капли. Теоретическое исследование этого вопроса представляет интерес и потому, что в экспериментальных работах [4,5] найдено, что скорость нарастания сфероидальной деформации неустойчивой капли более сильна, чем экспоненциальная.

1. Согласно [6,7], спектр капиллярных колебаний изолированной капли радиусом R проводящей идеальной жидкости, в однородном электростатическом поле **E** и с коэффициентом поверхностного натяжения

σ дается выражением:

$$\omega_n^2 = -\frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2)\left[1 - WA(n)\right], \qquad W = E^2 R \sigma^{-1}, \qquad (1)$$

где n — номер моды капиллярных колебаний, ρ — плотность жидкости, коэффициент $A(n)$ определяется номером моды n и используемой системой физических единиц. В гауссовой системе единиц для основной моды ($n = 2$), отвечающей за сфероидальную деформацию, $A_2^{-1} = 2.59$. Из соотношения (1) видно, что при $W > A_2^{-1}$ капля становится неустойчивой и амплитуда основной моды ζ ее капиллярных колебаний в рамках применимости линейного анализа начинает расти со временем по закону $\zeta \sim \exp(\chi t)$, где

$$\chi = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho R^3}\left[1 - W(e^2)A_2\right]} \qquad (2)$$

— инкремент неустойчивости.

Но и при $W = A_2^{-1}$ капля уже неустойчива по отношению к бесконечно малым виртуальным деформациям ее поверхности вида $\zeta = \zeta_0 P_2(\cos\theta)$. Возбуждение подобной деформации может иметь причиной хотя бы тепловое движение молекул жидкости.

2. Пусть величина поля E соответствует критическому значению параметра W. Исходная равновесная в E форма капли является сфероидальной с эксцентриситетом e_0. При реализации неустойчивости капля теряет равновесие и величина ее эксцентриситета начинает нарастать со временем. Все начинается с бесконечно малого теплового возмущения основной моды вида $\zeta = \zeta_0 P_2(\cos\theta)$. Амплитуда теплового возмущения формы капли ζ_0 определяется выражением $\zeta_0 = (\sigma/kT)^{-1/2}$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура жидкости. Для принятого вида возмущения большая и меньшая полуоси сфероида определятся соотношениями: $a = R + \zeta_0$ и $b = R - \frac{1}{2}\zeta_0$, так как $P_2(0) = 1$, а $P_2(\pi/2) = -1/2$.

Связь квадрата эксцентриситета получающегося сфероида e^2 с амплитудой малого возмущения ζ_0 с точностью до малых первого порядка по отношению ζ_0/R определится соотношением

$$e^2 = 1 - \frac{(b_0 - 0.5\zeta_0)^2}{(a_0 + \zeta_0)^2} \approx e_0^2 + \frac{3\zeta_0}{R}\left(1 - \frac{7}{6}e_0^2\right). \qquad (3)$$

3. Итак, тепловое возбуждение в сфероидальной капле основной моды соответствует виртуальному увеличению эсцентриситета сфероида от e_0 до e, определяемого (3). Но для сфероида критическое для реализации неустойчивости капли по отношению к поляризационному заряду значение параметра W является убывающей функцией квадрата эксцентриситета [6,7]. В линейном по квадрату эксцентриситета e^2 приближении эту функцию можно представить в виде [6,7]:

$$WA_2 = \left[1 - \alpha e^2\right]. \tag{4}$$

Значение $W \cdot A_2 = 1$ при $e^2 > e_0^2$ для сфероида будет уже закритическим и при $\zeta_0/R \ll 1$, согласно классическим представлениям, амплитуда возмущения начнет расти со временем по экспоненциальному закону с инкрементом χ, определяющимся (2). В выражение (2) для χ подставим (4) и получим

$$\chi = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho R^3}\alpha e^2}. \tag{5}$$

Это означает, что амплитуда ζ возмущения сфероидальной формы капли будет расти со временем по закону

$$\zeta = \zeta_0 e^{\chi t} = \zeta_0 \exp\left(\sqrt{\frac{8\sigma}{\rho R^3}\alpha e^2}\; t\right). \tag{6}$$

Но увеличение амплитуды возмущения соответствует дальнейшему вытягиванию капли, увеличению ее эксцентриситета и снижению, согласно (4), критического для реализации неустойчивости значения параметра W и, следовательно, вызывает увеличение инкремента неустойчивости.

4. Выписывая последовательность растущих возмущений в близкие моменты времени и используя соотношения (2)–(6), можно получить нелинейное интегральное уравнение, описывающее рост амплитуды ζ со временем, как это было проделано в [8] для капли, неустойчивой по отношению к собственному заряду:

$$\zeta(\tau) = \zeta_0 \exp\left\{\int\limits_0^{\tau}\left(\alpha_* \frac{\zeta(\tau)}{\zeta_0}\right)^{1/2} d\tau\right\}. \tag{7}$$

$$\tau = \left(\frac{8\sigma}{\rho R^3}\right)^{1/2} t; \quad \alpha_* = 3\alpha \frac{\zeta_0}{R}\left(1 - \frac{7}{6}e_0^2\right).$$

Решение (7) имеет вид

$$\zeta(\tau) = \zeta_0 (1 - 0.5\alpha_* \tau)^{-2}.$$

Соотношения (7) и (8) с точностью до безразмерных обозначений совпадают с аналогичными соотношениями, описывающими нарастание со временем амплитуды сфероидального возмущения изначально сферической капли, неустойчивой по отношению к собственному заряду [9]. Несложно видеть, что зависимость амплитуды сфероидального возмущения от времени вида (8) более сильная, чем экспоненциальная с инкрементом α_*, [9] и качественно совпадает с полученной экспериментально [5].

Если принять, что величина параметра Тейлора W существенно превышает значение, критическое для начала реализации неустойчивости, т.е. $W \cdot A_2 = 1 + \eta$, где $\eta \geqslant 0$, то выражение для инкремента неустойчивости основной моды будет иметь вид

$$\chi = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho R^3}(\eta + \alpha e^2)},$$

а интегральное уравнение, описывающее временнóе изменение амплитуды неустойчивости основной моды, примет форму

$$\zeta(\tau) = \zeta_0 \exp\left\{\int\limits_0^\tau \left(\eta_* + \alpha_* \frac{\zeta(\tau)}{\zeta_0}\right)^{1/2} d\tau\right\}; \quad \eta_* = \eta + \alpha e_0^2. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) может быть записано в виде

$$\tau \eta_*^{1/2} = \ln\left\{\frac{[(\eta_* + \alpha_* X)^{1/2} - \eta_*^{1/2}][(\eta_* + \alpha_*)^{1/2} + \eta_*^{1/2}]}{[(\eta_* + \alpha_* X)^{1/2} + \eta_*^{1/2}][(\eta_* + \alpha_*)^{1/2} - \eta_*^{1/2}]}\right\};$$

$$X = \zeta(\tau)/\zeta_0.$$

При $\eta_* \gg \alpha_* X$ это соотношение в линейном приближении по $\alpha_* X$ приводится к экспоненциальному виду

$$\zeta(\tau) = \zeta_0 \exp\left(\eta_*^{1/2}\tau\right).$$

То есть в рассматриваемой ситуации временна́я эволюция амплитуды сфероидального возмущения характеризуется инкрементом $\eta_*^{1/2}$, определяющим степенью закритичности параметра Тейлора W.

5. Заключение. При реализации неустойчивости незаряженной капли электропроводной жидкости по отношению к внешнему однородному электростатическому полю вытягивание капли в сфероид происходит в соответствии с различными временны́ми закономерностями в зависимости от условий потери равновесия.

Список литературы

[1] *Taylor G.* // Proc. Roy. Soc. A. 1964. V. 280. P. 383–397.
[2] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1990. V. 23. N 11. P. 1361–1370.
[3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 3–22.
[4] *Inoulett I.I., Kromann R.* // IEEE Trans., Ind. Appl. 1989. V. 25. N 5. P. 945–948.
[5] *Inoulett I.I., Floryan J.M., Haywood R.J.* // IEEE Trans., Ind. Appl. 1992. V. 28. N 5. P. 1203–1209.
[6] *Григорьев А.И., Синкевич О.А.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
[7] *Cheng K.J.* // Phys. Lett. 1985. V. 112 A. N 11. P. 392–396.
[8] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. В. 9. С. 39–45.
[9] *Ширяева С.О., Григорьева И.Д.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. В. 6. С. 1–5.