Физика твердого тела, 1999, том 41, № 1

Структуры и термоэлектрическая конвекция в холестерических жидких кристаллах

© Е.Д. Эйдельман

Химико-фармацевтический институт,
Санкт-Петербург, Россия

(Поступила в Редакцию 3 июля 1998 г.)

Рассмотрены возможности возбуждения структур электромагнитных полей и ячеек конвекции, т. е. структур температуры и скорости, в термотропном холестерическом жидком кристалле при наличии потока. Проведены оценки и обсуждены возможные эксперименты по обнаружению таких структур. В качестве причины возбуждения исследован особый термоэлектрический эффект — влияние изменения шага холестерической спирали молекул, возникающего при нагреве, на электрические характеристики: диэлектрическую проницаемость и коэффициент проводимости такого вещества.

В жидкокристаллических термотропных веществах холестерического типа (холестериках, или ХЖК) в ряде случаев возможно образование (возбуждение) структур, отличных от структур, возникающих в веществах нематического типа [1]. Возникающие структуры скорее похожи на ячейки конвекции, появляющиеся при нагревании в тонких слоях (толщиной $h < 0.1\,\mathrm{mm}$) жидких полупроводников из-за термоэлектрического эффекта [2], ведь в ряде случаев термотропные холестерики обладают высокими коэффициентами термоэдс, проявляя тем самым свойства жидких полупроводников [3].

Причиной различий является наличие вектора, связанного с направлением оси молекул ХЖК. Величина такого вектора $2\pi/q$ определяется обратным шагом спирали q, сильно зависящим от температуры T [4]. Даже при "малых" нагревах $A = |\nabla T|$, таких, что $hA/T \ll 1$, из-за "большого" изменения шага $h|\nabla q|/q \gg 1$ возможно, что

$$\left|\frac{d\ln q}{d\ln T}\right| \frac{hA}{T} \geqslant 10^2 \frac{hA}{T} \geqslant 1. \qquad (1)$$

Сильное изменение шага спирали при нагревании приводит к сильной зависимости характеристик ХЖК (например, диэлектрической проницаемости ε_{ik}, проводимости σ_{ik}, вязкости ν_{ik}, температуропроводности $\varkappa_{ik}$ и др.) от температуры.

Температурная зависимость анизотропных частей электрических характеристик среды (ε_a и σ_a) проявляется как некоторый новый термоэлектрический эффект, возникающий при протекании тока [5]. Влияние этого эффекта на условия возбуждения неустойчивостей при наличии потока (тепла и заряда) будет рассматриваться далее. Наличие анизотропных частей диссипативных величин (ν_a и $\varkappa_a$) влияет на возможность поворотов директора **n** и дает эффекты, присущие всем средам, передающим не только всестороннее сжатие, но и кручение.

Количественную теорию этого явления удобнее строить на примере термотропных нематических жидких кристаллов (см., например, [6]). Далее анизотропия диссипации не учитывается.

1. Влияние электрофоретических сил. Постановка задачи

Из-за наличия температурной зависимости обратного шага спирали $q(T)$ в холестерике появляется сила $E_i E_k \nabla \varepsilon_{ik}$. Электрическое поле E_i состоит из термоэлектрического поля $\gamma \nabla T_0$ (γ — коэффициент термоэдс) и поля малых отклонений $E_1 = -\nabla\varphi$. Перейдем к построению теории возбуждения структур (конвекции) этой силой.

Рассмотрим слой холестерика с осями спиралей молекул (ось x), параллельными его поверхности. (Случай, когда оси молекул (направление директора) перпендикулярны поверхности слоя (ось z), может быть рассмотрен совершенно аналогично). В плоскости слоя компоненты тензора диэлектрической проницаемости могут быть записаны как

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon\delta_{ik} + (\varepsilon_a)_{ik}, \qquad (2)$$

где анизотропная часть тензора имеет составляющие

$$(\varepsilon_a)_{ix} = 0; \qquad (\varepsilon_a)_{zy} = 0.5\Gamma\varepsilon\sin(2qx);$$

$$(\varepsilon_a)_{zz} = -(\varepsilon_a)_{yy} = 0.5\Gamma\varepsilon\cos(2qx). \qquad (3)$$

Величина Γ характеризует степень анизотропии. Отметим, что совершенно так же (подставляя буквы σ, ν, $\varkappa$ вместо ε) можно записать и тензоры других характеристик холестерика.

Качественно возможности возбуждения можно понять, сравнивая электрофоретическую силу с диссипацией. Это можно делать подобно тому (например, см. [7]) как сравнивается с диссипацией сила плавучести и в результате, их отношение дает критерий возбуждения конвекции — число Рэлея $\mathcal{R}$. Однако в данном случае при таком сравнении критерий возбуждения не получится. Дело в том, что новая сила является быстро осциллирующей величиной, она сильно меняется на малых расстояниях q^{-1}, по величине сопоставимых с размером молекулы холестерика. Макроскопический эффект возбуждения поэтому определяется лишь после усреднения, которое вносит в условие возбуждения существенный множитель. Этот множитель может быть записан различными способами, например (в порядке убывания величины)

$$\frac{A}{q^2}\frac{dq}{dT}; \qquad \frac{Ah}{q}\frac{dq}{dT}; \qquad Ah^2\frac{dq}{dT} \tag{4}$$

и не может быть "пойман" при качественном рассмотрении. Оказывается, что критерий возбуждения термоэлектрической конвекции запишется как

$$\mathcal{E}_c = \frac{\varepsilon\gamma^2 h^5 A^4}{\rho\nu\varkappa q}\left(\frac{dq}{dT}\right)^2 = \mathcal{E}\frac{A^2h^3}{q}\left(\frac{dq}{dT}\right)^2, \tag{5}$$

где $\mathcal{E}$ — безразмерный параметр, число, характеризующее возбуждение в изотропной среде (в жидком полупроводнике [2]). Из этой формулы видно, что в критерий входит произведение двух последних выражений из (4), а самый большой множитель не вошел. Отметим, что в число $\mathcal{E}_c$ множитель dq/dT вошел в квадрате, т. е. влияние температурной зависимости шага спирали на возбуждение структур имеет место независимо от того, увеличивается или уменьшается эта величина с ростом температуры.

Перейдем к постановке задачи. Будем считать холестерик в равновесном состоянии электронейтральным, т. е. пренебрежем флуктуациями возникающего в термоэлектрическом поле заряда. Влияние возникающих в термоэлектрическом поле малых отклонений от электронейтральности привело бы к эффектам, подобным исследованным для жидких полупроводников [2]. Это влияние может быть учтено заменой в конечных результатах числа Рэлея $\mathcal{R}$ на $\pm\mathcal{R}+\mathcal{E}k^2$. Знаки определяются направлением нагрева. Верхний знак соответствует подогреву снизу, а нижний — подогреву сверху, величина квадрата волнового вектора k^2 будет определена ниже. Кроме того, поскольку шаг спирали, как уже подчеркивалось, сильно зависит от температуры, не будут учитываться малые отклонения шага спирали из-за других причин, и можно положить

$$q = q_0 \pm zA\frac{dq}{dT} + \frac{dq}{dT}q_1, \tag{6}$$

т. е. считается, что $A = |dT_0/dz|$, а нагрева вдоль слоя нет.

Такие приближения позволяют пренебречь влиянием изменения шага спирали на директор и считать, что рассматриваемая анизотропная жидкость с компонентами вектора директора, определенными как

$$n_z = \cos(qx); \qquad n_x = 0; \qquad n_y = \sin(qx). \tag{7}$$

В этом приближении можно уравнение директора в систему уравнений не включать (в геометрии, когда направление осей спиралей совпадает с направлением нагрева, это было бы необходимым). Такая запись вектора директора соответствует избранному выше (см. (2), (3)) виду зависимости электрических характеристик среды от координат. В соответствии с формулами (2), (3), используя (7), получим $\varepsilon_{ik} = \varepsilon\delta_{ik} + \varepsilon\Gamma n_i n_k$, что находится в полном соответствии с обычно принимаемыми (см., например, [4]) разложениями.

Система уравнений электрогидродинамики ХЖК состоит из стандартных уравнений неразрывности $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ и переноса тепла $(\partial/\partial t - \varkappa\Delta)T_1 = \mp v_z A$, а также уравнения электронейтральности

$$\partial(\varepsilon_{ik}E_k)/\partial x_i = 0 \tag{8}$$

и уравнения движения (g — ускорение силы тяжести)

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right)\mathbf{v} - \rho\mathbf{g} + \nabla p = -0.5E_iE_k\nabla\varepsilon_{ik}, \tag{9}$$

которые для поиска критериев возбуждения еще должны быть линеаризованны по малым отклонениям плотности $\rho_1 = \rho - \rho_0$, давления $p_1 = p - p_0$ и по характеристикам электрического поля. В уравнениях учтено, что в равновесии среда покоится. После линеаризации необходимо стандартным образом провести исключение переменных, выражая их через потенциал φ.

Полученное стандартным путем нелинейное уравнение должно быть усреднено. Действительно, нас интересует возбуждение структур и конвекции в масштабе $h \gg q^{-1}$, поэтому по масштабу q^{-1} следует провести усреднение, т. е. вычислить

$$\langle f\rangle = \frac{q}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/q} f dx \tag{10}$$

от всех частей полученного после исключения переменных уравнения. При такой процедуре величины малых отклонений (т. е. φ) и их производных заменяются усредненными. Условие $qh \gg 1$, разделяющее масштабы, позволяет свертки (интегралы от произведений) заменить произведениями средних (постоянных в микромасштабе q^{-1}) величин. После усреднения получится уравнение с постоянным коэффициентом, и в нем должны быть оставлены члены, немалые по параметру qh. Решение уравнения будет суперпозицией решений пропорциональных

$$\exp\left(-i\omega\frac{t}{h^2/\nu} + ik_x\frac{x}{h} + ik_z\frac{z}{h}\right), \tag{11}$$

где для просторы пренебрегается зависимостью флуктуационных величин от y. Волновой вектор $k^2 = k_x^2 + k_z^2$ (в общем случае $k^2 = k_\perp^2 + k_z^2$) определяется безразмерными проекциями, причем проекция вдоль слоя $k_x = 2\pi h/\lambda$ (λ — размер структуры вдоль слоя) — величина, вещественная в силу трансляционной симметрии, присущей геометрии бесконечного в этом направлении слоя; k_z — вообще говоря, комплексная величина, которая должна определяться по решению краевой задачи. Далее принято, что k_z — величина вещественная. Этого достаточно для получения качественных результатов. Вещественность k_z должна обеспечиваться постановкой соответствующих граничных условий. Такие условия — это условия типа "свободных изотермических границ" [7]. В случае, когда уравнение содержит лишь четные производные по z, величина $k_z = \pi$. Наконец, частота $\omega = \omega' + i\omega''$, как всегда, определяется условиями возникновения неустойчивости.

Не приводя здесь весьма громоздких вычислений, запишем сразу условие возбуждения

$$\left[\left(i\omega - k^2\right)\left(i\omega\mathcal{P} - k^2\right)k^2 \mp \mathcal{R}k_x^2\right]k^2 = \mathcal{E}_c\left[-ik_z^2k_x + 2Ahk_xk_z\frac{\partial}{\partial T}\left(\ln\frac{dq}{dT}\right)\right]. \qquad (12)$$

Это уравнение записано в безразмерной форме и в него наряду с числами $\mathcal{R}$ и $\mathcal{E}_c$, вошло еще число Прандтля $\mathcal{P} = \nu/\varkappa$.

Подчеркнем еще раз, что в этом уравнении слагаемые справа обусловлены особым термоэлектрическим эффектом, характерным именно для термотропных холестериков и возникающим из-за температурной зависимости шага спирали холестерика. Этот эффект сравнивается в обычной рэлеевской конвекцией, а другие механизмы возбуждения и силы, влияющие на них, считаются включенными в число Рэлея $\mathcal{R}$, характеризующее эту конвекцию.

2. Анализ влияния электрофоретических сил на возбуждение неустойчивости

Разделяя в условии (12) действительную и мнимую части, найдем, что неустойчивость ($\omega'' = 0$) возникает при рэлеевских (возможно, измененных) условиях, но не апериодически ($\omega' = 0$), а осциллируя с частотой (в безразмерном виде)

$$\omega = \frac{k_z^2k_x}{k^6(1+\mathcal{P})}\mathcal{E}_c. \qquad (13)$$

Таким образом, в отличие от термоэлектрической конвекции, возникающей в жидких полупроводниках [2], эффект, обусловленный зависимостью шага холестерической спирали от температуры, не изменяет порога возбуждения, а влияет на характер нарастания малых отклонений всех переменных. Апериодическое нарастание, характерное в обычных условиях (в том числе в изотропных жидких полупроводниках), в холестериках не имеет смысла. Нарастание в них происходит колебательным образом. Условия возбуждения рэлеевской конвекции хорошо известны [7]: возникновение ячеистого движения возможно только при подогреве снизу и $k_\perp^2/k_z^2 = 1/2$;

$$k_z = \pi; \qquad \mathcal{R} = 27\pi^4/4.$$

Используя их, а также значения параметров в жидкости ($\varkappa \simeq \nu \simeq 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$) и значения характеристик среды, обычно принимаемые для жидких полупроводников [3], т.е. при комнатной температуре $T = 300\,\mathrm{K}$ и при характерных для ХЖК значениях [4]: $\beta T \simeq 0.1$ (β — коэффициент теплового расширения); $q^{-1} \simeq 10^{-7}\,\mathrm{m}$; $d\ln q/d\ln T \simeq 10^2$ (возможно даже и 10^3), $\Gamma = 0.1$, найдем по формуле частоты колебательного нарастания (в размерном виде)

$$\omega = \frac{\nu}{h^2}\,\frac{27\pi^4}{4\sqrt{2}}\Gamma^2\left(\frac{d\ln q}{d\ln T}\right)^2\frac{qh}{(\beta Ah)^2}\left(\frac{\varkappa\nu}{gh^3}\right)^4 \times \frac{\varepsilon\gamma^2}{\rho\beta h^2(\varkappa+\nu)}; \qquad (14)$$

что при толщине слоя $h \simeq 0.1\,\mathrm{cm}$ частота $\omega \simeq 1{-}10\,\mathrm{Hz}$ очень сильно ($\sim h^{-15}$) зависит от толщины слоя. Поэтому при толщинах жидкого слоя $h > 0.1\,\mathrm{cm}$ нарастание фактически происходит апериодически.

При уменьшении толщины слоя частота не становится "катастрофически" большой, т.е. при этом, как и в жидких полупроводниках, происходит смена механизма возбуждения [2]. Частота осцилляций принимает вид

$$\omega = 4\pi^2\Gamma^2qh\left(\frac{d\ln q}{d\ln T}\right)^2\frac{\rho\varkappa\nu}{\varepsilon\gamma^2A^2h^2}\,\frac{\varkappa\pi^3}{\nu+\varkappa}\,\frac{\nu}{h^2}. \qquad (15)$$

Оценки с теми же параметрами среды, что и выше, дают $\omega \simeq 10{-}100\,\mathrm{Hz}$ при $h \simeq 0.01\,\mathrm{cm}$, а зависимость от толщины слоя слабая (обратно пропорциональная).

Легко найти и изменения в условиях возбуждения. Будем иметь

$$\pm\mathcal{R} + \mathcal{E}k^2 = \frac{k^2}{k_\perp^2}\left(k^4 - \omega^2\mathcal{P}\right). \qquad (16)$$

Обычное условие (найденное в [2]) получается отсюда при $\omega = 0$.

В толстых слоях ($h > 0.1\,\mathrm{cm}$) неустойчивость возможна лишь при подогреве снизу (верхний знак в (16)) и, подставляя в (16) частоту согласно формуле (13), найдем условие возбуждения в форме

$$\frac{k^6}{k_\perp^2} = \mathcal{R} + \frac{k_z^4}{k^{10}}\mathcal{I}_c, \qquad (17)$$

где $\mathcal{I}_c = \mathcal{E}_c\mathcal{P}/(1+\mathcal{P})$ — также число, безразмерная величина.

Интересно рассмотреть случай, когда новый эффект преобладает. Минимизируя по $w = k_\perp^2/k_z^2$, найдем, что неустойчивость наступает при $w = 1/7$ (вместо обычных $w = 1/2$). Таким образом, в этих условиях возникает движение с ячейками гораздо (в 3.5 раза) более вытянутыми вдоль слоя (вдоль осей спирали). Подставляя $k_z = \pi$, $k_x = \pi/\sqrt{17}$, найдем, что движение в таком случае возникает при $\mathcal{I}_c > 160$ при нагреве $A \geqslant 10^2\,\mathrm{K/cm}$, что не мало. При этом оказывается, что $A \sim h^{-5/4}$, а не h^{-4}, как в задаче Рэлея. Сравнивая теперь члены справа в условии возбуждения (17), найдем, что новый эффект преобладает над рэлеевским лишь в достаточно тонких слоях $h < 10^{-2}\,\mathrm{cm}$. Но в таких слоях основным механизмом возбуждения является не архимедовский, а термоэлектрический подъемный механизм. Условие возбуждения для него — это также условие (17), но с заменой $\mathcal{R}$ на $\mathcal{E}k^2$. Используя связь $\mathcal{I}_c = \mathcal{E}^4 h^2/h_c^2$, получим

$$h_c = \frac{1}{q}\,\frac{\varepsilon\gamma^2\Gamma^2T^2}{\rho\nu\varkappa}\,\frac{\nu}{\nu+\varkappa}\left(\frac{d\ln q}{d\ln T}\right)^2 \qquad (18)$$

— критическая толщина слоя холестерина, разделяющая масштабы. Оценки показывают, что $h_c \simeq 0.01\,\mathrm{cm}$. При $h > h_c$ преобладают обычные механизмы возбуждения ячеистого движения (включая термоэлектрический, для которого область толщин оказывается, однако, довольно узкой). При $h < h_c$ в ХЖК должен преобладать новый механизм возбуждения. Основной силой, приводящей этот механизм в действие, является электрофоретическая сила.

Исключая из (17) $\mathcal{I}_c$, можно изучать взаимные влияния рэлеевского и электрофоретического или термоэлектрического и электрофоретического механизмов друг на друга. Это можно сделать подобно тому, как в [2] изучалось влияние рэлеевского и термоэлектрического механизмов друг на друга в жидких полупроводниках. Однако ввиду отсутствия экспериментальных данных это делать нецелесообразно. По этой же причине нет необходимости решать краевые задачи с целью расчета областей параметров, соответствующих границам зон устойчивости при более реалистических, чем "свободные и изотермические", граничных условиях.

Как известно [7], различные граничные условия не могут "в принципе" подавить качественную возможность неустойчивости. Можно сделать вывод о том, что в условиях реального опыта в некоторой области параметров в ХЖК, особенно в тонких слоях, должны возникать при нагревании структуры полей и скорости.

3. Возбуждение структур при протекании электрического тока

Переходя к изучению возможности возбуждения неустойчивости при протекании электрического тока в ХЖК (общие положения см. [5]), отметим, что специфика холестерика заключена в особой зависимости тензора проводимости $\sigma_{ik} = \sigma\delta_{ik} + \Gamma\sigma n_i n_k$ от температуры из-за зависимости от нее шага спирали. Таким образом, все сказанное о форме зависимости диэлектрической проницаемости от температуры переносится на зависимость от температуры коэффициента проводимости. Конечно, рассмотрение здесь относится к случаям, когда холестерик достаточно сильно проявляет свойства проводника. Такие вещества существуют [4].

Итак, пусть в случае холестерика (ось x — по осям спиралей, вдоль слоя, ось z — поперек слоя) по направлению оси y протекает электрический ток плотностью $\mathbf{j}_0$, созданный внешними причинами. В соответствии с законом Ома и уравнениями Максвелла это означает, что в такой среде имеются электрическое $\mathbf{E}$ и магнитное $\mathbf{H}$ поля, причем $\sigma_{ik}E_k = \mathrm{rot}_i\mathbf{H}$; $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mu\partial\mathbf{H}/\partial t$ (μ — абсолютная магнитная проницаемость). Свойства же ХЖК проявляются в тензоре проводимости σ_{ik}, компоненты которого в точности определяются формулами (2), (3), если в них заменить ε на σ. При протекании тока выделяется джоулево тепло j_iE_i, и поэтому изменяется уравнение переноса тепла, которое теперь необходимо записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varkappa\Delta\right)T = \frac{\mathbf{jE}}{\rho C_p}. \qquad (19)$$

Здесь C_p — теплоемкость холестерика. В этом уравнении пренебрегается конвективным теплопереносом, который в условиях рассматриваемой задачи мал. Конечно, и коэффициент температуропроводности в ХЖК — тензорная величина того же вида, что и σ_{ik}, но здесь зависимостью $\varkappa$ от шага спирали пренебрегаем, чтобы выделить изучаемый эффект. Более строгие (и более громоздкие) расчеты показывают, что такое приближение оправдано.

Качественно картина возникновения неустойчивостей такова: флуктуационное изменение температуры и соответствующее изменение шага спирали приводит к некоторому (малому) изменению проводимости. Флуктуационное изменение проводимости при наличии внешнего тока приводит к изменениям электрического и магнитного полей. Если энергия поля при этом увеличивается на величину, бо́льшую, чем работа по преодолению диссипации, то возможно образование структур.

Формально задача о возбуждении очень похожа на задачу, обсуждавшуюся в разделе 1. Из уравнений Максвелла и уравнения переноса тепла получаем линеаризованную систему относительно T_1 и H_{1x} (достаточно взять у H_1 одну компоненту по оси x), а затем провести усреднение по малому масштабу q^{-1}. Условие возбуждения (заменяющее уравнение (12)) будет иметь вид

$$k^2 + \frac{\gamma_0^2\Gamma h^2}{2\sigma\chi}\,\frac{1}{q}\,\frac{dq}{dT} = 0. \qquad (20)$$

($\chi = \rho C_p\varkappa$ — коэффициент теплопроводности). Из условия возбуждения $\omega'' = 0$ следует, что и $\omega' = 0$, т. е. неустойчивость возникает апериодически.

Переходя к анализу полученного условия, отметим прежде всего, что структуры возможны только если обратный шаг спирали q с ростом температуры уменьшается, т. е. при $dq/dT < 0$. Такие холестерические материалы действительно есть [4]. В подобных средах при протекании тока происходит структурирование возникающих электрического и магнитного полей (возможно на фоне имеющихся в стационарном состоянии) и происходит образование структур изменения температур.

Чтобы получать структуры с периодом (длиной повторения) $\lambda \simeq h$, необходимо пропускание тока

$$j > j_c = \frac{2\pi}{h}\left(\frac{\sigma\chi}{|\Gamma/qdq/dT|}\right)^{1/2}. \qquad (21)$$

Используя значение проводимости $\sigma = 10^{-4}\,\mathrm{Sm/m}$ (что соответствует $10^6\,\mathrm{s}^{-1}$ в гаусовой системе) и $\chi \simeq 500\,\mathrm{J/(K\cdot s)}$ (см. [4]), а также уже использованные выше параметры холестерических жидких кристаллов, получим, что структуры с $\lambda \simeq 1\,\mathrm{cm}$ можно получить, пропуская ток $j_c \simeq 200\,\mathrm{A/cm^2}$.

4. Образование структур в ХЖК во внешнем электрическом поле

Обычно наложение внешнего поля E_0 не приводит к стационарным структурам, т. е. не приводит к периодическому в пространстве распределению отклонения T_1 от среднего значения температуры T_0 [8]. Это объясняется тем, что время нагрева среды за счет джоулева тепла $t \simeq \rho C_p \delta T/(\sigma E_0^2)$, где δT — разность температур между рассматриваемыми точками, должно быть меньше времени нарастания таких структур (после из возникновения), т. е. меньше, чем ω^{-1}. Такому условию всегда удовлетворяют (формально) неустойчивости с апериодическим нарастанием, например такая, как рассмотренная в п. 3. Неустойчивости же, рассмотренные в п. 1–2, нарастают осциллируя, и для них выполнение условия $t < \omega^{-1}$ не очевидно. Поэтому рассмотрим влияние температурной зависимости шага спирали на состояние ХЖК с учетом как диэлектрических (тензор ε_{ik}), так и проводящих (тензор σ_{ik}) свойств. Такая модель лучше соответствует реальным холестерикам, которые, как правило, жидкие полупроводники [4].

Итак, рассмотрим ХЖК во внешнем электрическом поле E_0. Качественно ясно, что основной причиной появления флуктуаций температуры в изотермических равновесных условиях (как в п. 3) является изменение шага спирали. Именно изменение размеров приводит к изменению условий движения такой молекулы и следовательно, к появлению изменения температуры $T_1 = q_1(dq/dT)^{-1}$. То же изменение шага приводит, как неоднократно указывалось выше, к анизотропии в тензорных характеристиках. Зависимость от координат в анизотропной части, задающей значение коэффициента в направлении, перпендикулярном направлению спиралей, для всех тензоров одинаковая (см. (3)), но степень анизотропии Γ_ε, Γ_σ, $\Gamma_\varkappa$ разная (индексы соответствуют коэффициенту, анизотропия которого задается соответствующей величиной).

Анизотропная часть тензора диэлектрической проницаемости определяет возможные малые отклонения электрического поля $\mathbf{E}_1 = -\nabla\varphi$. По уравнению (8) теперь можно найти $\Delta\varphi$, а затем, используя уравнение переноса тепла (19), учесть анизотропию, подобно тому, что это было сделано в п. 3.

Оказывается, что если внешнее поле $\mathbf{E}_0$ направлено перпендикулярно слою (по оси z), то такое поле на поток тепла не влияет. Если же $\mathbf{E}_0$ направлено вдоль слоя (по оси y, как ток $\mathbf{j}_0$ в п. 3), то поток тепла зависит лишь от проводимости, а от диэлектрической проницаемости ε_{ik} не зависит, что подтверждает модель, принятую выше при анализе возбуждения неустойчивости из-за протекания тока. В этом случае, проделывая те же вычисления, что и в разделах 1 или 3, получим, что безразмерное число, определяющее условие возбуждения, имеет вид

$$\mathcal{I} = \frac{\sigma E_0 \Gamma_\sigma}{4\chi q^3}\frac{dq}{dT}, \tag{22}$$

соответствующий безразмерному числу из условия (20) с заменой h на q^{-1}.

При строгом решении следует искать решения усредненных нелинейных уравнений в виде ряда Фурье с $k_m = m\pi/(Lq)$, L — длина спирали молекулы, определяемая ранее условием $Lq = \pi$, а $m = 1, 2, 3\ldots$ — целые числа. Подставляя это решение в соответствующее уравнение, умножая на $\sin(k_n zq)$ (или на $\cos(k_n zq)$) и интегрируя, получим бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов ряда c_m (или b_m). При $n = m$ получим условие возбуждения. Соответствующее уравнение п. 3 при этом превращается в $\mathcal{I} + k^2 = 0$, полностью совпадающее с условием возбуждения (20).

При $n \neq m$ получим уравнение типа

$$c_m\left(k_m^2 + \mathcal{I}\right) + \sum_{m\neq n} c_n \mathcal{I} B_{mn} = 0, \tag{23}$$

где $B_{mn} \sim (k_m \pm k_n)^{-1}$ — убывающие числа порядка единицы.

Таким образом, получим, что структуры во внешнем поле возбуждаются при

$$E_0 > E_c \simeq \left(B\frac{\chi T q^2}{\sigma|\Gamma_\sigma|}\left|\frac{d\ln T}{d\ln q}\right|\right)^{1/2}. \tag{24}$$

(B — просто одно из чисел B_{mn}). Теперь из уравнения переноса тепла легко оценить

$$\omega \geqslant t^{-1} = \frac{\sigma E_0^2}{\chi}\left[\frac{d\ln\sigma}{d\ln T} - \frac{d\ln\varepsilon}{d\ln T}\frac{(\mathbf{k}\mathbf{E}_0)^2}{k^2E_0^2}\right] - \varkappa k^2. \tag{25}$$

Если использовать величину поля, определенную соотношением (24), то главным в этой формуле будет слагаемое, содержащее $d\ln\sigma/d\ln T$.

Отметим, что условие $E_0 > E_c$ (т. е. условие (24)) вполне совместимо с известным [4] условием независимости шага спирали от электрического поля, которое может быть записано как $E_0 < qh(G/(\varepsilon|\Gamma_\varepsilon|))^{1/2}$, где G — модуль упругости кручения жидкого кристалла. Именно, оба эти условия совместимы, если

$$\frac{\sigma G q^2 h^4}{\chi\varepsilon T}\left|\frac{d\ln q}{d\ln T}\right| \gg 1. \tag{26}$$

Оценки с параметрами среды, использованными выше, (типичное значение $G \simeq 10^6\,\mathrm{Pa}$) показывают, что все условия выполнены для структур полей с размерами $\lambda \simeq h \simeq 1\,\mathrm{cm}$ при $E_0 > 10^5\,\mathrm{V/m}$.

Автор благодарен И.В. Иоффе за плодотворные обсуждения.

Список литературы

[1] Е.И. Кац, В.В. Лебедев. Динамика жидких кристаллов. Наука, М. (1988).
[2] Е.Д. Эйдельман. ЖЭТФ **103**, 1633 (1993).
[3] М. Кастлер. Жидкие полупроводники. Мир. М. (1980).
[4] Же де Вилем. Физические свойства жидкокристаллических веществ. Мир, М. (1982).
[5] Л.Э. Гуревич, И.В. Иоффе. ЖЭТФ **61**, 1133 (1971).
[6] Е.Д. Эйдельман. ФТТ **37**, *1*, 160 (1995).
[7] S. Chandrasekhar. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. University Press, Oxford (1961).
[8] М.К. Болога, А.Б. Берков. Электроконвективный теплообмен дисперсионных систем. Штиинница, Кишинев (1989).