

Магнитный момент квантового цилиндра

© И.И. Чучаев, В.А. Маргулис, А.В. Шорохов, С.Е. Холодова

Мордовский государственный университет,
430000 Саранск, Россия
E-mail: margulis@mrsu.ru

Исследован магнитный отклик свернутого в цилиндр двумерного слоя, находящегося в продольном магнитном поле. Изучен магнитный момент вырожденного электронного газа в зависимости от потока магнитного поля. Подробно анализируется форма осцилляционных максимумов. Показано, что при нулевой температуре имеются изломы на каждом периоде изменения магнитного момента. На этом периоде график магнитного момента сильно зависит от отношения энергии Ферми к энергии размерного конфайнмента. В частности, изломы отсутствуют при целом или полуцелом значении квадратного корня из этого отношения.

Исследования магнитного отклика в различных низкоразмерных системах доставляют важную информацию об электронном энергетическом спектре и потенциале латерального конфайнмента в этих структурах [1–11]. Приложенное к наноструктуре магнитное поле создает дополнительные возможности для исследования этих параметров. Это обусловлено тем, что магнитное поле может создавать дополнительный или усиливать имеющийся латеральный конфайнмент в наноструктуре.

Равновесные свойства электронного газа в наноструктурах в основном определяются электронным энергетическим спектром, который в свою очередь обусловлен геометрией системы.

Магнитный отклик наноструктур с цилиндрической симметрией при температуре $T = 0$ изучался в [3] для случая слабого магнитного поля, которое рассматривалось как возмущение. Отметим, что для исследования магнитного отклика используются как каноническое распределение Гиббса (постоянное число электронов), так и большое каноническое распределение Гиббса (постоянный химический потенциал газа $\mu(B) = \text{const}$). Для большинства ситуаций результаты, полученные при помощи этих распределений, разнятся очень мало. Это обстоятельство связано с тем, что осцилляционная часть $\mu(B)$ для случая постоянного числа электронов очень мала [12]. Для вырожденного электронного газа, однако, использование большого канонического распределения при расчетах более удобно. Поэтому далее будет использоваться именно этот подход, т.е. считаться, что $\mu = \text{const}$. Кроме того, будет рассматриваться исключительно невзаимодействующий электронный газ.

Цель настоящей работы — теоретическое исследование магнитного отклика свернутого в цилиндр двумерного вырожденного электронного газа (квантовый цилиндр) в постоянном и однородном магнитном поле \mathbf{B} , параллельном оси цилиндра радиуса ρ .

В приближении эффективной массы гамильтониан H одноэлектронных бесспиновых состояний для векторного потенциала \mathbf{A} , выбранного в виде $\mathbf{A} = (By/2 - Bx/2, 0)$, в цилиндрических координатах

запишется в виде

$$H = -\varepsilon \frac{d^2}{d\varphi^2} - \frac{i\hbar\omega_c}{2} \frac{d}{d\varphi} + \frac{m^*\omega_c^2}{2} \rho^2 + \frac{p^2}{2m^*}, \quad (1)$$

где $\omega_c = |eB|/m^*c$ — циклотронная частота, φ — полярный угол, m^* — эффективная масса электрона, p — импульс вдоль оси цилиндра, $\varepsilon = \hbar^2/2m^*\rho^2$ — энергия размерного конфайнмента.

Спектр гамильтониана имеет вид

$$\varepsilon_{mp} = \varepsilon \left(m + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 + \frac{p^2}{2m^*}. \quad (2)$$

Здесь магнитное квантовое число m принимает значения $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, поток поля \mathbf{B} через сечение цилиндра $\Phi = \pi\rho^2 B$, $\Phi_0 = hc/|e|$ — квант потока. Воспользовавшись стандартным выражением для термодинамического потенциала Ω [13], найдем магнитный момент по формуле

$$\frac{M}{\mu_B} = \frac{Lm_0}{\pi\hbar m^*} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(m + \Phi/\Phi_0)dp}{1 + \exp[(\varepsilon_{mp} - \mu)/T]}, \quad (3)$$

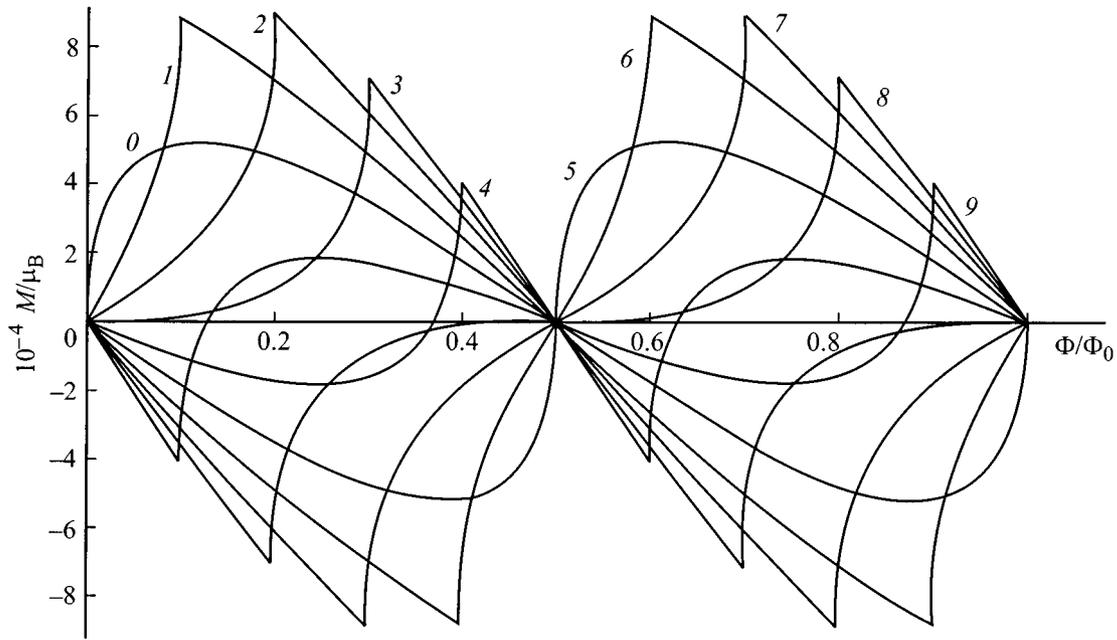
где m_0 — масса свободного электрона, μ_B — магнетон Бора.

Для дальнейшего анализа удобно разложить магнитный момент цилиндра в ряд Фурье с помощью формулы суммирования Пуассона. После несложных, но довольно длинных преобразований получим

$$-\frac{M}{\mu_B} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(T) \sin\left(2\pi n \frac{\Phi}{\Phi_0}\right), \quad (4)$$

где коэффициенты Фурье $C_n(T)$ имеют вид

$$C_n(T) = \frac{Lm_0}{\pi^3\hbar m^*} \int_0^{\infty} dz z \sin(nz) \times \int_0^{\infty} dp \left\{ 1 + \exp[(\varepsilon z^2/4\pi^2 + p^2/2m^* - \mu)/T] \right\}^{-1}. \quad (5)$$



Зависимость магнитного отклика квантового цилиндра от потока магнитного поля. Номер кривой N соответствует значению $\eta = N \cdot 10^{-1}$, где N принимает значения $N = 0, 1, \dots, 9$.

Введем новые переменные $x = z\sqrt{\varepsilon}/2\pi$, $y = p/\sqrt{2m^*}$ и перейдем в (4) к полярным координатам (r, ψ) в плоскости xOy . Тогда получим для $C_n(T)$ выражение

$$C_n(T) = \frac{2L\sqrt{2m^*\varepsilon}m_0}{\hbar m^*} \int_0^\infty \frac{x^2 J_1(2\pi n x) dx}{1 + \exp[(\varepsilon x^2 - \mu)/T]}. \quad (6)$$

Как следует из (6) и (4), магнитный момент квантового цилиндра является осциллирующей функцией потока с периодом, равным кванту потока.

Для качественного исследования характера осцилляций рассмотрим случай, когда $T = 0$. Тогда получим

$$C_n(0) = \frac{L\mu\sqrt{2m^*}m_0}{\pi\hbar m^*\sqrt{\varepsilon}} \frac{J_2(2\pi n\sqrt{\mu/\varepsilon})}{n}. \quad (7)$$

Для реальных ситуаций $\mu \gg \varepsilon$. Используя асимптотику функции Бесселя $J_2(x)$ для больших значений аргумента, получим оценку

$$\frac{M(T=0)}{\mu_B} = \frac{\sqrt{2}Lm_0}{\pi^2\hbar\sqrt{m^*}} \left(\frac{\mu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \times \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}} \sin(2\pi n\xi) \cos\left(2\pi n\eta - \frac{\pi}{4}\right), \quad (8)$$

где ξ и η обозначают дробные части величин Φ/Φ_0 и $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ соответственно.

Из (8) вытекает, что достаточно провести исследование осцилляций момента в области, где $0 \leq \xi < 1$, $0 \leq \eta < 1$.

Из (8) вытекает, что $M(\xi, \eta) = -M(1 - \xi, \eta)$ и $M(\xi + 1/2, \eta - 1/2) = M(\xi, \eta)$. В связи с такой симметрией рассмотрим только область $\xi, \eta \leq 1/2$. Сразу отметим, что при целых значениях $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ на этой половине периода есть только один экстремум (максимум или минимум в зависимости от того, $\eta < 1/2$ или $\eta > 1/2$). При $\eta < 1/2$ формула (8) дает

$$\frac{M(\xi, \eta)}{4\pi A\mu_B} = \zeta(-1/2, \xi + \eta) - \zeta(-1/2, 1 - \xi + \eta); \quad \xi \geq \eta,$$

$$\frac{M(\xi, \eta)}{4\pi A\mu_B} = \zeta(-1/2, \xi + \eta) - \zeta(-1/2, \eta - \xi); \quad \eta > \xi, \quad (9)$$

где $\zeta(x, s)$ — ζ -функция Гурвица, а $(Lm_0)/(2\pi^2\hbar\sqrt{m^*}) \times (\mu^3/\varepsilon)^{1/4} \equiv A$. Критической точкой графика $M(\xi, \eta)$, как следует из (9), на интервале $0 < \xi < 1/2$ является точка, где $\xi = \eta$. Рассмотрим поведение графика в окрестности этой точки. Используем для анализа формулу сдвига для ζ -функции Гурвица. Тогда вторая формула в (9) запишется в виде

$$\frac{M(\xi, \eta)}{4\pi A\mu_B} = \zeta(-1/2, \xi + \eta) - \zeta(-1/2, 1 - \xi + \eta) - \sqrt{\eta - \xi}; \quad \eta > \xi, \quad (10)$$

Сравнение (9) и (10) показывает, однако, что в точке $\eta = \xi$ имеется излом на графике $M(\xi, \eta)$, обусловленный наличием третьего слагаемого в формуле (10). Кроме того, это слагаемое может дать дополнительный нуль функции $M(\xi, \eta)$ на графике в области $0 < \xi < 1/2$. В этом случае на половине периода функции имеется два экстремума (максимум и минимум).

Графики, построенные по формуле (8), показаны на рисунке. Вид графиков соответствует приведенным выше аналитическим результатам о поведении магнитного момента.

Заметим, что при $T \neq 0$ изломы на графиках сглаживаются, но в целом картина осцилляций остается той же.

Как следует из полученных в статье результатов, в квантовом цилиндре амплитуды осцилляционных максимумов на кривой $M(B)$ зависят от величины химического потенциала, но положения этих максимумов определяются соотношениями между величинами ξ и η . При этом период осцилляций не зависит от μ и равен кванту потока (осцилляции типа Ааронова–Бома). Это обусловлено тем чисто геометрическим обстоятельством, что при любом из возможных значений энергии электрона проекция его квазиклассической траектории на плоскость, перпендикулярную магнитному полю, является фиксированной — совпадающей с образующей цилиндра.

Интересно отметить, что добавление потока Ааронова–Бома Φ_{AB} (поток магнитного поля, созданного тонким и в идеале бесконечно длинным соленоидом, расположенным вдоль оси симметрии наноструктуры) сохраняет для всех рассмотренных случаев картину осцилляций. Этот поток приводит лишь к общему сдвигу кривой магнитного отклика $M(\Phi)$ на величину Φ_{AB} .

Работа поддержана грантами РФФИ, МОиПо РФ и программой ”Университеты России — Фундаментальные исследования”.

Список литературы

- [1] M.F. Lin, K.W.-K. Shung. Phys. Rev. **B52**, 8423 (1995).
- [2] H.-F. Cheung, Y. Gefen, E.K. Riedel, W.-H. Shin. Phys. Rev. **B37**, 6050 (1988).
- [3] Yu N. Ovchinnicov, W. Legle, A. Schmid. Ann. Phys. **6**, 489 (1997).
- [4] Y. Meyr, O. Entin-Wohlman, Y. Gefen. Phys. Rev. **B42**, 8531 (1990).
- [5] R. Merlin. Solid State Commun. **64**, 99 (1987).
- [6] В.А. Гейлер, В.А. Маргулис, И.В. Чудаев. ЖЭТФ **109**, 762 (1996).
- [7] В.А. Гейлер, В.А. Маргулис, О.Б. Томили. Письма в ЖЭТФ **63**, 549 (1996).
- [8] V.A. Geyler, V.A. Margulis. Phys. Rev. **B55**, 2543 (1997).
- [9] M. Büttiker, Y. Imry, R. Landauer. Phys. Lett. **96A**, 365 (1983).
- [10] M. Büttiker. Phys. Rev. **B32**, 1846 (1985).
- [11] H. Ajiki, T. Ando. J. Phys. Soc. Jpn. **62**, 1255 (1993).
- [12] Д. Шенберг. Магнитные осцилляции в металлах. Мир, М. (1986). 678 с.
- [13] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Статистическая физика. Ч. 1. Наука, М. (1976). 583 с.