

# Амплитудно-зависимый дефект модуля упругости в основных моделях дислокационного гистерезиса

© А.Б. Лебедев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,  
194021 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: A.B.Lebedev@pop.ioffe.rssi.ru

(Поступила в Редакцию 12 ноября 1998 г.

В окончательной редакции 22 декабря 1998 г.)

Приведен расчет амплитудно-зависимого дефекта модуля упругости для трех основных моделей дислокационного гистерезиса: 1) гистерезиса отрыва по Гранато–Люкке, 2) гистерезиса Давиденкова и 3) гистерезиса трения без возвращающей силы (БВС). Для всех трех типов петель рассмотрено отношение амплитудно-зависимых декремента и дефекта модуля и показано, что в общем случае  $r$  зависит от амплитуды колебаний. В частном случае степенных амплитудных зависимостей декремента и дефекта модуля  $r$  не зависит от амплитуды, а зависит только от показателя степени  $n$ . Получены формулы  $r(n)$  для трех типов гистерезисных петель, и продемонстрировано, что величина  $r$  может служить идентификатором формы петли. Сравнение расчетных кривых с результатами экспериментов, накопленными к настоящему времени, показало, что большинство данных лежит ближе к гистерезисам Давиденкова и БВС. Проанализированы пределы применимости приближения секущего дефекта модуля, используемого для определения дислокационной деформации из измерений внутреннего трения.

В 1938 году Давиденков [1], анализируя причины зависимости поглощения звука в кристаллических твердых телах от амплитуды колебаний, выдвинул гипотезу, что эта зависимость есть результат гистерезиса микропластической деформации  $\varepsilon_d$ . Давиденков предположил, что петля гистерезиса имеет ось симметрии второго порядка и что нелинейность микропластической деформации может быть аппроксимирована степенной функцией напряжения

$$\begin{aligned} \varepsilon_d &= (\sigma + \sigma_0)^m - 2^{n-1} \sigma_0^m, \quad \text{при возрастании } \sigma, \\ \varepsilon_d &= -(\sigma_0 - \sigma)^m + 2^{m-1} \sigma_0^m, \quad \text{при убывании } \sigma, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $\sigma_0$  — амплитуда колебательного напряжения, которое меняется по гармоническому закону. Тогда для декремента колебаний получалась также степенная функция амплитуды колебаний  $\delta_h \propto \sigma_0^m$ , где  $m = n + 1$ .

Рид [2,3] впервые связал амплитудные зависимости внутреннего трения и дефекта модуля упругости в цинке и меди непосредственно с движением дислокаций. Поскольку микропластическая деформация по современным представлениям, есть результат малого и как правило обратимого перемещения дислокаций, можно сказать, что эксперименты Рида явились первыми подтверждениями гипотезы Давиденкова. Кроме того, Рид впервые экспериментально обнаружил неоднократно впоследствии подтвержденную пропорциональность амплитудно-зависимых декремента  $\delta_h$  и дефекта модуля упругости  $(\Delta M/M)_h$

$$\delta_h = r(\Delta M/M)_h, \quad (2)$$

где коэффициент пропорциональности  $r$  не зависел от амплитуды колебаний, но сильно (примерно в 10 раз) менялся в цинке при изменении ориентации образца по отношению к базисной плоскости ГПУ решетки.

Новик [4] теоретически показал, что механизм простого (независящего от частоты) гистерезиса приводит к (2), где коэффициент  $r$  не зависит от амплитуды колебаний и может меняться от 0 до 4 (для частного случая квадратичных амплитудных зависимостей декремента и дефекта модуля). При этом были экспериментально получены разные величины  $r$  для отожженной и деформированной меди. Пропорциональность (2) также получалась в теории Гранато–Люкке [5], где был сделан вывод, что отношение  $r$  должно быть порядка единицы, то точная формула не приводилась. В последующих теориях, основанных как на модели отрыва Гранато–Люкке [5], так и на различных моделях трения (см., например, [6]), основное внимание было уделено декременту колебаний.

Работы Новика [4] и Ишии [7] показали, что существенная информация заложена в поведении дефекта модуля упругости и отношении  $r$ , однако эти параметры (доступные экспериментальной проверке) недостаточно исследованы в существующих теориях дислокационного гистерезиса. В большинстве случаев (например, в [7]) использовалось приближенное соотношение [8]

$$(\Delta M/M) \approx \varepsilon_{dm}/\varepsilon_0, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{dm} = \varepsilon_d(\sigma_0)$  — амплитудное значение дислокационной, а  $\varepsilon_0$  — упругой деформации, без анализа точности такого приближения.

Точное выражение для дефекта модуля упругости, измеряемого акустическими методами, можно вывести, учитывая только ту составляющую  $\varepsilon_d$ , которая находится в фазе с приложенным колебательным напряжением, т.е. используя Фурье преобразование. Новик [4] этим путем анализировал  $(\Delta M/M)_h$  и  $r$  для квадратичных амплитудных зависимостей декремента,

Бозер [9] — для линейных, Наими [10] провел анализ амплитудных зависимостей  $\delta_h$  и  $(\Delta M/M)_h$  для случая преодоления обобщенных сил трения Пайерлса–Набарро. Гранато [11] в своей диссертации использовал Фурье анализ для модели отрыва, но ввиду математических сложностей, возникающих при подстановке функции распределения Келера [12], ограничился приближенным выражением, которое и привело к выводу о том, что величины  $\delta_h$  и  $(\Delta M/M)_h$  практически равны, т. е.  $r \approx 1$ .

Настоящая работа посвящена теоретическому рассмотрению амплитудно-зависимого дефекта модуля упругости и отношения  $r$  в различных моделях дислокационного гистерезиса. В работе обобщены и дополнены результаты, полученные автором ранее в статье [13] (где подробно рассматривается гистерезис отрыва) и в кратком сообщении [14].

## 1. Основные модели дислокационного гистерезиса

На начальных стадиях амплитудной зависимости внутреннего трения (АЗВТ) потери колебательной энергии связаны с обратимым гистерезисным движением дислокаций в силовых полях препятствующих этому движению барьеров. Наибольшее распространение получили теории АЗВТ, основанные на струнной модели дислокации Келера–Гранато–Люкке [5,12]. В таких теориях (см., например [15–17]) дислокационный гистерезис формируется по механизму отрыв–перезакрепление в каждый из полупериодов колебаний от одних и тех же точечных стопоров. При этом смещения из положения равновесия считаются малыми и предполагается, что дислокация отрывается лишь от одного ряда (линейного массива) самых слабых точек закрепления, но она не может оторваться от сильных стопоров (узлов дислокационной сетки, примесных преципитатов и т. д.).

В других теориях АЗВТ дислокация преодолевает не один, а несколько рядов (планарный массив) стопоров (см., например, [7,18,19]) и даже дальнедействующие поля внутренних напряжений [20,21] (большее количество ссылок можно найти в [21]). По классификации Асано [6], теории первого типа называются теориями отрыва, а второго — теориями трения, поскольку торможение дислокаций в этих теориях как правило можно приписать некой эффективной силе трения.

Следуя Асано [6], обобщенной моделью Гранато–Люкке (или моделью отрыва) будем характеризовать любую модель, в которой диаграмма “напряжение–дислокационная деформация” отвечает следующему признаку: абсолютная величина  $\varepsilon_d$  нелинейно возрастает от 0 до максимума  $|\varepsilon_{dm}|$ , когда абсолютная величина напряжения  $\sigma$  увеличивается и линейно убывает от  $|\varepsilon_{dm}|$  до 0, когда  $|\sigma|$  уменьшается (рис. 1). При этом причина нелинейности  $\varepsilon_d(\sigma)$  не конкретизируется. Общая форму-

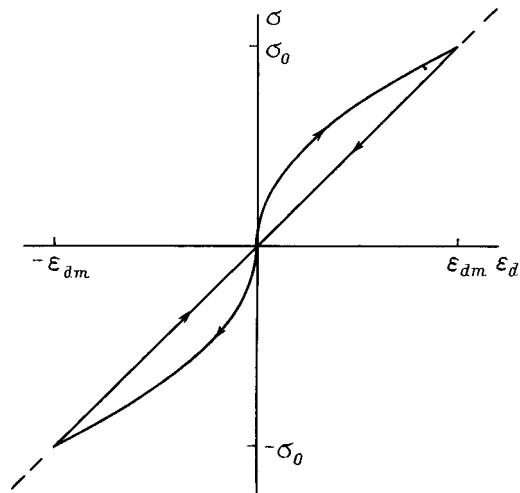


Рис. 1. Схематическое изображение обобщенной петли Гранато–Люкке [5,6] в координатах “напряжение  $\sigma$  — дислокационная деформация  $\varepsilon_d$ ”.

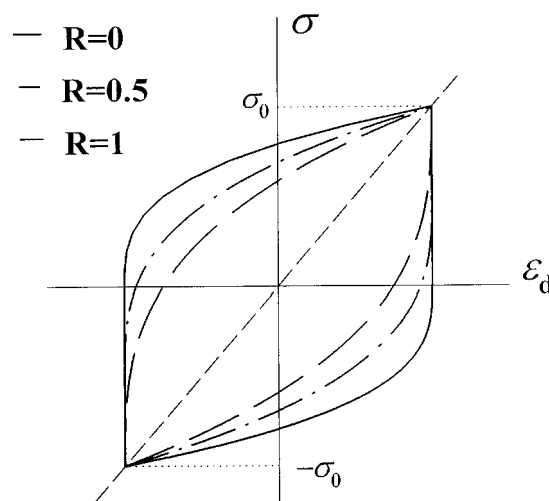


Рис. 2. Схематическое изображение разных гистерезисов трения: петли Давиденкова ( $R = 1$ ), петли без возвращающей силы ( $R = 0$ ) и петли с частичной эффективностью возвращающей силы (показан пример, где  $R = 0.5$ ). Штриховая линия, проходящая через начало координат, соответствует дефекту секущего модуля упругости (как и на рис. 1).

ла для гистерезиса отрыва была получена в виде [6]

$$\delta_h(\sigma_0) = \frac{M}{\sigma_0} \left[ \varepsilon_d(\sigma_0) - \frac{2}{\sigma_0} \int_0^{\sigma_0} \varepsilon_d(\sigma) d\sigma \right]. \quad (4)$$

Основное отличие моделей трения от моделей отрыва заключается в виде гистерезисной петли. В моделях трения (рис. 2) установившаяся петля не проходит через начало координат. На рис. 2 штриховой линией показана петля Давиденкова; ее особенность заключается в наличии возвращающей силы: абсолютная величина дислокационной деформации начинает уменьшаться сразу,

как только начинает уменьшаться абсолютная величина напряжения. Петля без возвращающей силы (БВС) показана на рис. 2 сплошной линией. Здесь дислокационная деформация меняется только тогда, когда увеличивается абсолютная величина напряжения, и остается неизменной, когда абсолютная величина напряжения уменьшается.

Асано [6] получил формулу для обобщенной петли Давиденкова

$$\delta_h(\sigma_0) = \frac{M}{\sigma_0^2} \left[ 2\sigma_0 \varepsilon_d(2\sigma_0) - 2 \int_0^{2\sigma_0} \varepsilon_d(\sigma) d\sigma \right]. \quad (5)$$

Эта формула написана для начала координат, расположенного в углу петли. Обобщение фактически заключается в том, что  $\varepsilon_d(\sigma)$  здесь может быть любой нелинейной функцией. Формула (5), таким образом, формально охватывает любую петлю, имеющую ось симметрии второго порядка, к которым относятся и гистерезис БВС, и гистерезис Гранато–Люкке (разница в выборе той или иной формы записи определяется выбором начала координат, который, в свою очередь, определяется физическими соображениями). Для гистерезиса БВС удобно переписать (5) в координатах рис. 2, чтобы функция  $\varepsilon_d(\sigma)$  под интегралом содержала только нелинейный участок

$$\delta_h(\sigma_0) = \frac{M}{\sigma_0^2} \left[ 4\sigma_0 \varepsilon_d(\sigma_0) - 2 \int_0^{\sigma_0} \varepsilon_d(\sigma) d\sigma \right]. \quad (6)$$

## 2. Истинный и секущий дефект модуля упругости, отношение $r$

В монографии Лазана [22] используется понятие секущего модуля упругости, который определяется наклоном прямой, соединяющей концы гистерезисной петли в координатах "напряжение–полная деформация". Поскольку амплитудное значение полной деформации складывается из упругой  $\varepsilon_0 = \sigma_0/M$  и дислокационной  $\varepsilon_{dm}$  частей, а на рис. 1 и 2 приведена только дислокационная часть, очевидно, что прямые, проходящие через начало координат и концы гистерезисных петель на этих рисунках, соответствуют дефекту модуля, определяемому отношением (3); будем называть его секущим и обозначать  $(\Delta M/M)_{sec}$ . Соответственно отношение  $\delta_h$  к  $(\Delta M/M)_{sec}$  обозначим  $r_{sec}$ . Для гистерезиса отрыва из (3) и (4) получаем

$$r_{sec} = 1 - \frac{2}{\sigma_0 \varepsilon_d(\sigma_0)} \int_0^{\sigma_0} \varepsilon_d(\sigma) d\sigma. \quad (7)$$

В случае гистерезиса Давиденкова необходимо напомнить, что уравнение (5) записано для расположения

начала координат в левом нижнем углу петли, изображенной на рис. 2. Нишино и Асано [23], используя тривиальное выражение для секущего дефекта модуля в таких координатах  $(\Delta M/M)_{sec} = M \varepsilon_d(2\sigma_0)/2\sigma_0$ , получили

$$r_{sec} = 4 - \frac{4}{\sigma_0 \varepsilon_d(2\sigma_0)} \int_0^{2\sigma_0} \varepsilon_d(\sigma) d\sigma. \quad (8)$$

Здесь  $\varepsilon_d(\sigma)$  представляет собой уравнение верхней ветви петли (напряжение возрастает). При условии  $r_{sec} = \text{const}$  интегральные уравнения (7) и (8) могут быть легко решены. Действительно, дифференцируя, например (8), по  $\sigma_d$ , получаем

$$\frac{d\varepsilon_d}{\varepsilon_d} = \frac{4 + r_{sec}}{4 - r_{sec}} \frac{d(2\sigma_0)}{2\sigma_0}. \quad (9)$$

Далее, учитывая что  $\sigma$  и  $\sigma_0$  представляют собой одно и то же напряжение ( $\sigma$  меняется от 0 до  $2\sigma_0$ ), символ 0 у  $\sigma_0$  можно опустить. Тогда интегрирование (9) при условии непрерывности функции  $\varepsilon_d(\sigma)$  и ее производной дает степенную зависимость  $\varepsilon_d \propto \sigma^m$ , где  $m = (r_{sec} + 4)/(4 - r_{sec})$  и

$$r_{sec} = 4(m - 1)/(m + 1). \quad (10)$$

Подстановка  $\varepsilon_d \propto \sigma^m$  в (3) и (5) приводит к степенным зависимостям для декремента и секущего дефекта модуля с показателем  $n = m - 1$

$$\delta_h = r_{sec} (\Delta M/M)_{sec} \propto \sigma_0^n. \quad (11)$$

Другими словами, если  $r_{sec} = \text{const}$ , то для непрерывной функции  $\varepsilon_d(\sigma)$  с непрерывной производной обобщенный гистерезис Давиденкова сводится к простому гистерезису Давиденкова. Связь  $r_{sec}$  и  $n$  следует из (10)

$$r_{sec} = 4n/(n + 2). \quad (12)$$

Аналогично уравнение (7) при  $r_{sec} = \text{const}$  также приводит к (11), где

$$r_{sec} = n/(n + 2). \quad (13)$$

Выражения (10) и (12) для исходной модели Давиденкова были выведены ранее в [23–25] путем прямой подстановки  $\varepsilon_d \propto \sigma^m$  в формулы типа (3) или (8). В настоящей работе решалась более общая задача, а именно — находилась функция  $\varepsilon_d(\sigma)$ , которая является необходимой и достаточной для обеспечения условия  $r_{sec} = \text{const}$ . Как следует из вышеизложенного, для непрерывных  $\varepsilon_d(\sigma)$  и  $\varepsilon'_d(\sigma)$  — это степенная функция. Однако, если даже допустить наличие разрыва в производной, как например для гистерезиса БВС, можно, используя (3) и (6), показать, что необходимым и достаточным условием для  $r_{sec} = \text{const}$  является степенной вид нелинейных участков функции  $\varepsilon_d(\sigma)$ . Это естественно приводит к степенным амплитудным зависимостям декремента и

секущего дефекта модуля (11), а для их отношения получается следующая формула:

$$r_{sec} = 4(n+1)/(n+2). \quad (14)$$

Очевидно, что отсутствие возвращающей силы фактически эквивалентно случаю, когда возвращающая сила скомпенсирована закреплением дислокаций в точках максимального удаления от положения равновесия (при  $\varepsilon_d = \varepsilon_{dm}$ ). Введем параметр  $R$ , характеризующий эффективность возвращающей силы. Запишем уравнение петли в виде

$$\varepsilon_d = -\varepsilon_{dm}, \quad -R\sigma_0 > \sigma \geq -\sigma_0 \text{ и } \varepsilon_d = \varepsilon_{d1}(\sigma), \quad \sigma \geq -R\sigma_0,$$

когда  $\sigma$  возрастает;

$$\varepsilon_d = \varepsilon_{dm}, \quad R\sigma_0 < \sigma \leq \sigma_0 \text{ и } \varepsilon_d = \varepsilon_{d2}(\sigma), \quad \sigma \leq R\sigma_0,$$

когда  $\sigma$  убывает.

Пример петли с частичной эффективностью возвращающей силы (для случая  $R = 0.5$ ) показан на рис. 2 штрихпунктирной линией. Если  $\varepsilon_{d1}(\sigma)$  и  $\varepsilon_{d2}(\sigma)$  — степенные функции такие, что

$$\varepsilon_{d1} = (\sigma + R\sigma_0)^m - \sigma_0^m(1+R)^m/2,$$

$$\varepsilon_{d2} = -(R\sigma_0 - \sigma)^m + \sigma_0^m(1+R)^m/2,$$

тогда легко получаем

$$\delta_h = 2M(1+R)^m \sigma_0^{m-1} (m-R)/(m+1), \quad (15a)$$

$$(\Delta M/M)_{sec} = M\sigma_0^{m-1} (1+R)^m/2, \quad (15b)$$

$$r_{sec} = 4(m-R)/(m+1) = 4(n+1-R)/(n+2). \quad (15c)$$

При  $R = 1$  формулы (15) дают  $\delta_h$ ,  $(\Delta M/M)_{sec}$  и  $r_{sec}$  для гистерезиса Давиденкова, при  $R = 0$  — для чистой БВС петли. Теоретически  $R$  может меняться от 1 до  $-1$ . Чем меньше  $R$ , тем слабее возвращающая сила (или тем больше закрепляющая сила в точках  $\varepsilon_d = \varepsilon_{dm}$ ). При  $R = -1$  петля превращается в прямоугольник, что дает амплитудно-независимое гистерезисное внутреннее трение.

Есть основания полагать, что любая петля, имеющая ось симметрии второго порядка, где функция  $\varepsilon_d(\sigma)$  при возрастании  $\sigma$  имеет линейный и нелинейный участки, будет приводить к степенным амплитудным зависимостям декремента и дефекта модуля упругости и амплитудной независимости  $r_{sec}$ . В качестве примера можно привести не только гистерезис трения, но и гистерезис отрыва, так как уравнение (5) справедливо для любой симметричной петли, в частности для петли Гранато–Люкке.

Теперь получим истинный дефект модуля, измеряемый акустическими методами.

2.1. Гистерезис Гранато–Люкке. Диаграмма гистерезиса отрыва показана на рис. 1, а декремент выражается формулой (4). Амплитудно-зависимый дефект модуля упругости следует из преобразования Фурье

$$\left(\frac{\Delta M}{M}\right)_h = \frac{2M}{\sigma_0\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \varepsilon_d(\sigma_0 \sin \theta) \sin \theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \varepsilon_d(\sigma_0) \sin^2 \theta d\theta \right],$$

и после подстановки  $\sigma = \sigma_0 \sin \theta$

$$\left(\frac{\Delta M}{M}\right)_h = \frac{2M}{\sigma_0\pi} \left[ \int_0^{\sigma_0} \varepsilon_d(\sigma) \frac{\sigma d\sigma}{\sigma_0\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma^2}} + \frac{\pi}{4} \varepsilon_d(\sigma_0) \right]. \quad (16)$$

Отношение  $r$  следует из (4) и (16)

$$r = \frac{2\varepsilon_d(\sigma_0) - \frac{4}{\sigma_0} \int_0^{\sigma_0} \varepsilon_d(\sigma) d\sigma}{\varepsilon_d(\sigma_0) + \int_0^{\sigma_0} \varepsilon_d(\sigma) \frac{\sigma d\sigma}{\sigma_0\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma^2}}}. \quad (17)$$

Поскольку интегралы в числителе и знаменателе (17) неотрицательны, то очевидно, что  $r \leq 2$ .

Если  $r = \text{const}$  (т.е. не зависит от амплитуды колебаний), то степенная функция  $\varepsilon_d(\sigma) \propto \sigma^m$  является решением интегрального уравнения (17) [13]. Подстановка  $\varepsilon_d(\sigma) \propto \sigma^m$  в (4), (16), (17) и замена  $m = n+1$  приводит к формулам

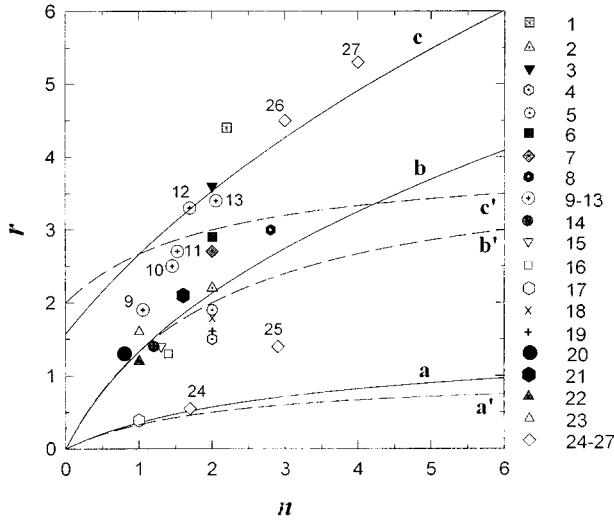
$$\delta_h = r(\Delta M/M)_h \propto \sigma_0^n, \quad (18)$$

$$r = \frac{2n}{n+2 + \frac{2(n+2)}{\pi} B\left(\frac{n+3}{2}, \frac{1}{2}\right)}, \quad (19)$$

где  $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$  — бета-функция,  $\Gamma$  — гамма-функция.

График  $r(n)$ , соответствующий уравнению (19), показан на рис. 3 (кривая  $a$ ). Кривая  $a'$  на рис. 3 показывает  $r_{sec}(n)$ , в соответствии с (13). Когда  $n$  стремится к бесконечности,  $r$  стремится к двум, а  $r_{sec}$  — к единице.

Необходимо отметить, что формула (17) дает отношение  $r$  для обобщенной модели отрыва независимо от конкретных механизмов и особенностей, определяющих нелинейность  $\varepsilon_d(\sigma)$ , как-то механизм отрыва (катастрофический, отрыв двойных, тройных и т.д. сегментов) или вид распределения (дислокационных сегментов по длинам или точек закрепления по силам связи). Таким образом, для всех вариаций модели отрыва можно сделать два важных утверждения: 1) отношение  $r$  не превосходит 2; 2) независимость отношения  $r$  от амплитуды колебаний обеспечивается степенным видом амплитудных зависимостей декремента и дефекта модуля упругости (18); если в первой и третьей четвертях периода функция  $\varepsilon_d(\sigma)$  непрерывна и имеет непрерывную производную, то связь  $n$  и  $r$  дается формулой (19).



**Рис. 3.** Сравнение экспериментальных данных по  $r(n)$  для материалов, перечисленных в табл. 2 (нумерация символов соответствует нумерации рядов), с теоретическими кривыми для  $r$  ( $a, b, c$ ) и  $r_{sec}$  ( $a', b', c'$ ):  $a$  и  $a'$  соответствуют петле Гранато–Люкке (уравнения (19) и (13) соответственно);  $b$  и  $b'$  — петле Давиденкова (уравнения (23) и (12));  $c$  и  $c'$  — петле БВС (уравнения (14) и (26)).

2.2. Гистерезис Давиденкова. Применяя преобразование Фурье, получаем общую формулу дефекта модуля упругости для обобщенного гистерезиса Давиденкова (рис. 2,  $R = 1$ )

$$\left(\frac{\Delta M}{M}\right)_h = -\frac{2M}{\pi\sigma_0^2} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} \varepsilon_d(\sigma) \frac{\sigma d\sigma}{\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma^2}}. \quad (20)$$

Отношение  $r$  выражается в следующем виде:

$$r = \frac{\pi \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} \varepsilon_d(\sigma) d\sigma}{\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} \varepsilon_d(\sigma) \frac{\sigma d\sigma}{\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma^2}}}. \quad (21)$$

Подстановка  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$  и степенной зависимости (1) в (20) приводит к степенной зависимости для дефекта модуля

$$(\Delta M/M)_h = (2M/\pi)\sigma_0^{m-1} \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^m \cos \theta d\theta. \quad (22)$$

Обозначая  $n = m - 1$ , получаем формулу для  $r$

$$r = 2^{n+1}n\pi \left[ (n+2) \int_0^\pi (\cos \theta + 1)^{n+1} \cos \theta d\theta \right]^{-1}. \quad (23)$$

Графическое представление уравнений (12) и (23) также показано на рис. 3 (кривые  $b'$  и  $b$  соответственно). Видно, что для гистерезиса Давиденкова (как и для

моделей отрыва) при небольших значениях показателя степени ( $n < 5$ ) секущий дефект модуля является хорошим приближением для дефекта модуля, получаемого из акустических измерений. По мере роста  $n$  ошибка возрастает (если  $n \rightarrow \infty$ , то  $r \rightarrow \infty$ , а  $r_{sec} \rightarrow 4$ ).

2.3. Гистерезис без возвращающей силы. Для гистерезиса БВС дефект модуля упругости выражается как

$$\left(\frac{\Delta M}{M}\right)_h = \frac{2M}{\pi\sigma_0} \left[ \int_0^{\sigma_0} \varepsilon_d(\sigma) \frac{\sigma d\sigma}{\sigma_0 \sqrt{\sigma_0^2 - \sigma^2}} + \varepsilon_d(\sigma_0) \right], \quad (24)$$

а отношение  $r$  следует из (6) и (24)

$$r = \frac{2\pi\sigma_0\varepsilon_d(\sigma_0) - \pi \int_0^{\sigma_0} \varepsilon_d(\sigma) d\sigma}{\sigma_0\varepsilon_d(\sigma_0) + \int_0^{\sigma_0} \varepsilon_d(\sigma) \frac{\sigma d\sigma}{\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma^2}}}. \quad (25)$$

Как и в двух предыдущих случаях, решением (25) при  $r = \text{const}$  является степенная зависимость дислокационной деформации от напряжения, что приводит к амплитудным зависимостям декремента и дефекта модуля вида (18). Формула для  $r$  получается следующая

$$r = \left[ (n+1)^2 \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \right] \left[ (n+2) \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \right]^{-1}. \quad (26)$$

Уравнение (26) при  $n = 0$  (линейный БВС гистерезис) дает  $r = \pi/2$ . В этом случае мы имеем амплитудно-независимое гистерезисное внутреннее трение, как, например, в случае механизма LDWRF (ограниченное смещение без возвращающей силы), предложенного Греммо [26] для объяснения фона внутреннего трения в твердых растворах.

**Таблица 1.** Соотношения  $r$  и  $r_{sec}$  амплитудно-зависимых декремента и дефекта модуля упругости, рассчитанные для некоторых значений  $n$  в случае степенных зависимостей  $\delta_h = r(\Delta M/M)_h \propto \sigma_0^n$

$n$	Гистерезис Гранато–Люкке		Гистерезис Давиденкова		Гистерезис БВС	
	$r$	$r_{sec}$	$r$	$r_{sec}$	$r$	$r_{sec}$
0	0	0	0	0	1.57	2
0.5	0.21	0.20	0.79	0.80	2.16	2.40
1	0.36	0.33	1.33	1.33	2.67	2.67
2	0.57	0.50	2.13	2.00	3.53	3.00
3	0.71	0.60	2.74	2.40	4.27	3.20
4	0.82	0.67	3.25	2.67	4.91	3.33
5	0.90	0.71	3.69	2.86	5.49	3.43
6	0.97	0.75	4.09	3.00	6.01	3.50
7	1.03	0.78	4.46	3.11	6.50	3.56
8	1.07	0.80	4.79	3.20	6.95	3.60
9	1.11	0.82	5.11	3.27	7.39	3.64
10	1.15	0.83	5.41	3.33	7.80	3.67

Графики  $r(n)$  и  $r_{sec}(n)$  показаны на рис. 3; кривая  $c$  соответствует формуле (26), а кривая  $c'$  — формуле (14). Как и для гистерезиса Давиденкова,  $r = r_{sec}$  при  $n = 1$  и если  $n \rightarrow \infty$ , то  $r \rightarrow \infty$ , а  $r_{sec} \rightarrow 4$ . Видно, что приближение секущего модуля упругости для гистерезиса БВС по мере роста  $n$  дает большую ошибку, чем в двух предыдущих случаях. О величине этой ошибки можно судить по табл. 1, где приведены численные значения  $r$  и  $r_{sec}$  при некоторых значениях  $n$  от 0 до 10 для трех рассмотренных петель.

### 3. АЗВТ и дислокационная деформация

Бейкер [27] в 1962 году предложил простой алгоритм определения средних скоростей дислокаций из данных по амплитудно-зависимому внутреннему трению и фактически показал связь амплитудно-зависимого декремента с дислокационной деформацией. Он использовал пропорциональность декремента и дефекта модуля (2), а также приближенное выражение (3) для дислокационного дефекта модуля. Тогда

$$\varepsilon_{dm} = \varepsilon_0 \delta_h / r. \quad (27)$$

При установившихся колебаниях скорость дислокационной деформации  $\dot{\varepsilon}_d$  пропорциональна деформации  $\varepsilon_{dm}$ :  $\dot{\varepsilon}_d = 4f_0 \varepsilon_{dm}$ , где  $f_0$  — частота колебаний. Тогда средняя скорость дислокаций  $V_{av}$  может быть получена с помощью известного соотношения Орована:  $\dot{\varepsilon}_d = \Lambda b V_{av}$ . Отметим, что (27) не зависит от формы гистерезисной петли.

Асано [6] использовал другой путь для получения дислокационной деформации: а именно получил решение интегрального уравнения (5) в виде

$$\varepsilon_d(\sigma) = \frac{\sigma}{M} \left[ \frac{1}{4} \delta_h(\sigma/2) + \int_0^{\sigma/2} \frac{\delta_h(\sigma_0)}{\sigma_0} \right]. \quad (28)$$

Нишино и Асано [28] использовали (28) для получения зависимостей  $V_{av}(\sigma)$  из данных по АЗВТ, подчеркивая, что такая процедура не требует информации о дефекте модуля упругости.

В частном случае степенной зависимости декремента от амплитуды  $\delta_h \propto \sigma_0^n$  формула (28) приводит к гистерезису Давиденкова. Однако, как следует из раздела 2, гистерезис Давиденкова не является единственным решением уравнения (5). В частности все петли, изображенные на рис. 2, при степенном характере нелинейных участков этих петель с показателем  $m$ , дают степенную амплитудную зависимость декремента с показателем  $n = m - 1$ . Таким образом, только из данных по амплитудно-зависимому декременту невозможно определение абсолютных величин дислокационной деформации и соответственно средних скоростей движения дислокаций. Точнее говоря, использование формулы (28) может привести к ошибке в определении  $\varepsilon_d$  и  $V_{av}$ .

Метод Бейкера [27] использовался в [29,30] для определения из данных по АЗВТ напряжения микротекучести  $\sigma_\varepsilon$ , как амплитуды колебаний, обеспечивающей постоянный уровень  $\varepsilon_{dm}$ . Для широкого класса кристаллов была обнаружена пропорциональность (названная законом подобия) температурных зависимостей напряжений микро- и макротекучести [29,30]. Закон подобия обусловлен, в частности, разделением переменных в амплитудно-температурных зависимостях декремента колебаний:  $\delta_h = f_1(\sigma_0) f_2(T)$ .

Важно отметить, однако, что в частном случае степенных зависимостей (18) ошибка при определении  $\varepsilon_d$  зависит только от показателя  $n$  и, если  $n$  не меняется при изменении внешних воздействий, метод Бейкера [27] дает постоянную ошибку на множитель  $r_{sec}/r$  (небольшую в практически интересных случаях). Метод Асано [6] более информативен, так как позволяет получить не только амплитудное значение дислокационной деформации  $\varepsilon_{dm}$ , но и полный отклик  $\sigma - \varepsilon_d$ , но только в том случае, если форма петли известна хотя бы качественно. Если же она неизвестна, то ошибка в определении  $\varepsilon_d$  даже при небольших  $n$  может достигать значительной величины (хотя надо отметить, что и в этом случае ошибка зависит только от  $n$ ).

### 4. Сравнение с экспериментом

Большинство экспериментальных данных показывает наличие пропорциональности (2) между  $\delta_h$  и  $(\Delta M/M)_h$ , которую как уже отмечалось во введении, впервые зарегистрировал Рид [2] на монокристаллах цинка. Такая пропорциональность (см. раздел 2) является следствием степенного вида (18) амплитудных зависимостей декремента и дефекта модуля, который наблюдается в большом числе экспериментов (см. табл. 2)<sup>1</sup> Таким образом, есть возможность сравнить теоретические кривые  $r(n)$  для разных типов гистерезисных петель с экспериментом.

Данные сведены в табл. 2, а рис. 3 дает их графическое представление вместе с расчетными кривыми для трех типов гистерезисных петель, изображенных на рис. 1 и 2. Сравнение показывает, что большинство экспериментальных точек не соответствует кривой для модели отрыва, а располагается (хотя и с большим разбросом) в районе кривых  $r(n)$  для гистерезиса Давиденкова и гистерезиса БВС. Всего две из 27 точек лежат на кривой, соответствующей модели Гранато–Люкке. Напомним, что эта модель была создана для относительно чистых кристаллов, поэтому возникает вопрос о причинах гистерезиса Гранато–Люкке в таком сложном композиционном материале как алюминий–карбид кремния–графит (строка 17). Этот вопрос пока остается без ответа.

<sup>1</sup> В широком диапазоне амплитуд кривые АЗВТ, как правило, имеют стадийность (см., например, [32,33]). Степенные функции (18) наблюдаются обычно на начальной стадии.

**Таблица 2.** Отношение  $r$  амплитудно-зависимых декремента к дефекту модуля упругости для различных кристаллов в случае степенной аппроксимации:  $\delta_n = r(\Delta M/M) \propto \sigma_0^n$

№ строки	Материал	Примеси, %	$T$ , К	$f$ , kHz	$r$	$n$	Источник, (неуказанные номера ссылок см. в [13,14])
1	Cu, s., ps.	0.002	293	33.5	4.4	2.1	Read, 1941 [3]
2	Cu, s., ann.	0.01	293	39.8	2.2	2	Nowick, 1950 [4]
3	Cu, s., ps.		213–306		3.6		
4	Cu, s., ann.	0.01 Si	5	80	1.5	2	Saul, Bauer, 1968
5		0.01 Si	81		1.9		
6		0.01 Si	294		2.9		
7		0.005 Ge	76–210		2.7		
8	Cu–Al, p., q.	1.38 Al	293	1	3	2.8	Takahashi, 1956
9	Cu–P, p.	0.002 P	293	2.7	1.8	1.05	Там же
10		0.006 P			2.3	1.44	
11		0.021 P			2.7	1.52	
12		0.062 P			3.1	1.69	
13		0.207 P			3.3	2.05	
14	Cu–Si–Mn, p., ps.	1.6 Si, 1.4 Mn	7–293	100	1.4	1.2	Lebedev, Pilecki, 1995
15	Al, s.	0.66 Si, 0.22 Fe	6.5–293	100	1.4	1.3	Lebedev, Ivanov, 1993
16	Al–Al <sub>2</sub> Cu, eu.	композит	6.5–293	100	1.3	1.4	Lebedev, Nikanorov, 1996
17	6061Al/SiC/Gr	композит	343	0.001	0.39	1	Zhang et al., 1997 [31]
18	NaF, s., ps.	0.01	293	100	1.8	2	Lebedev et al., 1989
19	NaF, s., ps.	0.01	4.2–295	100	1.6	2	Kardashev et al., 1974
20	LiF, s., ps.	0.01	293	0.0005	1.3	0.8	Kustov et al., 1988
21	NaCl, s., ps.	0.01	293	0.0005	2.1	1.6	Там же
22	MgO, s., ps.	0.2	65–295	100	1.2	1	Kardashev et al., 1985
23	Zn, s., $\theta = 0^\circ$ , ps.	0.003	293	100	1.6	1	Lebedev et al., 1993
24	Zn, s., ann., $\theta = 88^\circ$	0.001	293	39	0.55	1.7	Read, 1940 [2]
25	$\theta = 20^\circ$				1.4	2.9	
26	$\theta = 74.5^\circ$				4.5	3	
27	$\theta = 61.3^\circ$				5.3	4	

Примечание. s. — монокристалл, p. — поликристалл, eu. — эвтектический сплав, ann. — отожженный, q. — закаленный, ps. — деформированный,  $\theta$  — угол между нормалью к базисной плоскости и осью образца.

Отметим, что ориентационная зависимость параметра  $r$ , обнаруженная Ридом еще в 1940 году [2], впервые находит разумное объяснение. Эта зависимость вполне может быть обусловлена сменой механизма дислокационного гистерезиса от отрыва по Гранато–Люкке для пирамидальной системы скольжения до гистерезиса БВС для базисных дислокаций. Для ориентаций, когда работают обе системы (строка 25 в табл. 2), значение  $r$  принимает промежуточное значение, зависящее от относительного вклада в гистерезисное поглощение звука той или иной системы.

Интересно также, что данные Новика [4] (строки 2 и 3 в табл. 2) для отожженной меди соответствуют гистерезису Давиденкова, а для слегка деформированной меди — гистерезису без возвращающей силы. Это означает, что в отожженной меди возвращающая сила обеспечивается облаками Котрелла, формируемыми при отжиге. Небольшая пластическая деформация при комнатной температуре приводит к освобождению старых дислокаций от этих атмосфер и появлению новых дислокаций, изначально свободных от примесей. Поскольку в меди подвижность точечных дефектов при комнат-

ной температуре невелика [34], то пробеги дислокаций становятся значительно больше, чем радиус действия атмосфер Котрелла, ответственных за возвращающую силу.

В сплавах Cu–P (строки 9–13) увеличение концентрации фосфора до 0.06% вызывает уменьшение параметра эффективности возвращающей силы до величины  $R = 0$ , что свидетельствует о полной компенсации этой силы примесным закреплением дислокаций в точках их максимального смещения из положений равновесия, т. е. реализуется чистая БВС петля.

Таким образом, сравнение теоретических кривых с результатами экспериментов показывает, что все рассмотренные типы петель дислокационного гистерезиса могут реализовываться на практике, а отношение  $r$  декремента к дефекту модуля может служить идентификатором формы петли.

Кроме этого, к основным выводам работы можно отнести следующие.

1) Один и тот же функциональный вид  $\delta_n(\varepsilon_0)$  может быть обусловлен разными формами петель дислокационного гистерезиса, однако для данного амплитудно-

зависимого декремента колебаний имеет место взаимнооднозначное соответствие между дефектом модуля упругости и формой петли гистерезиса, имеющей ось симметрии второго порядка.

2) Для трех типов дислокационного гистерезиса выведены формулы амплитудных зависимостей дефекта модуля упругости, а также отношения  $r$  и показано, что в общем случае  $r$  зависит от амплитуды колебаний, при этом в моделях отрыва величина  $r$  не превосходит двух, а в моделях трения она может меняться от нуля до бесконечности, в частном случае степенных зависимостей (18) декремента и дефекта модуля упругости  $r$  не зависит от амплитуды колебаний, а зависит только от показателя степени  $n$ .

3) Дислокационная деформация, полученная из данных по АЗВТ с использованием алгоритма Бейкера [27], отличается от истинных значений, однако в случае степенных амплитудных зависимостей (18) как уравнение (27), так и метод Асано (28) могут дать отличие в  $\varepsilon_d$  лишь на постоянные множители, являющиеся функцией  $n$ .

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность А.В. Гранато (University of Illinois) за удовольствие научного и человеческого общения с ним, многочасовые дискуссии и исключительно полезные замечания. Автор также благодарен S. Asano и Y. Nishino (Nagoya Institute of Technology, Japan), Н.А. Тяпуниной (МГУ), Е.К. Наими (МИСиС), С.П. Никанорову, Б.К. Кардашеву, С.Б. Кустову и Б.И. Смирнову (ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН) за плодотворные обсуждения.

Работа частично была выполнена в университете Иллинойс США (University of Illinois at Urbana-Champaign), где поддерживалась грантом NSF (DMR 93-19773).

## Список литературы

- [1] Н.Н. Давиденков. ЖТФ **8**, 6, 483 (1938).
- [2] T.A. Read. Phys. Rev. **58**, 4, 371 (1940).
- [3] T.A. Read. Trans. AIME **143**, 30 (1941).
- [4] A.S. Nowick. Phys. Rev. **80**, 2, 249 (1950).
- [5] A.V. Granato, K. Lücke. J. Appl. Phys. **27**, 6, 583 (1956).
- [6] S. Asano. J. Phys. Soc. Japan **29**, 4, 141 (1970).
- [7] K. Ishii. J. Phys. Soc. Japan **52**, 1, 952 (1983).
- [8] A.S. Nowick, B.S. Berry. Anelastic Relaxation in Crystalline Solids. Academic Press, N.Y. (1972).
- [9] O. Boser. J. Appl. Phys. **54**, 5, 2338 (1983).
- [10] Е.К. Наими. Phys. Stat. Sol. (a) **72**, 2, 825 (1982); ФММ **54**, 3, 601 (1982).
- [11] A.V. Granato. PhD Thesis, Brown University, Providence (1955).
- [12] J.S. Koehler. Imperfections in Nearly Perfect Crystals / Ed. by W. Shockley, J.H. Hollomon, R. Mauerer, F. Seitz. Wiley, N.Y. (1952). P. 197.
- [13] A.B. Lebedev. Philos. Mag. **A74**, 1, 137 (1996).
- [14] A.B. Lebedev. J. de Physique IV **6**, C8, C8–325 (1996).
- [15] V.L. Indenbom, V.M. Chernov. Phys. Stat. Sol. (a) **14**, 1, 347 (1972).
- [16] A.V. Granato, K. Lücke. J. Appl. Phys. **52**, 12, 7136 (1981).
- [17] M. Gabbay, A. Vincent, G. Fantozzi. Phys. Stat. Sol. (a) **100**, 1, 121 (1987).
- [18] R.B. Schwarz. Acta Metall. **29**, 2, 311 (1981).
- [19] В.И. Белан, А.И. Ландау. ФММ **65**, 2, 259 (1988).
- [20] H. Kressel, N. Brown. Dislocation Dynamics / Ed by A.R. Rosenfield, G.T. Hahn, A.L. Bement, R.I. Jaffe. McGraw-Hill, N.Y. (1968). P. 337.
- [21] S.B. Kustov, S.N. Golyandin. M<sup>3</sup>D III: Mechanics and Mechanisms of Materials Damping / Ed. by A. Wolfenden, V.K. Kinra. ASTM (1997). P. 22.
- [22] B.J. Lazan. Damping of Materials and Members in Structural Mechanics, Pergamon Press, Oxford (1968).
- [23] Y. Nishino, S. Asano. Phys. Stat. Sol. (a) **138**, 1, K9 (1993).
- [24] С.Б. Кустов. Автореф. канд. дисс. ФТИ им. А.Ф.Иоффе, Л. (1989).
- [25] A.B. Lebedev, S.B. Kustov. Phys. Stat. Sol. (a) **136**, 2, K85 (1993).
- [26] G. Gremaud. J. de Physique **48**, C8, C8–15 (1987).
- [27] G.S. Baker. J. Appl. Phys. **33**, 1730 (1962).
- [28] Y. Nishino, S. Asano. Phys. Stat. Sol. (a) **151**, 1, 83 (1995).
- [29] A.B. Lebedev, S.B. Kustov. Phys. Stat. Sol. (a) **116**, 2, 645 (1989).
- [30] A.B. Lebedev, J. Alloys Comp. **211–212**, 177 (1994); J. de Phys. IV **6**, C8, C8–255 (1996).
- [31] J. Zhang, R.J. Perez, E.J. Lavrenia. M<sup>3</sup>D III: Mechanics and Mechanisms of Materials Damping / Ed. by A. Wolfenden, V.K. Kinra. ASTM (1997). P. 313.
- [32] С.П. Никаноров, Б.К. Кардашев. Упругость и дислокационная неупругость кристаллов. Наука, М (1985).
- [33] Б.И. Смирнов, В.А. Челноков, Н.Л. Кузьмин. ФТТ **25**, 2, 519 (1983).
- [34] R.B. Schwarz. J. de Physique **46**, C10, C10–207 (1985).