

Полевая теория флуктуаций при фазовых переходах

© А.И. Олемской, В.А. Бражный

Сумский государственный университет,
244007 Сумы, Украина

E-mail: Alexander@olem.sumy.ua valera@ssu.sumy.ua

(Поступила в Редакцию 27 октября 1998 г.

В окончательной редакции 10 февраля 1999 г.)

В рамках самосогласованной схемы исследуется эволюция наиболее вероятных амплитуд гидродинамической моды и флуктуация сопряженной силы.

Влияние флуктуаций на картину фазового перехода является объектом интенсивных исследований на протяжении последних десятилетий (см. [1,2]). Современная концепция основывается на гипотезе подобия, согласно которой поведение корреляторов флуктуирующих величин приобретает в критической области универсальный характер, исследуемый с помощью полевых методов [3]. Характерно, что при этом рассматривается поведение средних, а не наиболее вероятных величин. Так, в рамках теории Ландау [4] исследуется самосогласованное изменение параметра порядка, сводящегося к моменту первого порядка $\langle \psi \rangle$ от флуктуирующей амплитуды ψ гидродинамической моды. В приближении среднего поля величина $\langle \psi \rangle$ не зависит от интенсивности флуктуаций, роль которых сводится к эффекту спускового крючка, инициирующего течение фазового перехода.

Следует, однако, иметь в виду, что описание стохастической системы может быть достигнуто не только определением средних величин, но и наиболее вероятных значений. В рамках полевой схемы выражение для вероятности имеет экспоненциальную форму с показателем, который с точностью до знака сводится к стандартному действию [3]. Поэтому описание фазового перехода с помощью наиболее вероятных значений отвечает использованию принципа наименьшего действия. Мы покажем, что указанный подход позволяет распространить метод самосогласованного поля на описание флуктуирующих величин. В рамках такой схемы обнаруживается весьма нетривиальная особенность: при некотором соотношении масштабов неоднородности системы наиболее вероятные значения с течением времени стремятся не к минимумам свободной энергии $F(\psi)$, где $\partial F/\partial \psi = 0$, а к точкам, в которых $\partial^3 F/\partial \psi^3 = 0$.

Для определения пространственно-временной зависимости амплитуды гидродинамической моды $\psi(\mathbf{r}, t)$ будем исходить из уравнения Ланжевена

$$\dot{\psi}(\mathbf{r}, t) = -\gamma \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \psi(\mathbf{r}, t)} + \zeta(\mathbf{r}, t). \quad (1)$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени t , \mathbf{r} — координата, γ — кинетический коэффициент,

$$\mathcal{F} = \int \left[F(\psi) + \frac{\beta}{2} |\nabla \psi|^2 \right] d\mathbf{r}, \quad (2)$$

$F(\psi)$ — удельный термодинамический потенциал, $\beta > 0$ — постоянная, $\nabla \equiv \partial/\partial \mathbf{r}$; $\zeta(\mathbf{r}, t)$ — стохастическое слагаемое, представляющее белый шум

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{0}, 0) \rangle = T \delta(\mathbf{r}) \delta(t), \quad (3)$$

угловые скобки означают усреднение, T — температура. Далее удобно перейти к безразмерным величинам, относив координату \mathbf{r} к межатомному расстоянию a , время t к масштаб $a^3/T\gamma$, величину F к T/a^3 , флуктуацию ζ к $T\gamma/a^3$. Тогда уравнение (1) принимает канонический вид

$$\dot{\psi}(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) + \zeta(\mathbf{r}, t),$$

$$f(\mathbf{r}, t) \equiv -\partial F/\partial \psi + \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

где $f(\mathbf{r}, t)$ — сила, сопряженная параметру порядка (ее величина определена с учетом пространственной неоднородности). Область применимости приближения Гинзбурга–Ландау (2) определяется условием, согласно которому масштаб a намного меньше корреляционной длины $\xi = \beta^{1/2} |\partial^2 F/\partial \psi^2|_{\psi=0}^{-1/2}$ [4]. Проводя усреднение выражения (4), в пренебрежении корреляциями получаем уравнение Ландау–Халатникова для параметра порядка $\langle \psi(\mathbf{r}, t) \rangle$.

Стандартная полевая схема [3] основывается на исследовании производящего функционала, отвечающего стохастическому уравнению (4). Он представляет функциональное преобразование Лапласа

$$Z\{u(\mathbf{r}, t)\} = \int Z\{\psi(\mathbf{r}, t)\} \exp \left(\int u \psi d\mathbf{r} dt \right) D\psi(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

для статистической суммы

$$Z\{\psi(\mathbf{r}, t)\} = \left\langle \prod_{(\mathbf{r}, t)} \delta\{\dot{\psi}(\mathbf{r}, t) - f(\mathbf{r}, t) - \zeta(\mathbf{r}, t)\} \det \left| \frac{\delta \zeta(\mathbf{r}, t)}{\delta \psi(\mathbf{r}, t)} \right| \right\rangle. \quad (6)$$

Здесь аргумент δ -функции сводится к уравнению Ланжевена (4), а детерминант, обеспечивающий переход от континуального интегрирования по $\zeta(\mathbf{r}, t)$ к $\psi(\mathbf{r}, t)$, равен в исчислении Ито единице.

В рамках стандартного подхода [3] n -кратное варьирование функционала (5) по вспомогательному полю $u(\mathbf{r}, t)$ позволяет найти коррелятор n -го порядка для амплитуды гидродинамической моды $\psi(\mathbf{r}, t)$ и построить теорию возмущений. Мы, однако, будем исходить из выражения (6) для сопряженного функционала $Z\{\psi(\mathbf{r}, t)\}$, варьирование которого приводит к наиболее вероятной реализации стохастического поля $\psi(\mathbf{r}, t)$. Очевидно, в рамках приближения среднего поля функционал (6) сводится к зависимости $Z\{\langle\psi(\mathbf{r}, t)\rangle\}$, которая отвечает свободной энергии Ландау $F\{\langle\psi(\mathbf{r}, t)\rangle\} = -T \ln Z\{\langle\psi(\mathbf{r}, t)\rangle\}$ [4].

Переходя к рассмотрению функционала (6), представим δ -функцию в интегральном виде

$$\delta\{x(\mathbf{r}, t)\} = \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp\left(-\int \phi x d\mathbf{r} dt\right) D\phi. \quad (7)$$

Тогда, проводя усреднение по шуму ζ с помощью гауссова распределения

$$P_0\{\zeta\} \propto \exp\left\{-\frac{1}{2} \int \zeta^2(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt\right\}, \quad (8)$$

отвечающего (3), с учетом (7) приводим функционал (6) к стандартному виду

$$Z\{\psi(\mathbf{r}, t)\} = \int P\{\psi(\mathbf{r}, t), \phi(\mathbf{r}, t)\} D\phi, \quad P \equiv e^{-S}. \quad (9)$$

Здесь распределение вероятности $P\{\psi, \phi\}$ задается действием $S = \int L d\mathbf{r} dt$, где лагранжиан

$$L(\psi, \phi) = \phi(\dot{\psi} - f) - \phi^2/2. \quad (10)$$

Далее используем уравнения Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \nabla^2 \frac{\partial L}{\partial \nabla^2 x} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad x \equiv \{\psi, \phi\}, \quad (11)$$

где диссипативная функция

$$R = \dot{\psi}^2/2. \quad (12)$$

В результате уравнения для наиболее вероятных реализаций $\eta(\mathbf{r}, t)$, $\varphi(\mathbf{r}, t)$ стохастических полей $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\phi(\mathbf{r}, t)$ принимают вид

$$\dot{\eta} = (\nabla^2 \eta - \partial F / \partial \eta) + \varphi, \quad (13)$$

$$\dot{\varphi} = -\nabla^2 \varphi - \varphi(1 - \partial^2 F / \partial \eta^2) - (\nabla^2 \eta - \partial F / \partial \eta). \quad (14)$$

Сравнение (13) с совпадающим по виду стохастическим уравнением (4) показывает, что поля $\eta(\mathbf{r}, t)$, $\varphi(\mathbf{r}, t)$ представляют наиболее вероятные значения амплитуд гидродинамической моды и флуктуаций сопряженной силы. Далее для краткости будем обозначать величины η и φ как параметр порядка и амплитуду флуктуаций сопряженной силы.

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что неоднородность параметра порядка $\eta(\mathbf{r}, t)$ имеет обычный диссипативный характер, тогда как неоднородность

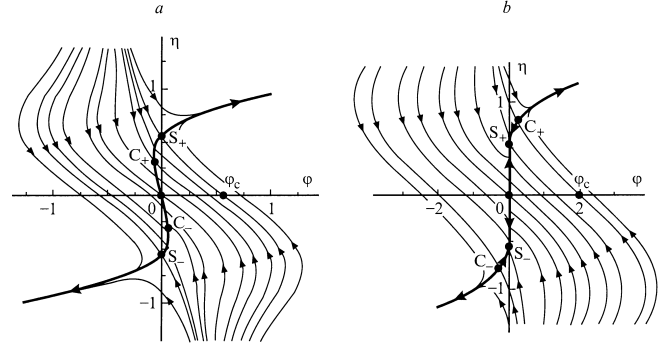


Рис. 1. Фазовый портрет для η^4 -модели ($\varepsilon = -0.3$; $\xi = 10^5$): $\lambda = 10^5$ (a); $\lambda = 0.8$ (b).

поля флуктуаций входит с противоположным знаком. Поскольку далее нас интересует только характер временной зависимости, то воспользуемся простейшим приближением для градиентных слагаемых

$$\nabla^2 \eta \rightarrow \xi^{-2} \eta, \quad \nabla^2 \varphi \rightarrow \lambda^{-2} \varphi, \quad (15)$$

где корреляционная длина ξ и параметр λ определяют масштабы пространственных неоднородностей амплитуд гидродинамической моды и флуктуаций силы. В результате уравнения (13), (14) принимают вид

$$\dot{\eta} = (\xi^{-2} \eta - \partial F / \partial \eta) + \varphi, \quad (16)$$

$$\dot{\varphi} = -\varphi [(1 + \lambda^{-2}) - \partial^2 F / \partial \eta^2] - (\xi^{-2} \eta - \partial F / \partial \eta). \quad (17)$$

Рассмотрим сначала фазовый переход второго рода, для которого термодинамический потенциал представляется η^4 -моделью

$$F(\eta) = \frac{\varepsilon}{2} \eta^2 + \frac{1}{4} \eta^4, \quad \varepsilon \equiv \frac{T - T_c}{T_c}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (16) и (17), получаем систему уравнений

$$\dot{\eta} = \varphi + \eta [(\xi^{-2} - \varepsilon) - \eta^2], \quad (19)$$

$$\dot{\varphi} = \varphi \{ -[(1 + \lambda^{-2}) - \varepsilon] + 3\eta^2 \} - \eta [(\xi^{-2} - \varepsilon) - \eta^2], \quad (20)$$

анализ которых требует использования метода фазовой плоскости [5]. В условиях применимости приближения Гинзбурга–Ландау (2) корреляционная длина $\xi \gg 1$, и величина градиентных слагаемых, содержащих параметр порядка, не сказывается на виде фазового портрета (рис. 1). Он характеризуется наличием особых точек

$$O(0; 0), \quad S_{\pm}(0; \pm(\xi^{-2} - \varepsilon)^{1/2}), \\ C_{\pm}(\pm 3^{-3/2}(\lambda^{-2} - \varepsilon)^{1/2}[(\lambda^{-2} - 3\xi^{-2}) + 2\varepsilon]; \\ \pm 3^{-1/2}(\lambda^{-2} - \varepsilon)^{1/2}). \quad (21)$$

При больших λ точки O и S_{\pm} являются седлами, а C_{\pm} — устойчивыми узлами (рис. 1, a). Уменьшение параметра λ приводит к смещению узлов C_{\pm} к седлам S_{\pm} , и при критическом значении $\lambda_c = (3\xi^{-2} - 2\varepsilon)^{-1/2}$

они сливаются. При дальнейшем уменьшении параметра λ узлы C_{\pm} становятся седлами, а седла S_{\pm} — узлами (рис. 1, *b*).

Характерная особенность приведенных фазовых портретов состоит в том, что эволюция системы происходит в области, ограниченной критическим значением φ_c амплитуды флуктуаций, отвечающей $\eta = 0$ (при выходе за эту область величины η и φ неограниченно возрастают в пределе $t \rightarrow \infty$, что в соответствии с (9), (10) приводит к вероятности $P \rightarrow 0$). С удалением от критической температуры величина φ_c монотонно увеличивается. Рост параметра неоднородности в области $\lambda < \lambda_c$ приводит к уменьшению критической флуктуации φ_c , а при значениях $\lambda > \lambda_c$ размер флуктуационной области не меняется.

При использовании η^6 -модели

$$F = \frac{\varepsilon}{2}\eta^2 - \frac{1}{4}\eta^4 + \frac{1}{6}\eta^6 \quad (22)$$

для фазового перехода первого рода уравнения (16), (17) принимают вид

$$\dot{\eta} = \varphi - \eta[-(\xi^{-2} - \varepsilon) - \eta^2 + \eta^4], \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = \varphi \left\{ - \left[(1 + \lambda^{-2}) - \varepsilon \right] - 3\eta^2 + 5\eta^4 \right\} \\ + \eta \left[-(\xi^{-2} - \varepsilon) - \eta^2 + \eta^4 \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Соответствующий фазовый портрет характеризуется особыми точками

$$\begin{aligned} O(0; 0), \quad S_1^{\pm}(0; \pm\gamma_{-}), \quad S_2^{\pm}(0; \pm\gamma_{+}), \\ C_1^{\pm}(\pm 5^{-2}(5\lambda^{-2} - 25\xi^{-2} - 3(1 - \beta) + 20\varepsilon)\alpha_{-}; \pm\alpha_{-}), \\ C_2^{\pm}(\pm 5^{-2}(5\lambda^{-2} - 25\xi^{-2} - 3(1 + \beta) + 20\varepsilon)\alpha_{+}; \pm\alpha_{+}), \\ \alpha_{\pm} \equiv (3/10)^{1/2}(1 \pm \beta)^{1/2}, \\ \beta \equiv [1 + (20/9)(\lambda^{-2} - \varepsilon)]^{1/2}, \\ \gamma_{\pm} \equiv \left\{ 2^{-1} \pm [2^{-2} + (\xi^{-2} - \varepsilon)]^{1/2} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (25)$$

По сравнению с соответствующим набором (21) для перехода второго рода их число увеличивается от 5 до 9. Это обусловлено появлением пары центрально-симметричных сепаратрис, расположенных между присутствующими η^4 -модели сепаратрисами, проходящими через точки $(0; 0)$, $(\pm\varphi_c; 0)$ на рис. 1. Очевидно, появление дополнительных сепаратрис отражает наличие энергетических барьеров в области промежуточных значений η зависимости (22).

Как и для η^4 -модели, учет неоднородности параметра порядка не изменяет вида фазового портрета, тогда как неоднородность флуктуаций силы сказывается существенным образом. Действительно, с уменьшением параметра λ узлы C_1^{\pm} и седло O сближаются и сливаются в единый узел при $\lambda_{c1} = \varepsilon^{-1/2}$. В свою очередь узлы C_2^{\pm} движутся по сепаратрисам к седлам S_2^{\pm} , сливаясь с ними

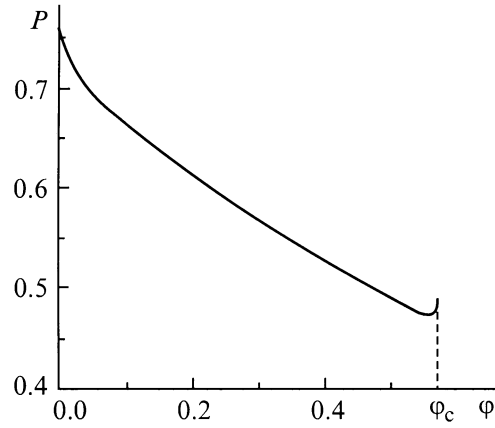


Рис. 2. Вероятность реализации фазовых траекторий с начальными условиями $(\varphi_0, 0)$ для η^4 -модели ($\varepsilon = -0.3$; $\xi = \lambda = 10^5$).

при значении $\lambda_{c2} = (\varepsilon - 3\gamma_{+}^2 + 5\gamma_{+}^4)^{-1/2}$. С дальнейшим уменьшением параметра λ точки C_2^{\pm} становятся седлами и продолжают движение по сепаратрисам, тогда как точки S_2^{\pm} , трансформировавшиеся в устойчивые узлы, по-прежнему остаются на оси η .

Согласно (9), вероятность реализации фазовой траектории, отвечающей начальным условиям $(\varphi_0, 0)$, представляется в виде

$$P \propto \exp \left\{ - \int (\varphi^2/2) dt \right\}, \quad (26)$$

где учтены выражения (10), (13). Соответствующая зависимость для перехода второго рода показана на рис. 2, из которого видно, что вероятность (26) монотонно возрастает с приближением к началу координат. Незначительное увеличение наблюдается также вблизи точки φ_c , отвечающей сепаратрисе. Вне области, ограниченной сепаратрисой, имеем $P(\varphi) = 0$, поскольку здесь $\varphi(t) \rightarrow \pm\infty$ при $t \rightarrow \infty$. В случае перехода первого рода зависимость, приведенная на рис. 2, сохраняет спадающий характер с той разницей, что указанное незначительное увеличение вероятности наблюдается вблизи критического значения φ , отвечающего дополнительной сепаратрисе.

Указанное поведение вероятности $P(\varphi_0)$ объясняется характером временной зависимости $\varphi(t)$ амплитуды флуктуаций в процессе релаксации начального значения φ_0 . Вдали от участка OCS (рис. 1) величина φ быстро меняет свое значение, а с приближением к нему происходит замедление. Такое поведение объясняется тем, что вблизи указанного участка действие $S\{\eta(\mathbf{r}, t), \varphi(\mathbf{r}, t)\}$ изменяется намного медленнее, чем вдали от него. Наглядно это можно представить, ассоциируя участок OCS с руслом большой реки [6].

Рассмотренное выше самосогласованное поведение флуктуаций сопряженной силы и гидродинамической моды, ответственной за упорядочение, позволяет пред-

ставить координаты фазовой плоскости η и φ как компоненты единого вектора в суперсимметричном пространстве [7,8]. Как известно [9], формальное условие такого представления, означающего наличие суперсимметрии, состоит в требовании, что суперпотенциал $\partial F/\partial\eta$ приобретает разные знаки в пределах $\eta \rightarrow +\infty$ и $\eta \rightarrow -\infty$. Очевидно, для использованных моделей (18), (22) это условие, означающее неограниченное нарастание свободной энергии $F(\eta)$ при $\eta \rightarrow \pm\infty$, выполняется автоматически. В отличие от указанного условия, имеющего глобальный характер, наличие стационарного состояния требует локальной суперсимметрии. Это означает, что вблизи точек суперсимметричного пространства, отвечающих стационарному состоянию, отсутствует выделенное направление (наличие такой симметрии приводит к флуктуационно-диссипативной теореме [3]). В рамках развитой схемы локальная суперсимметрия сводится к тривиальному требованию: на фазовом портрете должны существовать особые точки, вблизи которых характер поведения траекторий не зависит от направления. Очевидно, такие точки могут быть только центрами или узлами (но не седлами, вблизи которых локальная симметрия нарушается). Наличие диссипации приводит к отбору притягивающих узлов, а глобальная суперсимметрия ограничивает их положения конечными значениями параметра порядка η . В результате стационарное состояние системы отвечает притягивающим узлам, в которых, согласно уравнениям движения (16), (17), выполняются условия

$$\partial^2 F/\partial\eta^2 = \lambda^{-2}, \quad \varphi = \partial F/\partial\eta - \xi^{-2}\eta \equiv -f. \quad (27)$$

Первое из них определяет восприимчивость λ^2 на масштабе λ , согласно второму — наиболее вероятное значение φ флуктуации самосогласованной силы противоположно по знаку ее величине f . Как видно из рис. 1, в зависимости от величины параметра неоднородности флуктуаций λ возможны два типа стационарных состояний. При сильно неоднородном распределении флуктуаций ($\lambda < \lambda_c$) притягивающий узел отвечает точке S на рис. 1, b , где амплитуда флуктуаций $\varphi = 0$. Согласно (27), при этом реализуется равновесное термодинамическое состояние $f = 0$. В противоположном случае $\lambda > \lambda_c$, отвечающем фазовому портрету на рис. 1, a , система стремится к точке C , в которой φ и $\eta \neq 0$, но $\partial^3 F/\partial\eta^3 = 0$.

Укажем в заключение на очевидную аналогию развитой схемы с теорией Гинзбурга–Ландау для сверхпроводников, характер поведения которых определяется отношением λ/ξ масштабов изменения магнитного поля (ему отвечает амплитуда флуктуаций) и параметра порядка [10]. Как известно, при закритических значениях λ/ξ реализуется смешанное состояние, представляющее стационарную гетерогенную смесь нормального и сверхпроводящего состояний. В нашем случае ему отвечает чередование областей с повышенными значениями параметра порядка или амплитуды флуктуаций. Поскольку

размер первых определяется корреляционной длиной ξ , а вторых — масштабом λ , то такое гетерогенное состояние сводится не к смеси фаз, а представляет единое термодинамическое состояние. Согласно проведенному анализу, оно реализуется вне области фазового портрета, ограниченной критическим значением φ_c начальной флуктуации φ_0 . Поскольку при $\varphi_0 > \varphi_c$ происходит неограниченное нарастание амплитуды флуктуаций $\varphi(t)$ и параметра порядка $\eta(t)$ (рис. 1), то это означает неустойчивость относительно генерогенизации системы. Однако, согласно рис. 2, вероятность протекания процесса, реализующего такую неустойчивость, равна нулю.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства науки Украины (грант № 2.4/4).

Список литературы

- [1] А.З. Паташинский, В.Л. Покровский. Флуктуационная теория фазовых переходов. Наука, М. (1982). 381 с.
- [2] C. Domb. The critical point. Taylor & Francis, London (1996). 376 p.
- [3] J. Zinn-Justin. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Clarendon Press, Oxford (1994). 996 с.
- [4] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Статистическая физика. Наука, М. (1976). 584 с.
- [5] А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. Теория колебаний. Наука, М. (1981). 568 с.
- [6] А.И. Олемской, А.В. Хоменко. ЖЭТФ **110**, 6(12), 2144 (1996).
- [7] А.И. Olemskoi, I.V. Kopylyk, V.A. Brazhnyi. J. Phys. Studies **1**, 3, 324 (1997).
- [8] А.И. Олемской, И.В. Коплык. УФН **165**, 10, 1105 (1995).
- [9] Л.Э. Генденштейн, И.В. Криве. УФН. **146**, 4, 553 (1985).
- [10] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Статистическая физика. Ч. 2. Наука, М. (1978). 488 с.