

Дислокации и дисклинации в градиентной теории упругости

© М.Ю. Гуткин, Е.С. Айфантис*,**

Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
199178 Санкт-Петербург, Россия

* Aristotle University of Thessaloniki, 54006 Thessaloniki, Greece

** Michigan Technological University, MI 49931 Houghton, USA

E-mail: gutkin@def.ipme.ru

(Поступила в Редакцию 16 апреля 1999 г.)

Рассмотрены результаты применения градиентной теории упругости для описания упругих полей и энергий дислокаций и дисклинаций. Основным достижением такого подхода является устранение классических расходимостей на линиях дефектов и возможность описания короткодействующих взаимодействий между ними на наноскопическом уровне. В рамках одной из версий градиентной теории упругости получены несингулярные решения для полей напряжений и деформаций прямолинейных дисклинаций в бесконечной изотропной среде. Описано поведение упругих полей вблизи дисклинационных линий и особенности короткодействующих взаимодействий между дисклинациями, изучение которых невозможно в классической линейной теории упругости. Показано, что значения деформаций и напряжений на линиях дисклинаций сильно зависят от величины плеча диполя d . При короткодействующих междисклинационных взаимодействиях, когда d меняется от нуля до нескольких межатомных расстояний, эти значения меняются монотонно в случае клиновых дисклинаций и немонотонно в случае дисклинаций кручения, равномерно стремясь к нулю при аннигиляции дисклинаций. На расстояниях от дисклинационных линий, превышающих несколько межатомных, градиентные и классические решения совпадают. Как и в классической теории упругости, градиентное решение для диполя клиновых дисклинаций преобразуется в известное градиентное решение для краевой дислокации при d , много меньших межатомного расстояния.

1. Традиционное описание упругих полей и энергии дисклинаций основано на решениях, полученных в рамках линейной теории упругости [1–3]. В изотропном случае соответствующие выражения для тензоров деформации и напряжений довольно просты, что позволяет широко их использовать при моделировании структуры и механического поведения самых различных материалов: от обычных металлов, сплавов и композитов [3,4] до наночастиц [3,5,6], наноструктурных материалов [6–9], металлических стекол [3,6,7,10–13] и тонкопленочных гетероэпитаксиальных систем [14,15]. Однако некоторые компоненты этих полей расходятся на линиях дисклинаций, что создает большие неудобства при теоретическом описании таких ситуаций, в которых требуется знание напряжений и деформаций вблизи дисклинационных линий. Например, это относится к дисклинационным моделям границ зерен, структуры металлических стекол и механического поведения нанокристаллических материалов, когда приходится иметь дело с дисклинационными ансамблями высокой плотности. Таким образом, возникают те же проблемы, что и при использовании хорошо известных решений для упругих полей вблизи дислокаций [1,16] или трещин [17,18], рассматриваемых в классической линейной теории упругости.

Первые попытки модифицировать упругие поля этих дефектов, оставаясь в рамках моделей сплошной среды, были направлены на учет влияния моментных напряжений [18–26]. Дислокации [19–25], дисклинации [25,26] и трещины [18] рассматривались как в континууме Коссера, так и в микрополярной среде. Были найдены решения для упругих напряжений и деформаций,

которые отличались от решений классической теории упругости, но содержали тем не менее все те же расходимости на линиях дислокаций и дисклинаций и в устьях трещин.

Следуя классификации Кунина [27], континуум Коссера и микрополярный континуумы можно рассматривать как сплошные среды со слабой нелокальностью упругих свойств, которая выражается в появлении в выражении для упругой энергии дифференциальных операторов второго и более высоких порядков над полем перемещений и соответствующих дополнительных материальных констант. Рассмотрение дефектов в средах с сильной нелокальностью, где имеется интегральная связь между тензорами упругих деформаций и напряжений, дает существенно лучшие результаты — пропадают расходимости в полях напряжений на линиях дислокаций [27–31] и дисклинаций [31], а также в устьях трещин [29,32,33]. При этом наиболее эффективными оказались модели квазиконтинуума [27,28], учитывающие дискретность структуры твердого тела. В замкнутом аналитическом виде были получены поля напряжений для прямолинейных винтовых и краевых дислокаций, нулевые на дислокационной линии, достигающие максимальных значений на некоторых расстояниях от нее, а затем убывающие со слабыми осцилляциями относительно классического решения. Решение этих же задач в модели упругого континуума с интегральной связью между напряжениями и деформациями потребовало введения α priori вида интегрального ядра в определяющем соотношении. Решения для винтовых дислокаций получались в другом аналитическом виде и в предельном

случае перехода к локальной упругости сводились к классическому виду [29]. В случае краевых дислокаций решение получалось только в интегральном виде и такой предельный переход сделать не удавалось [29]. При этом характерные для квазиконтинуума слабые осцилляции не проявлялись. Интересно, что решения для полей перемещений и упругих деформаций здесь оставались точно такими же, что и в классической локальной упругости, т. е. имевшиеся классические расходимости сохранялись. Заметим, что, хотя автор [31] использовал полностью аналогичные модели нелокального континуума, он не отмечал эти особенности нелокальных решений.

Таким образом, в рамках рассмотренных континуальных теорий упругости до сих пор не удавалось построить модели линейных дефектов (дислокаций и дисклинаций), которые бы сочетали в себе такие качества, как отсутствие расходимостей в полях напряжений и деформаций на линиях дефектов и простую аналитическую запись этих полей, удобную в физических приложениях. Упомянутые выше модели квазиконтинуума [27,28] удовлетворяют этим требованиям, но переход к квазиконтинууму неизбежно приведет к большим техническим трудностям при рассмотрении реальных неоднородных систем с наноструктурой. Поэтому имеет смысл продолжить поиск континуальных моделей, которые бы приводили к результатам, сопоставимым с данными экспериментальных наблюдений. Например таких, которые бы позволили оценить перемещения и деформации вблизи ядер дефектов и сравнить их с реальными значениями, которые можно получить из электронно-микроскопических изображений и компьютерных моделей.

Один из возможных путей решения этой проблемы состоит в замене обычного закона Гука, определяющего соотношения линейной теории упругости, его простой градиентной модификацией в виде [34]

$$\sigma = \lambda(\text{tr } \varepsilon)I + 2\mu\varepsilon - c\nabla^2[\lambda(\text{tr } \varepsilon)I + 2\mu\varepsilon], \quad (1)$$

где λ и μ — обычные константы Ламе, σ и ε — тензоры обычных упругих напряжений и деформаций, I — единичный тензор, ∇^2 — лапласиан и $c > 0$ — градиентный коэффициент, обращение которого в ноль дает обычный закон Гука. Заметим, что выражение (1) является частным случаем весьма громоздкого определяющего соотношения, полученного Миндлиным [35] при учете в упругой энергии вторых градиентов от тензора упругой деформации. Использование определяющего соотношения (1) [34,36–38] и близких к нему [39,40] при рассмотрении задач о трещинах привело к устранению классических расходимостей из полей упругих перемещений и деформаций в устье трещины. Правда, поля упругих напряжений при этом остались прежними и имели там обычные расходимости, но тем не менее, поскольку тензор упругих напряжений не может быть строго определен на атомном уровне, этому обстоятельству не придавалось особого значения.

Успешное устранение расходимостей из решений для трещин стимулировало интерес к использованию соотношения (1) для анализа упругих полей дислокаций [41] и дисклинаций [42]. Оказалось, что в случае дислокаций упругие деформации обращаются в ноль на дислокационной линии и достигают максимальных по модулю значений порядка 12% (винтовые дислокации) или 3–14% (краевые дислокации) на расстоянии $\approx \sqrt{c}$ от нее. Важно отметить, что для кристаллической решетки с параметром a в работе [34] была получена оценка для градиентного коэффициента c : $\sqrt{c} \approx a/4$. Анализ полей полных перемещений вокруг отдельных дислокаций и дислокационных диполей показал, что в рамках такой градиентной теории упругости естественным образом возникают две характерные длины: $r_0 \approx 5\sqrt{c}$, которая может рассматриваться как радиус дислокационного ядра, и $d_0 \approx 10\sqrt{c}$, соответствующая радиусу сильного упругого короткодействующего взаимодействия между дислокациями. Тогда для случая обычной решеточной дислокации в кристалле справедливы оценки $r_0 \approx 1.25a$ и $d_0 \approx 2.5a$. За пределами дислокационного ядра градиентные решения быстро переходят в классические. Заметим, что поле полных перемещений краевой дислокации при таком рассмотрении также утрачивает характерную логарифмическую расходимость на дислокационной линии. Более того, рассчитанные величины таких перемещений хорошо согласуются [41] по порядку величины с результатами экспериментальных наблюдений и компьютерного моделирования нерасщепленных дислокаций.

Хотя поля упругих напряжений остались такими же, как и в классической упругости, устранение расходимостей из полей упругих деформаций привело также к их устранению из выражений для упругих энергий дислокаций [41]. Если в рамках классической упругости для вычисления энергии дислокации приходилось искусственно вводить радиус обрезания упругого поля на ядре дислокации, а энергию ядра учитывать отдельно, то решения градиентной упругости позволяют избежать этого неудобства и проводить вычисления ”в лоб”, что дает для упругой энергии на единицу длины дислокации W выражение

$$W = \mu b^2 A \left\{ \ln \frac{R}{2\sqrt{c}} + \gamma - B \right\}, \quad (2)$$

где b — величина вектора Бюргерса дислокации, R — внешний размер тела, $\gamma = 0.577\dots$ — постоянная Эйлера; $A = 1/(4\pi)$, $B = 0$ в случае винтовой дислокации, и $A = 1/[4\pi(1-\nu)]$, $B = \pi A$ в случае краевой.

В работе [42] мы получили градиентные решения для полей упругих деформаций от диполей прямолинейных дисклинаций всех трех типов, т. е. клиновых дисклинаций и дисклинаций кручения. Было показано, что как и в случае трещин и дислокаций, из решений уходят расходимости, характерные для классической теории упругости. Упругие деформации принимают нулевые или конечные

значения на дисклинационных линиях. Эти конечные значения сильно зависят от размера плеча диполя d и меняются монотонно (клиновые дисклинации) или немонотонно (дисклинации кручения) при короткодействующих взаимодействиях дисклинаций диполя, когда $d < 10\sqrt{c}$. При аннигиляции дисклинаций ($d \rightarrow 0$) упругие деформации плавно стремятся к нулю. Как и в случае дислокаций, вдали от дисклинационных линий, когда $r \gg 10\sqrt{c}$, градиентное решение переходит в классическое. Интересно, что когда плечо диполя d становится много меньше характерного размера \sqrt{c} , упругие поля диполя клиновых дисклинаций трансформируются в упругие поля краевой дислокации [41], как и в классической теории упругости [1–3].

Несмотря на такие явные преимущества использования определяющего соотношения (1) для описания упругих полей трещин [34,36–40], дислокаций [41] и дисклинаций [42], как устранение расходимостей в полях перемещений и упругих деформаций и получение их разумных значений в ядрах дефектов, этот подход страдает существенным общим недостатком — поля упругих напряжений сохраняют свой классический вид и классические расходимости на линиях дефектов и в устьях трещин. Чтобы устранить этот недостаток, мы использовали в [43] для описания дислокаций вместо (1) более общее определяющее градиентное соотношение

$$(1 - c_1 \nabla^2) \sigma = (1 - c_2 \nabla^2) [\lambda (\text{tr } \varepsilon) I + 2\mu \varepsilon] \quad (3)$$

уже с двумя разными градиентными коэффициентами c_1 и c_2 , рассмотренное ранее Ру и Айфантисом [44]. Аторы [44] предложили довольно простую математическую процедуру, аналогичную приведенной в [36], решения уравнения (3) для некоторой краевой задачи с помощью уже заранее известного классического решения той же самой краевой задачи. Действительно, легко убедиться [36,41,42], что правая часть уравнения (3) в случае $c_1 \equiv 0$ дает классическое решение для поля напряжений, которое мы обозначим σ^0 , а решение для поля перемещений определяется из неоднородного уравнения Гельмгольца

$$(1 - c_2 \nabla^2) u = u^0, \quad (4)$$

где u^0 — классическое решение той же краевой задачи с заданными на границе напряжениями. Из (4) получается аналогичное уравнение

$$(1 - c_2 \nabla^2) \varepsilon = \varepsilon^0 \quad (5)$$

для определения поля упругих деформаций ε в градиентной упругости с помощью классического решения ε^0 . Из (3) и (5) следует, что градиентное решение для поля напряжений σ в случае $c_1 \neq 0$ можно получить прямо из уравнения

$$(1 - c_2 \nabla^2) \sigma = \sigma^0, \quad (6)$$

где σ^0 — классическое решение той же краевой задачи.

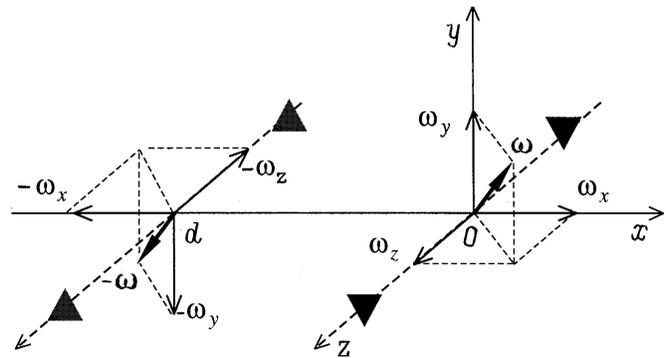


Рис. 1. Диполь прямолинейных дисклинаций с векторами Франка $\pm\omega$.

Таким образом, для решения уравнения (3) можно решить отдельно уравнения (5) и (6), правые части которых представляют собой классические решения ε^0 и σ^0 , с учетом дополнительных граничных условий, обусловленных наличием градиентных слагаемых. В случае дислокаций [43] таким дополнительным условием было совпадение классических и градиентных решений на бесконечном расстоянии от дислокации. Следует отметить, что аналогичный подход применялся [44] при рассмотрении винтовой дислокации и трещины антиплоского сдвига для отыскания асимптотических решений на дислокационной линии и в устье трещины. При этом было показано, что градиентные решения уже не содержат расходимостей ни в полях деформаций, ни в полях напряжений. В работе [43] были получены точные решения уравнения (3) для прямолинейных краевых и винтовых дислокаций. Ни упругие деформации, ни напряжения, ни энергии дислокаций не содержали расходимостей на линиях дефектов. При таком подходе выражение для упругой энергии винтовой дислокации сохраняет тот же вид (2) с заменой c на c_1 , а для краевой дислокации следует сделать такую же замену и взять $B = -1/2$. Было также показано, что упругие напряжения достигают наибольшей величины порядка $\mu/4 - \mu/2$ на расстоянии $\approx a/4$ от линии дислокации.

В настоящей работе мы приводим решения уравнения (3) для диполей прямолинейных дисклинаций.

2. Рассмотрим дисклинационный диполь, состоящий из двух параллельных дисклинаций с векторами Франка $\pm\omega$ ($\omega = \omega_x e_x + \omega_y e_y + \omega_z e_z$). Проекции ω_x и ω_y определяют мощности составляющих кручения этих дисклинаций, а ω_z — мощность их клиновой составляющей (рис. 1). Пусть дисклинации лежат в плоскости $y = 0$ вдоль оси z декартовой системы координат и пересекают ось x в точках $x = -d$ (отрицательная дисклинация) и $x = 0$ (положительная дисклинация).

2.1. Классическое решение. Классическое решение для упругих деформаций ε_{ij}^0 в единицах $1/[4\pi(1-\nu)]$ можно записать в виде [1]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= -\omega_x z \left\{ (1-2\nu) \left(\frac{x}{r_1^2} - \frac{x+d}{r_2^2} \right) - \frac{2xy^2}{r_1^4} + \frac{2(x+d)y^2}{r_2^4} \right\} \\ &\quad - \omega_y z \left\{ (1-2\nu) \left(\frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2} \right) - \frac{2x^2y}{r_1^4} - \frac{2(x+d)^2y}{r_2^4} \right\} \\ &\quad + \omega_z \left\{ (1-2\nu) \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{y^2}{r_1^2} - \frac{y^2}{r_2^2} \right\}, \\ \varepsilon_{yy}^0 &= -\omega_x z \left\{ (1-2\nu) \left(\frac{x}{r_1^2} - \frac{x+d}{r_2^2} \right) + \frac{2xy^2}{r_1^4} - \frac{2(x+d)y^2}{r_2^4} \right\} \\ &\quad - \omega_y z \left\{ (1-2\nu) \left(\frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2} \right) - \frac{2x^2y}{r_1^4} + \frac{2(x+d)^2y}{r_2^4} \right\} \\ &\quad + \omega_z \left\{ (1-2\nu) \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{x^2}{r_1^2} - \frac{(x+d)^2}{r_2^2} \right\}, \\ \varepsilon_{zz}^0 &= 0, \\ \varepsilon_{xy}^0 &= \omega_x z \left\{ \frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2} - \frac{2x^2y}{r_1^4} + \frac{2(x+d)^2y}{r_2^4} \right\} \\ &\quad + \omega_y z \left\{ \frac{x}{r_1^2} - \frac{x+d}{r_2^2} - \frac{2xy^2}{r_1^4} + \frac{2(x+d)y^2}{r_2^4} \right\} \\ &\quad - \omega_z \left\{ \frac{xy}{r_1^2} - \frac{(x+d)y}{r_2^2} \right\}, \\ \varepsilon_{xz}^0 &= -\omega_x \left\{ (1-2\nu) \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{y^2}{r_1^2} - \frac{y^2}{r_2^2} \right\} \\ &\quad + \omega_y \left\{ \frac{xy}{r_1^2} - \frac{(x+d)y}{r_2^2} \right\}, \\ \varepsilon_{yz}^0 &= \omega_x \left\{ \frac{xy}{r_1^2} - \frac{(x+d)y}{r_2^2} \right\} - \omega_y \left\{ (1-2\nu) \right. \\ &\quad \left. \times \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{x^2}{r_1^2} - \frac{(x+d)^2}{r_2^2} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $r_1^2 = x^2 + y^2$ и $r_2^2 = (x+d)^2 + y^2$.

Классическое решение для упругих напряжений σ_{ij}^0 в единицах $\mu/[2\pi(1-\nu)]$ тогда записывается [1] как

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^0 &= \varepsilon_{xx}^0(\nu=0), \quad \sigma_{yy}^0 = \varepsilon_{yy}^0(\nu=0), \\ \sigma_{zz}^0 &= -\omega_x z 2\nu \left\{ \frac{x}{r_1^2} - \frac{x+d}{r_2^2} \right\} - \omega_y z 2\nu \left\{ \frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2} \right\} + \omega_z 2\nu \ln \frac{r_1}{r_2}, \\ \sigma_{xy}^0 &= \varepsilon_{xy}^0, \quad \sigma_{xz}^0 = \varepsilon_{xz}^0, \quad \sigma_{yz}^0 = \varepsilon_{yz}^0. \end{aligned} \quad (8)$$

2.2. Градиентное решение. Как уже отмечалось выше, решение уравнения (3) сводится к раздельному решению уравнений (5) и (6), в правые части которых следует подставить классические решения ε^0 и σ^0 , определяемые соответственно выражениями (7) и (8). Процедура решения уравнения (5) с правой частью (7) подробно описана нами в [42], а уравнение (6) с правой частью (8) решается совершенно аналогично. Здесь мы приводим только окончательные результаты.

Искомые решения представимы в виде суперпозиции классических решений и дополнительных "градиентных" слагаемых

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^{gr}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^{gr}, \quad (9)$$

где ε_{ij}^{gr} определяется (в единицах $1/[4\pi(1-\nu)]$) выражениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{gr} &= \omega_x z \left\{ 4c_2 x \frac{x^2 - 3y^2}{r_1^6} - 4c_2 (x+d) \frac{(x+d)^2 - 3y^2}{r_2^6} \right. \\ &\quad - \frac{2x}{r_1 \sqrt{c_2}} \left(\nu - \frac{y^2}{r_1^2} \right) K_1 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) + \frac{2(x+d)}{r_2 \sqrt{c_2}} \\ &\quad \times \left(\nu - \frac{y^2}{r_2^2} \right) K_1 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) - 2x \frac{x^2 - 3y^2}{r_1^4} K_2 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) \\ &\quad \left. + 2(x+d) \frac{(x+d)^2 - 3y^2}{r_2^4} K_2 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \right\} \\ &\quad + \omega_y z \left\{ 4c_2 y \frac{3x^2 - y^2}{r_1^6} - 4c_2 y \frac{3(x+d)^2 - y^2}{r_2^6} \right. \\ &\quad + \frac{2y}{r_1 \sqrt{c_2}} \left(1 - \nu - \frac{x^2}{r_1^2} \right) K_1 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) \\ &\quad - \frac{2y}{r_2 \sqrt{c_2}} \left(1 - \nu - \frac{(x+d)^2}{r_2^2} \right) K_1 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \\ &\quad - 2y \frac{3x^2 - y^2}{r_1^4} K_2 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) \\ &\quad \left. + 2y \frac{3(x+d)^2 - y^2}{r_2^4} K_2 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \right\} + \omega_z \left\{ 2c_2 \frac{x^2 - y^2}{r_1^4} \right. \\ &\quad - 2c_2 \frac{(x+d)^2 - y^2}{r_2^4} + (1-2\nu) K_0 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) \\ &\quad - (1-2\nu) K_0 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) - \frac{x^2 - y^2}{r_1^2} K_2 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) \\ &\quad \left. + \frac{(x+d)^2 - y^2}{r_2^2} K_2 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yy}^{gr} = & \omega_x z \left\{ -4c_2 x \frac{x^2 - 3y^2}{r_1^6} + 4c_2(x+d) \frac{(x+d)^2 - 3y^2}{r_2^6} \right. \\ & + \frac{2x}{r_1 \sqrt{c_2}} \left(1 - \nu - \frac{y^2}{r_1^2} \right) K_1 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) - \frac{2(x+d)}{r_2 \sqrt{c_2}} \\ & \times \left(1 - \nu - \frac{y^2}{r_2^2} \right) K_1 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) + 2x \frac{x^2 - 3y^2}{r_1^4} K_2 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) \\ & \left. - 2(x+d) \frac{(x+d)^2 - 3y^2}{r_2^4} K_2 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \right\} + \omega_y z \\ & \times \left\{ -4c_2 y \frac{3x^2 - y^2}{r_1^6} + 4c_2 y \frac{3(x+d)^2 - y^2}{r_2^6} - \frac{2y}{r_1 \sqrt{c_2}} \right. \\ & \times \left(\nu - \frac{x^2}{r_1^2} \right) K_1 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) + \frac{2y}{r_2 \sqrt{c_2}} \left(\nu - \frac{(x+d)^2}{r_2^2} \right) \\ & \times K_1 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) + 2y \frac{3x^2 - y^2}{r_1^4} K_2 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) - 2y \frac{3(x+d)^2 - y^2}{r_2^4} \\ & \left. \times K_2 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \right\} + \omega_z \left\{ -2c_2 \frac{x^2 - y^2}{r_1^4} + 2c_2 \frac{(x+d)^2 - y^2}{r_2^4} \right. \\ & + (1 - 2\nu) K_0 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) - (1 - 2\nu) K_0 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \\ & \left. + \frac{x^2 - y^2}{r_1^2} K_2 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) - \frac{(x+d)^2 - y^2}{r_2^2} K_2 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{zz}^{gr} = 0,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy}^{gr} = & \omega_x z \left\{ 4c_2 y \frac{3x^2 - y^2}{r_1^6} - 4c_2 y \frac{3(x+d)^2 - y^2}{r_2^6} \right. \\ & - \frac{2x^2 y}{r_1^3 \sqrt{c_2}} K_1 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) + \frac{2(x+d)^2 y}{r_2^3 \sqrt{c_2}} K_1 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \\ & \left. - 2y \frac{3x^2 - y^2}{r_1^4} K_2 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) + 2y \frac{3(x+d)^2 - y^2}{r_2^4} K_2 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \right\} \\ & + \omega_y z \left\{ -4c_2 x \frac{x^2 - 3y^2}{r_1^6} + 4c_2(x+d) \frac{(x+d)^2 - 3y^2}{r_2^6} \right. \\ & - \frac{2xy^2}{r_1^3 \sqrt{c_2}} K_1 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) + \frac{2(x+d)y^2}{r_2^3 \sqrt{c_2}} K_1 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \\ & + 2x \frac{x^2 - 3y^2}{r_1^4} K_2 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) - 2(x+d) \frac{(x+d)^2 - 3y^2}{r_2^4} \\ & \left. \times K_2 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \right\} + \omega_z \left\{ 4c_2 y \frac{x}{r_1^4} - 4c_2 y \frac{x+d}{r_2^4} - \frac{2xy}{r_1^2} \right. \\ & \left. \times K_2 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) + \frac{2(x+d)y}{r_2^2} K_2 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz}^{gr} = & \omega_x \left\{ -2c_2 \frac{x^2 - y^2}{r_1^4} + 2c_2 \frac{(x+d)^2 - y^2}{r_2^4} - (1 - 2\nu) \right. \\ & \times K_0 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) + (1 - 2\nu) K_0 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \\ & \left. + \frac{x^2 - y^2}{r_1^2} K_2 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) - \frac{(x+d)^2 - y^2}{r_2^2} K_2 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \right\} \\ & + \omega_y \left\{ -4c_2 y \frac{x}{r_1^4} + 4c_2 y \frac{x+d}{r_2^4} + \frac{2xy}{r_1^2} K_2 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) \right. \\ & \left. - \frac{2(x+d)y}{r_2^2} K_2 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \right\}, \\ \varepsilon_{yz}^{gr} = & \omega_x \left\{ -4c_2 y \frac{x}{r_1^4} + 4c_2 y \frac{x+d}{r_2^4} + \frac{2xy}{r_1^2} K_2 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) \right. \\ & \left. - \frac{2(x+d)y}{r_2^2} K_2 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \right\} + \omega_y \left\{ 2c_2 - \frac{x^2 - y^2}{r_1^4} \right. \\ & - 2c_2 \frac{(x+d)^2 - y^2}{r_2^4} - (1 - 2\nu) K_0 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) \\ & + (1 - 2\nu) K_0 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) - \frac{x^2 - y^2}{r_1^2} K_2 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_2}} \right) \\ & \left. + \frac{(x+d)^2 - y^2}{r_2^2} K_2 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_2}} \right) \right\}, \end{aligned} \tag{10}$$

а σ_{ij}^{gr} (в единицах $\mu/[2\pi(1-\nu)]$) — выражениями

$$\sigma_{xx}^{gr} = \varepsilon_{xx}^{gr}(\nu = 0, c_2 \leftrightarrow c_1), \quad \sigma_{yy}^{gr} = \varepsilon_{yy}^{gr}(\nu = 0, c_2 \leftrightarrow c_1),$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{gr} = & \omega_x z 2\nu \left\{ \frac{x}{r_1 \sqrt{c_1}} K_1 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_1}} \right) - \frac{x+d}{r_2 \sqrt{c_1}} K_1 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_1}} \right) \right\} \\ & + \omega_y z 2\nu \left\{ \frac{y}{r_1 \sqrt{c_1}} K_1 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_1}} \right) - \frac{y}{r_2 \sqrt{c_1}} K_1 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_1}} \right) \right\} \\ & + \omega_z 2\nu \left\{ K_0 \left(\frac{r_1}{\sqrt{c_1}} \right) - K_0 \left(\frac{r_2}{\sqrt{c_1}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{xy}^{gr} = \varepsilon_{xy}^{gr}(c_2 \leftrightarrow c_1), \quad \sigma_{xz}^{gr} = \varepsilon_{xz}^{gr}(c_2 \leftrightarrow c_1),$$

$$\sigma_{yz}^{gr} = \varepsilon_{yz}^{gr}(c_2 \leftrightarrow c_1), \tag{11}$$

где $K_n(r_k/\sqrt{c_l})$ — модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда) n -го порядка, $n = 0, 1, 2; k, l = 1, 2$.

В предельном случае, когда градиентные коэффициенты c_1 и c_2 стремятся к нулю, и определяющее соотношение (3) превращается в обычный закон Гука для изотропной среды, градиентные члены ε_{ij}^{gr} и σ_{ij}^{gr} обращаются в ноль. Заметим, что компоненты тензора деформаций (10) при замене c_2 на c полностью совпадают с решением, найденным в [42] с помощью определяющего соотношения (1).

Полученные в результате поля упругих деформаций и напряжений (9) уже не содержат классических расходимостей на линиях дисклинаций. Действительно, рассмотрим, например, деформации и напряжения на линии положительной дисклинации ($x = 0, y = 0$) (рис. 1). С учетом асимптотик

$$\begin{aligned} K_0\left(\frac{r_1}{\sqrt{c_1}}\right)\Big|_{r_1 \rightarrow 0} &\rightarrow -\gamma + \ln \frac{2\sqrt{c_1}}{r_1}, \\ K_1\left(\frac{r_1}{\sqrt{c_1}}\right)\Big|_{r_1 \rightarrow 0} &\rightarrow \frac{\sqrt{c_1}}{r_1}, \\ K_2\left(\frac{r_1}{\sqrt{c_1}}\right)\Big|_{r_1 \rightarrow 0} &\rightarrow \frac{2c_1}{r_1^2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

из (10) при $r_1 \rightarrow 0$ получаем выражения для деформаций (в единицах $1/[4\pi(1-\nu)]$).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}|_{r_1 \rightarrow 0} &= \omega_x z \left\{ \frac{1-2\nu}{d} - \frac{4c_2}{d^3} + \frac{2\nu}{\sqrt{c_2}} K_1\left(\frac{d}{\sqrt{c_2}}\right) + \frac{2}{d} K_2\left(\frac{d}{\sqrt{c_2}}\right) \right\} + \omega_z \left\{ \frac{1}{2} - (1-2\nu) \times \left(\gamma + \ln \frac{d}{2\sqrt{c_2}} \right) - \frac{2c_2}{d^2} - (1-2\nu) \times K_0\left(\frac{d}{\sqrt{c_2}}\right) + K_2\left(\frac{d}{\sqrt{c_2}}\right) \right\}, \\ \varepsilon_{yy}|_{r_1 \rightarrow 0} &= \omega_x z \left\{ \frac{1-2\nu}{d} + \frac{4c_2}{d^3} - \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{c_2}} K_1\left(\frac{d}{\sqrt{c_2}}\right) - \frac{2}{d} K_2\left(\frac{d}{\sqrt{c_2}}\right) \right\} + \omega_z \left\{ -\frac{1}{2} - (1-2\nu) \times \left(\gamma + \ln \frac{d}{2\sqrt{c_2}} \right) + \frac{2c_2}{d^2} - (1-2\nu) \times K_0\left(\frac{d}{\sqrt{c_2}}\right) - K_2\left(\frac{d}{\sqrt{c_2}}\right) \right\}, \\ \varepsilon_{zz}|_{r_1 \rightarrow 0} &= 0, \\ \varepsilon_{xy}|_{r_1 \rightarrow 0} &= \omega_y z \left\{ -\frac{1}{d} + \frac{4c_2}{d^3} - \frac{2}{d} K_2\left(\frac{d}{\sqrt{c_2}}\right) \right\}, \\ \varepsilon_{xz}|_{r_1 \rightarrow 0} &= \omega_x \left\{ -\frac{1}{2} + (1-2\nu) \left(\gamma + \ln \frac{d}{2\sqrt{c_2}} \right) + \frac{2c_2}{d^2} + (1-2\nu) K_0\left(\frac{d}{\sqrt{c_2}}\right) - K_2\left(\frac{d}{\sqrt{c_2}}\right) \right\}, \\ \varepsilon_{yz}|_{r_1 \rightarrow 0} &= \omega_y \left\{ \frac{1}{2} + (1-2\nu) \left(\gamma + \ln \frac{d}{2\sqrt{c_2}} \right) - \frac{2c_2}{d^2} + (1-2\nu) K_0\left(\frac{d}{\sqrt{c_2}}\right) + K_2\left(\frac{d}{\sqrt{c_2}}\right) \right\}, \quad (12) \end{aligned}$$

а из (11) — для напряжений (в единицах $\mu/[2\pi(1-\nu)]$)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}|_{r_1 \rightarrow 0} &= \varepsilon_{xx}(\nu = 0, c_2 \leftrightarrow c_1)|_{r_1 \rightarrow 0}, \\ \sigma_{yy}|_{r_1 \rightarrow 0} &= \varepsilon_{yy}(\nu = 0, c_2 \leftrightarrow c_1)|_{r_1 \rightarrow 0}, \\ \sigma_{zz}|_{r_1 \rightarrow 0} &= \omega_x z 2\nu \left\{ \frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{c_1}} K_1\left(\frac{d}{\sqrt{c_1}}\right) \right\} - \omega_z 2\nu \left\{ \gamma + \ln \frac{d}{2\sqrt{c_1}} + K_0\left(\frac{d}{\sqrt{c_1}}\right) \right\}, \\ \sigma_{xy}|_{r_1 \rightarrow 0} &= \varepsilon_{xy}(c_2 \leftrightarrow c_1)|_{r_1 \rightarrow 0}, \\ \sigma_{xz}|_{r_1 \rightarrow 0} &= \varepsilon_{xz}(c_2 \leftrightarrow c_1)|_{r_1 \rightarrow 0}, \\ \sigma_{yz}|_{r_1 \rightarrow 0} &= \varepsilon_{yz}(c_2 \leftrightarrow c_1)|_{r_1 \rightarrow 0}. \quad (13) \end{aligned}$$

Выражения (12), (13) удобны для изучения короткодействующего упругого взаимодействия между дисклинациями, что было невозможно в рамках классической линейной теории упругости. Подробный анализ изменения поля деформаций вблизи одной из дисклинаций при изменении длины плеча диполя d был проведен в работе [42]. Поскольку решение для деформаций, полученное выше с использованием соотношения (3), совпадает по виду с решением, полученным в [42] для соотношения (1), ограничимся здесь только основными выводами, следующими из проведенного в [42] анализа. Во-вторых, на дисклинационных линиях упругие деформации принимают нулевые или конечные значения в зависимости от того, какая компонента какой дисклинации (кручения или клиновой) рассматривается. Во-вторых, конечные значения деформаций сильно зависят от величины плеча диполя d и меняются монотонно (клиновые дисклинации) или немонотонно (дисклинации кручения) при короткодействующих взаимодействиях дисклинаций диполя, когда $d < 10\sqrt{c_2}$. При аннигиляции дисклинаций ($d \rightarrow 0$) упругие деформации плавно стремятся к нулю. Наконец, как и в классической теории упругости [1–3], упругие поля диполя клиновых дисклинаций трансформируются в упругие поля краевой дислокации [41], когда плечо диполя d становится много меньше характерного размера $\sqrt{c_2}$.

Поскольку координатные части полей деформаций и напряжений (9) очень похожи (в сдвиговых компонентах они совпадают при $c_1 = c_2$, а в нормальных — при $c_1 = c_2$ и $\nu = 0$), совершенно те же выводы можно сделать и в отношении поля напряжений.

При рассмотрении дальнедействующего взаимодействия дисклинаций, когда $d \gg \sqrt{c_1}$, упругие поля на линии дислокаций описываются приближенными выра-

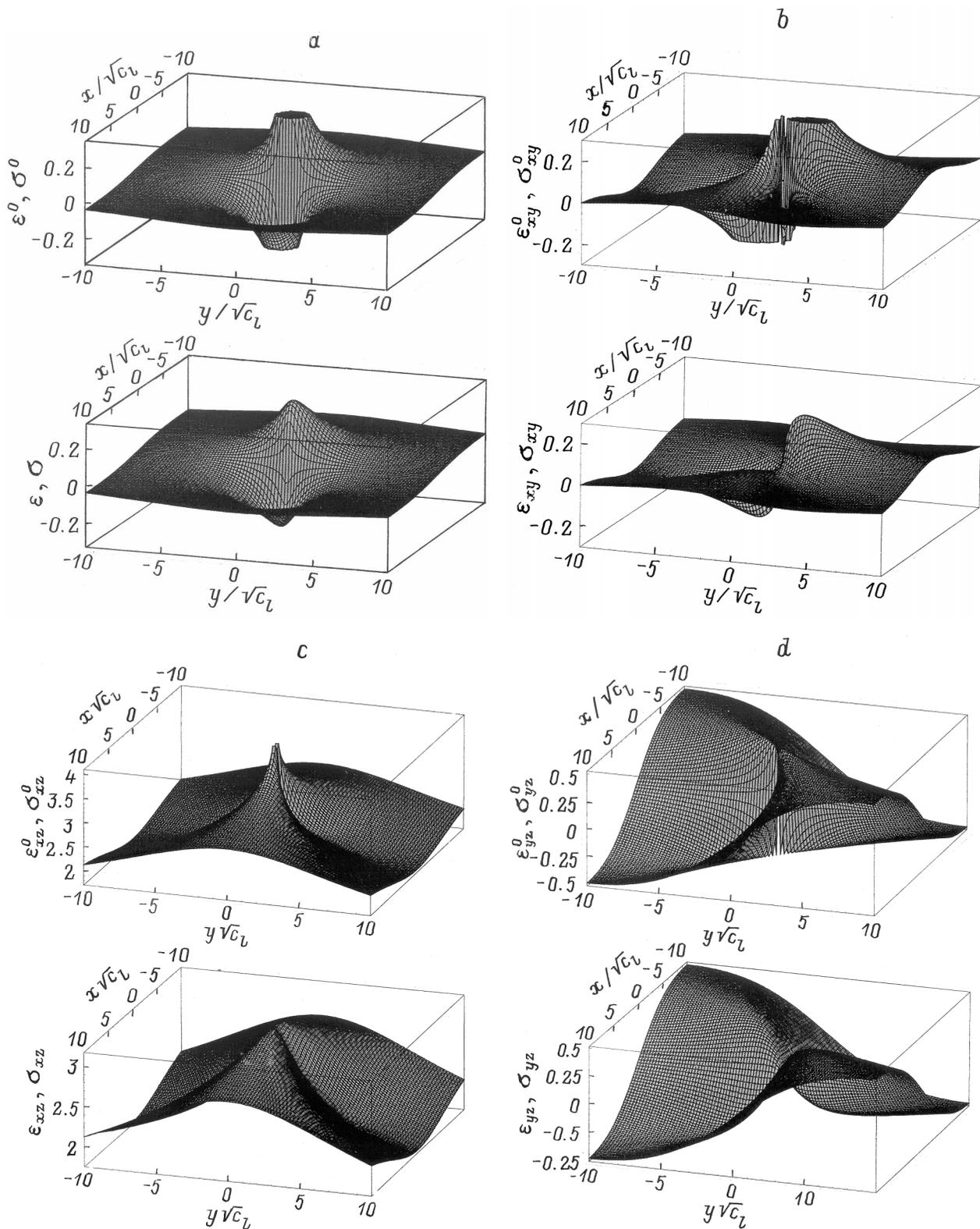


Рис. 2. Распределение компонент тензоров упругих деформаций $\varepsilon^0, \varepsilon$ (a), $\varepsilon_{xy}^0, \varepsilon_{xy}$ (b), $\varepsilon_{xz}^0, \varepsilon_{xz}$ (c), $\varepsilon_{yz}^0, \varepsilon_{yz}$ (d) и напряжений σ^0, σ (a), $\sigma_{xy}^0, \sigma_{xy}$ (b), $\sigma_{xz}^0, \sigma_{xz}$ (c), $\sigma_{yz}^0, \sigma_{yz}$ (d) вблизи линии положительной дисклинации кручения с вектором Франка $\omega = (\omega_x, 0, 0)$ при $d = 10^4 \sqrt{c_1}$, $l = 1, 2$. Деформации представлены в единицах $\omega_x z / [4\pi(1 - \nu)\sqrt{c_2}]$ (a, b) и $\omega_x / [4\pi(1 - \nu)]$ (c, d), а напряжения — в единицах $\mu\omega_x z(1 + \nu) / [6\pi(1 - \nu)(1 - 2\nu)\sqrt{c_1}]$ (a), $\mu\omega_x z / [2\pi(1 - \nu)\sqrt{c_1}]$ (b) и $\mu\omega_x / [2\pi(1 - \nu)]$ (c, d). Верхние графики представляют классические решения $\varepsilon_{ij}^0, \sigma_{ij}^0$, а нижние — градиентные решения $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$.

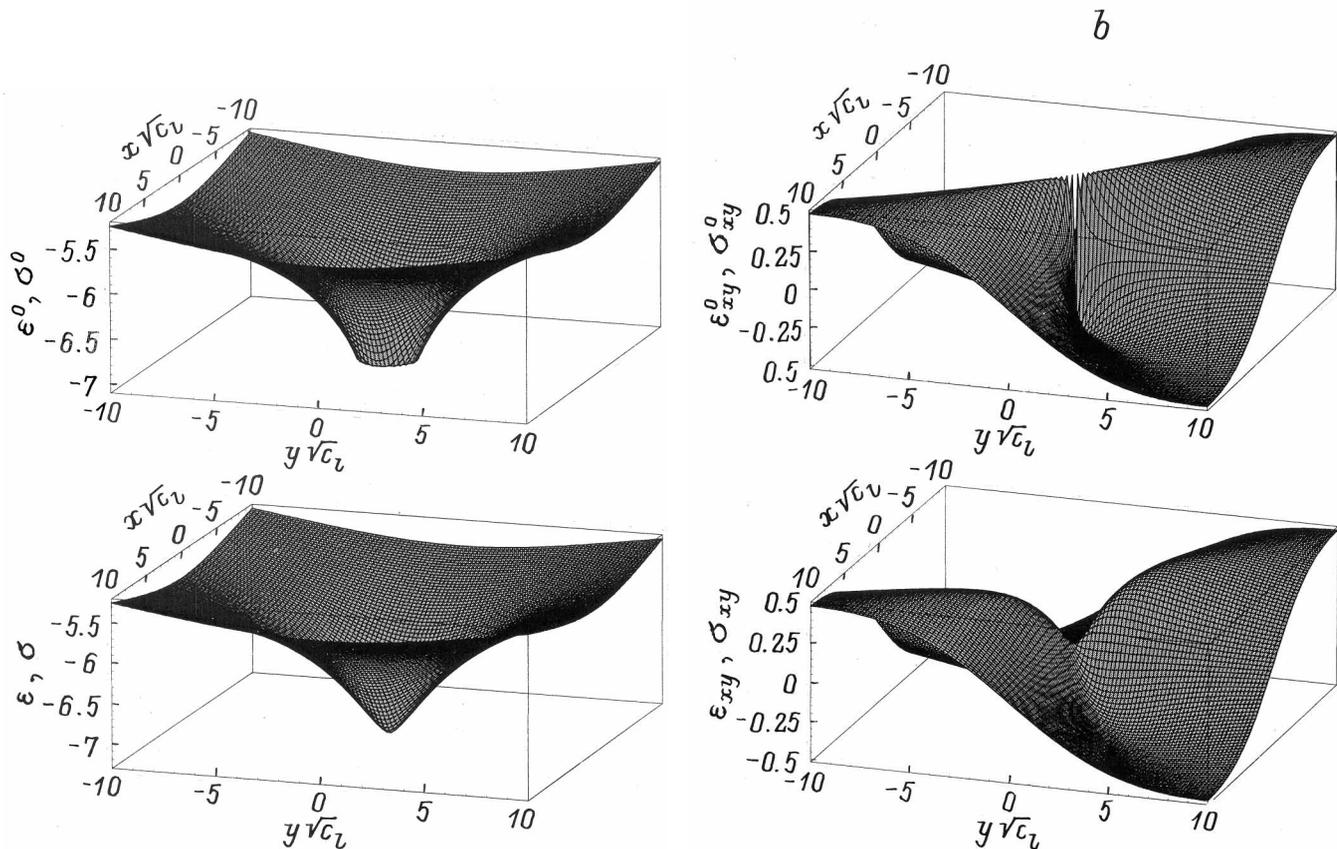


Рис. 3. Распределение компонент тензоров упругих деформаций $\varepsilon^0, \varepsilon$ (a), $\varepsilon_{xy}^0, \varepsilon_{xy}$ (b) и напряжений σ^0, σ (a), $\sigma_{xy}^0, \sigma_{xy}$ (b) вблизи линии положительной клиновой дисклинации с вектором Франка $\omega = (0, 0, \omega_z)$ при $d = 10^4 \sqrt{c_1}$, $l = 1, 2$. Деформации представлены в единицах $\omega_z / [4\pi(1-\nu)]$, а напряжения — в единицах $\mu\omega_z(1+\nu) / [6\pi(1-\nu)(1-2\nu)\sqrt{c_1}]$ (a), $\mu\omega_z / [2\pi(1-\nu)]$ (b). Верхние графики представляют классические решения $\varepsilon_{ij}^0, \sigma_{ij}^0$, а нижние — градиентные решения $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$.

жениями для деформаций (в единицах $1/[4\pi(1-\nu)]$)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}|_{r_1 \rightarrow 0} &\approx \omega_x(1-2\nu)\frac{z}{d} + \omega_z \left\{ \frac{1}{2} - (1-2\nu) \left(\gamma + \ln \frac{d}{2\sqrt{c_2}} \right) \right\}, \\ \varepsilon_{yy}|_{r_1 \rightarrow 0} &\approx \omega_x(1-2\nu)\frac{z}{d} - \omega_z \left\{ \frac{1}{2} + (1-2\nu) \left(\gamma + \ln \frac{d}{2\sqrt{c_2}} \right) \right\}, \\ \varepsilon_{zz}|_{r_1 \rightarrow 0} &= 0, \\ \varepsilon_{xy}|_{r_1 \rightarrow 0} &\approx -\omega_y \frac{z}{d}, \\ \varepsilon_{xz}|_{r_1 \rightarrow 0} &\approx -\omega_x \left\{ \frac{1}{2} - (1-2\nu) \left(\gamma + \ln \frac{d}{2\sqrt{c_2}} \right) \right\}, \\ \varepsilon_{yz}|_{r_1 \rightarrow 0} &\approx \omega_y \left\{ \frac{1}{2} + (1-2\nu) \left(\gamma + \ln \frac{d}{2\sqrt{c_2}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

и напряжений (в единицах $\mu/[2\pi(1-\nu)]$)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}|_{r_1 \rightarrow 0} &= \varepsilon_{xx}(\nu = 0, c_2 \leftrightarrow c_1)|_{r_1 \rightarrow 0}, \\ \sigma_{yy}|_{r_1 \rightarrow 0} &= \varepsilon_{yy}(\nu = 0, c_2 \leftrightarrow c_1)|_{r_1 \rightarrow 0}, \\ \sigma_{zz}|_{r_1 \rightarrow 0} &\approx \omega_x 2\nu \frac{z}{d} - \omega_z 2\nu \left\{ \gamma + \ln \frac{d}{2\sqrt{c_1}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}|_{r_1 \rightarrow 0} &= \varepsilon_{xy}(c_2 \leftrightarrow c_1)|_{r_1 \rightarrow 0}, \\ \sigma_{xz}|_{r_1 \rightarrow 0} &= \varepsilon_{xz}(c_2 \leftrightarrow c_1)|_{r_1 \rightarrow 0}, \\ \sigma_{yz}|_{r_1 \rightarrow 0} &= \varepsilon_{yz}(c_2 \leftrightarrow c_1)|_{r_1 \rightarrow 0}. \end{aligned} \quad (15)$$

3. Примеры распределения различных компонент полей упругих деформаций и напряжений (9) вблизи положительных дисклинаций при $d = 10^4 \sqrt{c_1}$ приведены на рис. 2 и 3. Для дисклинации кручения с вектором Франка $\omega = (\omega_x, 0, 0)$ на рис. 2 представлены упругая дилатация ε ($\varepsilon = \varepsilon_{nn}$) и сдвиговые компоненты поля деформаций, а также гидростатическая компонента σ ($\sigma = \sigma_{nn}/3$) и сдвиговые компоненты поля напряжений. Для дисклинации кручения с вектором Франка $\omega = (0, \omega_y, 0)$ можно получить аналогичные распределения упругих полей, если на рис. 2 поменять местами оси x и y с такой же заменой индексов в сдвиговых компонентах деформаций и напряжений и в единицах их измерения. Для клиновой дисклинации с вектором Франка $\omega = (0, 0, \omega_z)$ на рис. 3 представлены компоненты $\varepsilon, \varepsilon_{xy}$ и σ, σ_{xy} . Верхние графики на рис. 2 и 3 представляют классические решения ε_{ij}^0 и σ_{ij}^0 с характерными расходимостями на линиях дисклинаций, а нижние — градиентные решения ε_{ij} и

σ_{ij} , у которых таких расходимостей нет. Видно, что на расстояниях от дисклинационных линий, превышающих $(5-10)\sqrt{c_l}$, т.е. несколько межатомных расстояний, градиентные и классические решения совпадают.

Таким образом, рассмотрение дисклинаций в рамках линейной градиентной теории упругости с определяющим соотношением (3) приводит к полному устранению расходимостей из полей упругих деформаций и напряжений вблизи дисклинационных линий. Градиентное решение (9) позволяет рассчитывать деформации и напряжения в непосредственной близости от линии дислокации и анализировать короткодействующие взаимодействия в плотных дисклинационных ансамблях. Полученные результаты представляются полезными для построения физических моделей структуры и механического поведения металлических стекол и наноструктурных материалов, а также обычных металлов и сплавов при высоких степенях пластической деформации.

Работа выполнена в рамках программы INTAS и при частичной поддержке Научного совета по МНТП России "Физика твердотельных наноструктур" (грант № 97-3006).

Список литературы

- [1] Р. Де Вит. Континуальная теория дисклинаций. Мир., М. (1977). 208 с.
- [2] В.А. Лихачев, Р.Ю. Хайров. Введение в теорию дисклинаций. Изд-во ЛГУ. Л. (1975). 183 с.
- [3] В.И. Владимирова, А.Е. Романов. Дисклинации в кристаллах. Наука, Л. (1986). 224 с.
- [4] В.В. Рыбин. Большие пластические деформации и разрушение металлов. Металлургия, М. (1986). 224 с.
- [5] V.G. Gryaznov, L.I. Trusov. Progress in Material Science **37**, 4, 290 (1993).
- [6] A.E. Romanov. Mater. Sci. Eng. **A164**, 1-2, 58 (1993); NanoStruct. Mater. **6**, 1-4, 125 (1995).
- [7] M.Yu. Gutkin, I.A. Ovid'ko. NanoStruct. Mater. **2**, 3, 631 (1993); Phil. Mag. **A70**, 4, 561 (1994).
- [8] M.Yu. Gutkin, K.N. Makaelyan, I.A. Ovid'ko. NanoStruct. Mater. **6**, 1-4, 779 (1995); Phys. Stat. Sol. (a) **153**, 2, 337 (1996).
- [9] A.A. Nazarov, A.E. Romanov, R.Z. Valiev. Scripta Mater. **34**, 5, 729 (1996).
- [10] И.В. Золотухин. Физические свойства аморфных металлических материалов. Металлургия, М. (1986). 176 с.
- [11] И.А. Овидько. Дефекты в конденсированных средах: стекла, кристаллах, квазикристаллах, жидких кристаллах, магнетиках, сверхтекучих жидкостях. Знание, Л. (1991). 247 с.
- [12] M.Yu. Gutkin, I.A. Ovid'ko, A.E. Romanov. Radiat. Eff. Defects Solids **129**, 1, 239 (1994).
- [13] В.А. Лихачев, В.Е. Шудегов. Принципы организации аморфных структур. Изд-во С.-Петербургского ун-та. СПб (1999). 228 с.
- [14] J.S. Speck, A.C. Daykin, A. Seifert, A.E. Romanov, W. Pompe. J. Appl. Phys. **78**, 3, 1696 (1995).
- [15] A.E. Romanov, W. Pompe, J.S. Speck. J. Appl. Phys. **79**, 8, 4037 (1996).
- [16] Дж. Хирт. И. Лоте. Теория дислокаций. Атомиздат, М. (1972). 600 с.
- [17] Г.П. Черепанов. Механика хрупкого разрушения. Наука, М. (1974). 640 с.
- [18] Н.Ф. Морозов. Математические вопросы теории трещин. Наука, М. (1984). 256 с.
- [19] F.A. McClintock. Acta Metal. **8**, 2, 127 (1960).
- [20] M. Misiu. Rev. Roum. Sci. Techn., Sér. méc. appl. **10**, 1, 35 (1965).
- [21] C. Teodosiu. Rev. Roum. Sci. Techn., Sér. méc. appl. **10**, 6, 1461 (1965).
- [22] Z. Knésl, F. Semela. Int. J. Eng. Sci. **10**, 1, 83 (1972).
- [23] J.P. Nowacki. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn. **21**, 11, 585 (1973); **22**, 7/8, 379 (1974); Arch. Mech. **29**, 4, 531 (1977).
- [24] W. Nowacki. Arch. Mech. **26**, 1, 3 (1974).
- [25] S. Minagawa. Letters in Appl. & Eng. Sci. **5**, 2, 85 (1977); Int. J. Eng. Sci. **12**, 7, 447 (1977).
- [26] L. Lejček. Czech. J. Phys. **B33**, 447 (1983); **B35**, 655 (1985); **B35**, 726 (1985).
- [27] И.А. Кунин. Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. Наука, М. (1975). 416 с.
- [28] A.D. Brailsford. Phys. Rev. **142**, 2, 383 (1966).
- [29] A.C. Eringen. J. Phys. D: Appl. Phys. **10**, 671 (1977); J. Appl. Phys. **54**, 9, 4703 (1983); In: The Mechanics of Dislocations / Ed. by E.C. Aifantis, J.P. Hirth. American Society for Metals, Metals Park, Ohio (1985). P. 101.
- [30] K.L. Pan. Radiat. Eff. Defects Solids **133**, 22, 167 (1995).
- [31] Y.Z. Povstenko. J. Phys. D: Appl. Phys. **28**, 1, 105 (1995); Int. J. Eng., Sci. **33**, 575 (1995); Proc. of Euromech-Mecamat, EMMC2: Mechanics of Materials with Intrinsic Length Scale / Ed by A. Bertram et al. Magdeburg (1998). P. 299.
- [32] A.C. Eringen, C.G. Speziale, B.S. Kim. J. Mech. Phys. Solids **25**, 339 (1977).
- [33] N. Ari, A.C. Eringen. Cryst. Lattice Defects Amorph. Mat. **10**, 1, 33 (1983).
- [34] B.S. Altan, E.C. Aifantis. Scripta Metall. Mater. **26**, 2, 319 (1992); J. Mech. Behavior of Materials **8**, 3, 231 (1997).
- [35] R.D. Mindlin. Int. J. Solids Structures **1**, 4, 417 (1965).
- [36] C.Q. Ru, E.C. Aifantis. Acta Mechanica **101**, 1, 59 (1993).
- [37] E.C. Aifantis. J. Mech. Behaviour of Materials **5**, 3, 355 (1994).
- [38] D.J. Unger, E.C. Aifantis. Int. J. Fracture **71**, R27 (1995).
- [39] G.E. Exadaktylos, E.C. Aifantis. J. Mech. Behavior of Materials **7**, 1, 93 (1996).
- [40] I. Vardoulakis, G. Exadaktylos, E.C. Aifantis. Int. J. Solids Structures **33**, 30, 4531 (1996).
- [41] M.Yu Gutkin, E.C. Aifantis. Scripta Mater. **35**, 11, 1353 (1996); **36**, 1, 129 (1997); Phys. Stat. Sol. (a) **214**, 2, 245 (1999).
- [42] M.Yu Gutkin, E.C. Aifantis. Phys. Stat. Sol. (a) **214**, 2, 245 (1999).
- [43] M.Yu Gutkin, E.C. Aifantis. Scripta Mater. **40**, 5, 559 (1999).
- [44] C.Q. Ru, E.C. Aifantis. Preprint (1993), unpublished.