Особые частоты в спектрах оптического отражения от резонансных брэгговских структур

© М.М. Воронов, Е.Л. Ивченко, А.Н. Поддубный, В.В. Чалдышев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: poddubny@coherent.ioffe.ru

(Поступила в Редакцию 23 декабря 2005 г.)

Теоретически исследованы спектры оптического отражения от резонансных брэгговских структур с квантовыми ямами. Дано аналитическое объяснение наличия в спектрах двух особых частот, на которых коэффициент отражения слабо зависит от числа квантовых ям в структуре. Проанализировано влияние нерадиационного затухания экситона на спектры отражения вблизи особых частот. Показано, что учет диэлектрического контраста приводит к появлению в спектрах третьей особой частоты, на которой взаимно компенсируются вклады в отражение, связанные с диэлектрическим контрастом и экситонным резонансом.

Работа поддержана программами РАН и грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 05-02-17778.

PACS: 73.21.Fg, 78.67.De, 71.35.-y

1. Введение

Резонансные брэгговские структуры с квантовыми ямами были впервые рассмотрены теоретически в работе [1], а затем экспериментально исследованы в системах, выращенных на основе полупроводников $A^{\mathrm{II}}B^{\mathrm{VI}}$ [2–4] и $A^{\mathrm{III}}B^{\mathrm{V}}$ [5–8]. Теория оптической спектроскопии резонансных брэгговских структур получила дальнейшее развитие в работах [9–16]. В резонансных брэгговских структурах без диэлектрического контраста, т.е. с совпадающими диэлектрической проницаемостью барьера $\varepsilon_b \equiv n_b^2$ и фоновой диэлектрической проницаемостью ямы $\varepsilon_a \equiv n_a^2$, спектр оптического отражения при малом числе квантовых ям N представляет собой лоренциан с полушириной $N\Gamma_0 + \Gamma$, где Γ_0 и Γ — соответственно радиационное и нерадиационное затухание экситона [1]. При очень большом числе ям коэффициент отражения близок к единице внутри запрещенной зоны экситонных поляритонов и резко уменьшается вблизи ее границ $\omega_0 - \Delta$ и $\omega_0 + \Delta$, где $\Delta = \sqrt{2\omega_0\Gamma_0/\pi}$ [11,14]. В работах [14,15] рассчитаны спектры отражения при произвольных значениях N, включая промежуточную область, в которой $N\Gamma_0$ и Δ сопоставимы. Расчет показывает, что имеются две особые частоты, вблизи которых коэффициент отражения от резонансной брэгговской структуры с согласованными диэлектрическими константами принимает значения, близкие к коэффициенту отражения от однородного материала с показателем преломления n_b и практически не зависящие от числа квантовых ям. В настоящей работе дается аналитическое объяснение этого эффекта. Кроме того, проанализировано влияние диэлектрического контраста $\varepsilon_a - \varepsilon_b \neq 0$ на существование изучаемых особых частот.

2. Структуры с согласованными диэлектрическими константами

Рассматриваемая структура схематически показана на рис. 1: она граничит слева с вакуумом и включает покрывающий слой из материала барьера B толщиной b', N квантовых ям из материала A (каждая толщиной a), разделенных барьерами толщиной b, и полубесконечную среду B. Амплитудный коэффициент отражения при нормальном падении света частоты ω со стороны вакуума на покрывающий слой записывается в виде [1]

$$r(N) = \frac{r_{01} + \tilde{r}_N e^{2i\phi}}{1 + r_{01}\tilde{r}_N e^{2i\phi}}. \quad (1)$$

Здесь $r_{01} = (1 - n_b)/(1 + n_b)$ — коэффициент отражения вакуум–полубесконечная среда B; $\phi = k_b(b' - b/2)$, $k_b = n_b(\omega/c)$, c — скорость света в вакууме; $\tilde{r}_N$ — коэф-

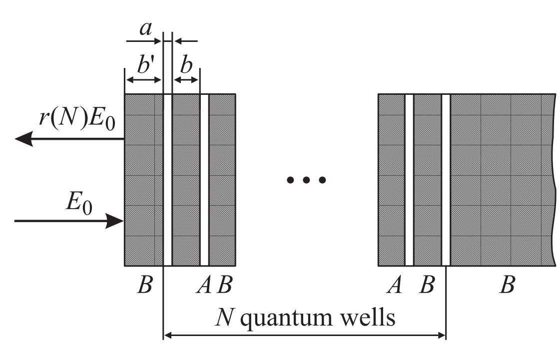

Рис. 1. Схематическое изображение структуры с квантовыми ямами, для которой рассчитывается амплитудный коэффициент отражения $r(N)$ при нормальном падении света амплитуды E_0.

фициент отражения от структуры с N квантовыми ямами, помещенными между неограниченными барьерами. Этот коэффициент отнесен к плоскости, расположенной на расстоянии $(a+b)/2$ от центра крайней левой ямы, и для него справедливо выражение [10,17]

$$\tilde{r}_N = \frac{\tilde{r}_1}{1 - \tilde{t}_1 \frac{\sin(N-1)Kd}{\sin NKd}}, \quad (2)$$

где комплексные коэффициенты $\tilde{r}_1, \tilde{t}_1$ описывают амплитудное отражение и пропускание света слоем толщиной $d = a + b$ с ямой, находящейся в центре слоя, K — волновой вектор экситонного поляритона на частоте ω в бесконечной периодической структуре. Для структуры без диэлектрического контраста имеем [11,17]

$$\tilde{r}_1 = e^{ik_b d}\, r_1, \qquad \tilde{t}_1 = e^{ik_b d}\,(1 + r_1),$$

$$r_1 = \frac{i\Gamma_0}{\omega_0 - \omega - i(\Gamma_0 + \Gamma)}, \quad (3)$$

где ω_0 — резонансная частота экситона.

На рис. 2 представлены спектры отражения от резонансной брэгговской структуры с согласованными диэлектрическими константами. Спектры рассчитаны в отсутствие нерадиационного затухания (a) и при $\hbar\Gamma = 100\,\mu$eV (b). Остальные параметры указаны в подписи к рисунку. В согласии с [14,15] в спектрах, показанных на рис. 2, a и b, имеются две частоты, обозначенные ω_+ и ω_- и указанные стрелками, на которых коэффициент отражения $R_N = |r(N)|^2$ близок к r_{01}^2 и почти не зависит от N при $N < 100$. Особые частоты привязаны к краям запрещенной зоны экситонных поляритонов $\omega_0 \pm \Delta$ таким образом, что

$$\varepsilon_+ \equiv \omega_+ - (\omega_0 + \Delta) \ll \Delta \text{ и } \varepsilon_- \equiv (\omega_0 - \Delta) - \omega_- \ll \Delta. \quad (4)$$

С другой стороны, коэффициент отражения R_∞ от полубесконечной структуры (кривые ∞ на рис. 2, a и b) испытывает резкое изменение от значений, близких к единице при $\Gamma \neq 0$ или равных единице при $\Gamma \to +0$ внутри запрещенной зоны, к значениям $R_\infty < r_{01}^2$ в примыкающих разрешенных зонах. При больших значениях N, превышающих 1000, спектр отражения $R_N(\omega)$ от структуры с $\hbar\Gamma = 100\,\mu$eV близок к $R_\infty(\omega)$, а при $\Gamma = 0$ спектр сильно осциллирует вне области запрещенной зоны с периодом осцилляций, уменьшающимся с ростом N.

Наличие особых частот $\omega_\pm$ в спектрах отражения можно объяснить, если заметить, что в окрестности краевых частот $\omega_0 \pm \Delta$, где $N|Kd - \pi| \ll 1$, для отношения синусов в (2) применимо приближение

$$\frac{\sin(N-1)Kd}{\sin N\,Kd} \approx -\frac{N-1}{N}. \quad (5)$$

Поэтому коэффициент отражения $\tilde{r}_N$, а значит, и коэффициент отражения (1) можно представить в виде

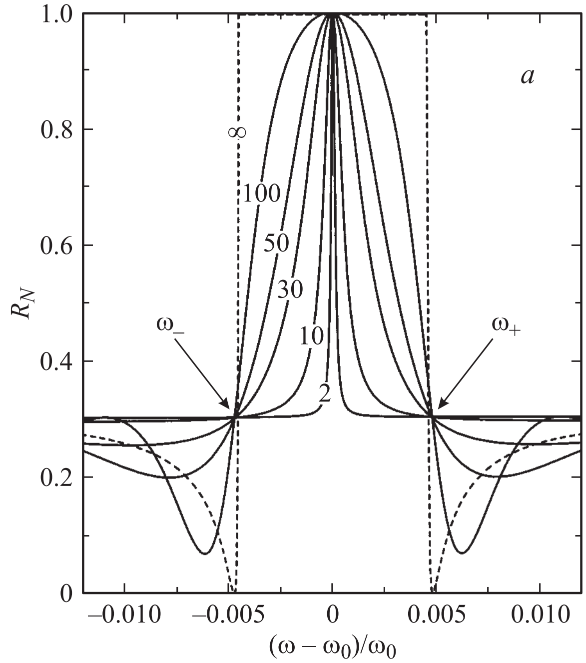

Рис. 2. Коэффициент отражения R_N от структуры с N квантовыми ямами при согласованных диэлектрических константах материалов A и B. Расчет проводился при следующих значениях параметров структуры: фоновый показатель преломления $n_b = 3.45$, резонансная частота $\hbar\omega_0 = 1.533$ eV, радиационное затухание экситона $\hbar\Gamma_0 = 50\,\mu$eV и нерадиационное затухание $\Gamma = 0$ (a) или $\hbar\Gamma = 100\,\mu$eV (b). Кривые рассчитаны для шести структур с различным количеством квантовых ям N, указанным около каждой кривой. Символом ∞ отмечен спектр отражения от структуры с бесконечным числом ям ($N \to \infty$).

дробно-линейной функции

$$r(N) = \frac{\alpha N + \beta}{\gamma N + \delta} \quad (6)$$

с коэффициентами

$$\alpha = r_{01}(1+\tilde{t}_1) + e^{2i\phi}\tilde{r}_1, \quad \beta = -r_{01}\tilde{t}_1,$$

$$\gamma = 1+\tilde{t}_1 + e^{2i\phi} r_{01}\tilde{r}_1, \quad \delta = -\tilde{t}_1. \tag{7}$$

Заметим, что эта формула применима для произвольной периодической структуры с N периодами, если под $\tilde{r}_1, \tilde{t}_1$ понимать коэффициенты отражения и пропускания для слоя толщиной d, помещенного между полубесконечными средами с показателем преломления n_b. В частном случае структуры с N квантовыми ямами и согласованными диэлектрическими константами вместо (7) имеем

$$\alpha = r_{01}(1+e^{i\phi_d})(\omega_0-\omega-i\Gamma) + i\Gamma_0(e^{i(\phi_d+2\phi)} - r_{01}),$$

$$\beta = r_{01}\delta, \quad \delta = -e^{i\phi_d}(\omega_0-\omega-i\Gamma),$$

$$\gamma = (1+e^{i\phi_d})(\omega_0-\omega-i\Gamma) + i\Gamma_0(r_{01}e^{i(\phi_d+2\phi)} - 1), \tag{8}$$

где $\phi_d = k_b d$ и для удобства записи коэффициенты в (8) отличаются от (7) общим множителем $\omega_0 - \omega - i(\Gamma_0+\Gamma)$, что не меняет $r(N)$ в (6).

Продолжим функцию $r(N)$ аналитически на всю комплексную плоскость $z = z' + iz''$. Учтем далее, что дробно-линейное преобразование $r(z)$ переводит окружность в окружность, прямую можно представить окружностью с бесконечным радиусом и точки $z = 1, 2, \ldots, N, \ldots$ лежат на вещественной оси. Поэтому комплексные значения $r(N)$ лежат на окружности с центром в некоторой точке w_0 и радиусом ρ, так что

$$r(N) = w_0 + \rho\, e^{i\phi_N}, \tag{9}$$

где от N зависит только фаза ϕ_N. Значения w_0 и ρ связаны с $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ соотношениями [18]

$$w_0 = \frac{i}{2}\,\frac{\alpha\delta^* - \beta\gamma^*}{\mathrm{Im}(\gamma^*\delta)}, \quad \rho = \left|\frac{\alpha}{\gamma} - w_0\right|. \tag{10}$$

Согласно (9), имеем

$$R_N \equiv |r(N)|^2 = |w_0|^2 + \rho^2 + 2\rho\,\mathrm{Re}(w_0^* e^{i\phi_N}). \tag{11}$$

Если найдется такая частота ω, при которой значение w_0 обращается в нуль (или близко к нулю), то на этой частоте коэффициент отражения R_N равен (или почти равен) $|\alpha/\gamma|^2$ и не зависит от N. В том случае, когда выполняется неравенство $|\omega - \omega_0| \gg \Gamma_0$, экситонный вклад в коэффициент отражения при малых N незначителен и величина R_N главным образом определяется отражением света на границе вакуум–материал B. Таким образом, при малых N справедливо неравенство $|R_N(\omega) - r_{01}^2| \ll 1$. В силу малости величины $|w_0(\omega)|$ это неравенство должно выполняться не только при малых N, но и при всех N, для которых применимо представление $r(N)$ в виде дробно-линейной функции (6).

Расчет показывает, что для структуры с параметрами, указанными в подписи к рис. 2, особые частоты соответствуют значениям $\varepsilon_\pm \approx 0.045\Delta$, а величина $|w_0(\omega)/r_{01}|$ принимает минимальное значение $\approx 10^{-2}$

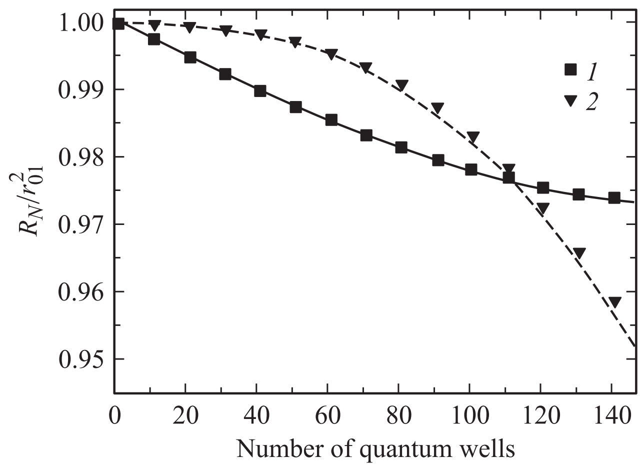

Рис. 3. Зависимость коэффициента отражения $R(\omega)$ от числа квантовых ям N. Расчет проводился для частоты $\omega_+ = \omega_0 + 1.045\Delta$. Значения остальных параметров те же, что для рис. 2. *1* — точная зависимость при $\Gamma = 0$, *2* — точная зависимость при $\hbar\Gamma = 100\,\mu$eV. Сплошная и штриховая линии — приближенный расчет при $\Gamma = 0$ и $\hbar\Gamma = 100\,\mu$eV соответственно.

при $\Gamma = 0$ и $\approx 10^{-3}$ при $\hbar\Gamma = 100\,\mu$eV. При этом ρ совпадает с $|r_{01}|$ с точностью до сотых процента. Для приближенного аналитического нахождения частот $\omega_\pm$ коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в (8) могут быть разложены в ряд по малым параметрам Δ/ω_0, Γ_0/Δ, ε_-/Δ или ε_+/Δ. Подставляя полученные приближенные формулы в (10) и решая уравнение $w_0 = 0$, находим

$$\omega_\pm = \omega_0 \pm \Delta\left(1 + \frac{1}{2n_b^2 - 3}\right) \quad \text{или} \quad \varepsilon_\pm = \frac{\Delta}{2n_b^2 - 3}. \tag{12}$$

При $n_b = 3.45$ следующее из этой формулы отношение $\varepsilon_\pm/\Delta$ отличается от численного результата всего на 8%. Следовательно, близость частот $\omega_\pm$ к краям запрещенной зоны связана с большой величиной диэлектрической проницаемости n_b^2. Таким образом, приближенная запись $r(N)$ в виде дробно-линейного преобразования (6) и малость минимального значения функции $|w_0(\omega)|$ позволяет объяснить наличие особых частот $\omega_\pm$.

Несмотря на то что модуль амплитудного коэффициента отражения $r(N, \omega_\pm)$ практически не зависит от числа квантовых ям, фаза отраженной волны $\phi_N(\omega_\pm)$ существенно меняется с ростом N и описывается с высокой точностью линейной зависимостью

$$\phi_N(\omega_\pm) \approx \pi \pm \frac{4n_b\Gamma_0 N}{\Delta(n_b^2 - 1)}. \tag{13}$$

На рис. 3 (точки *1*) показаны точные значения R_N на частоте ω_+, а сплошной кривой — приближенная зависимость $R_N(\omega_+)$, полученная подстановкой (13) в (11). Видно, что приближенная формула с высокой точностью воспроизводит результаты численного расчета.

На рис. 2, b представлены спектры $R_N(\omega)$, рассчитанные с учетом нерадиационного затухания экситона $\hbar\Gamma = 100\,\mu$eV. Видно, что его учет приводит к уменьшению коэффициента отражения для частот вблизи центра запрещенной зоны, но практически не влияет на положение особых частот $\omega_\pm$. Фаза коэффициента отражения $r(N)$ вблизи этих частот также описывается выражением (13). Однако зависимость $R_N(\omega_\pm)$ при $\hbar\Gamma = 100\,\mu$eV, показанная на рис. 3 (точки *2*), существенно отличается от аналогичной зависимости при $\Gamma = 0$. Для ее приближенного описания недостаточно учесть только зависимость $\phi(N)$ в (11). Это связано с тем, что учет нерадиационного затухания приводит к нарушению условий применимости разложения (5) при значительно меньших N, чем в случае, когда $\Gamma = 0$, и в разложении отношения синусов нужно учитывать первую неисчезающую поправку по степени малой величины $|Kd - \pi|$, а именно

$$\frac{\sin(N-1)Kd}{\sin NKd} = -\frac{N-1}{N}F(N),$$
$$F(N) = 1 + \frac{2N-1}{6}(Kd-\pi)^2. \qquad (14)$$

Это разложение применимо при $N \le 100$. Поскольку величина $F(N)$ отличается от единицы, функция $r(N)$, получаемая в приближении (14), не является, строго говоря, дробно-линейной: коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ сами становятся функциями N и преобразование $r(N)$ уже не переводит вещественную прямую в правильную окружность. Формально выражение для $r(N)$ можно представить в виде (9). При этом зависимостью ϕ_N от Γ можно пренебречь, однако величина w_0 и вещественный коэффициент ρ становятся функциями N. Точки *2* и штриховая кривая на рис. 3 представляют результаты точного и приближенного расчета коэффициента R_N на частоте ω_+ при $\hbar\Gamma = 100\,\mu$eV. Приближенный расчет проводился по формуле (11), но с модифицированными w_0 и ρ. При отличном от нуля нерадиационном затухании значение K становится комплексным и в области разрешенных зон. Как показывает анализ, именно наличие мнимой части K сказывается на различии между сплошной и штриховой кривыми на рис. 3.

3. Учет диэлектрического контраста

При $n_a \ne n_b$ коэффициенты отражения и пропускания для одной квантовой ямы описываются выражениями [10]

$$\tilde r_1 = e^{ik_b d} r_1, \quad \tilde t_1 = e^{ik_b d} t_1,$$
$$r_1 = r^{(0)} + r_{\text{exc}}, \quad t_1 = t^{(0)} + r_{\text{exc}}. \qquad (15)$$

Здесь $r^{(0)}$ и $t^{(0)}$ — коэффициенты отражения и пропускания, рассчитанные в пренебрежении экситонным вкладом,

$$r^{(0)} = e^{-ik_b a} r_{ba} \frac{1 - e^{2ik_a a}}{1 - r_{ba}^2 e^{2ik_a a}},$$
$$t^{(0)} = e^{ik_a a}(e^{-ik_b a} + r_{ab} r^{(0)}), \qquad (16)$$

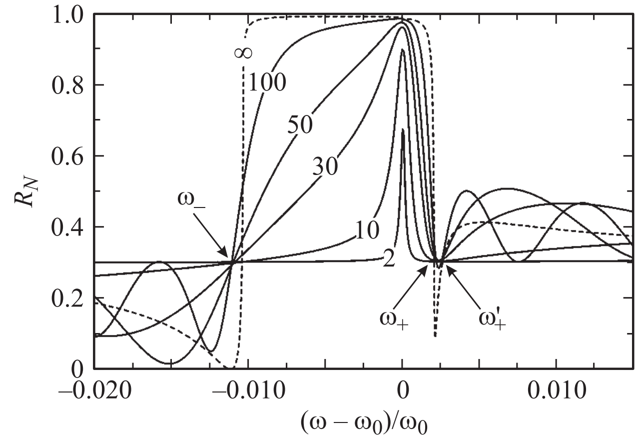

Рис. 4. Коэффициент отражения от структуры с N квантовыми ямами при наличии диэлектрического контраста, т.е. при $n_a \ne n_b$. Расчет проводился при $\hbar\Gamma = 100\,\mu$eV, $a = 120$ Å, $n_a = 3.59$ и $n_b = 3.45$. Значения остальных параметров те же, что и при расчете кривых на рис. 2. Спектры рассчитаны для шести структур с различным количеством квантовых ям, указанных около каждой кривой. Символом ∞ отмечен спектр отражения от структуры с бесконечным числом ям.

где $r_{ab} = -r_{ba} = (n_a - n_b)/(n_a + n_b)$. Экситонный вклад в r_1 и t_1 имеет вид

$$r_{\text{ecx}} = t^{(0)} \frac{i\bar\Gamma_0}{\omega_0 - \omega - i(\Gamma - \bar\Gamma)}, \qquad (17)$$

где

$$\bar\Gamma_0 = \frac{1 + r_{ab}\, e^{ik_a a}}{1 - r_{ab}\, e^{ik_a a}} \Gamma_0. \qquad (18)$$

Коэффициент отражения от структуры с N квантовыми ямами, так же как в случае $n_a = n_b$, выражается через коэффициенты отражения и пропускания одиночной квантовой ямы по формулам (1) и (2). Период системы определяется из обобщенного брэгговского условия [10,16], которое при $|n_a - n_b| \ll n_b$ с высокой точностью сводится к условию

$$\frac{\omega_0}{c} n_b d = \pi,$$

формально совпадающему с точным резонансным брэгговским условием для структуры с согласованными диэлектрическими константами.

На рис. 4 показана зависимость от числа квантовых ям коэффициента отражения света от резонансной брэгговской структуры с различными показателями преломления n_a и n_b. Значения параметров указаны в подписи к рисунку. Расчет проводился с учетом нерадиационного затухания $\hbar\Gamma = 100\,\mu$eV. Видно, что в спектрах отражения имеется не две, а три особые частоты. Стрелками показано положение этих частот, обозначенных ω_-, ω_+ и ω'_+. Появление в спектрах отражения особых частот $\omega_\pm$ может быть объяснено в терминах дробно-линейного преобразования так же, как и для структуры без диэлектрического контраста.

Поскольку эти частоты расположены вблизи краев запрещенной зоны экситонных поляритонов, применимо разложение (5). При $\Gamma \neq 0$ необходимо аналогично (14) учитывать слагаемые, квадратичные по разности $Kd-\pi$. Так же как и в случае $n_a = n_b$, на частотах $\omega_\pm$ модуль коэффициента отражения $r(N)$ слабо зависит от N, но фаза зависит от N существенно. Закон изменения ϕ_N на частоте ω, близкой к верхнему или нижнему краю поляритонной запрещенной зоны, может быть приближенно описан выражением

$$\phi_N(\omega) = \pi + \left(\frac{\Gamma_0}{\omega - \omega_0} - 2\pi r_{ab}\,\frac{a}{d}\right)\frac{4n_b N}{n_b^2 - 1},$$

применимым при $|\omega - \omega_0| \gg \Gamma_0, \Gamma$. В частном случае $r_{ab} = 0$ оно переходит в выражение (13).

В отличие от частот $\omega_\pm$ на частоте ω'_+ как модуль, так и фаза коэффициента отражения $r(N)$ почти не зависят от N, т.е. не только $R_N = |r(N)|^2 \approx r_{01}^2$, но и $r(N) \approx r_{01}$. Это связано с тем, что на частоте ω'_+ практически отсутствует отражение света от одной квантовой ямы, помещенной между полубесконечными барьерами, т.е. близка к нулю сумма двух слагаемых $r^{(0)}(\omega'_+) + r_{\text{exc}}(\omega'_+)$ в выражении (15) для коэффициента отражения. На этой частоте взаимно компенсируются вклады в отражение от квантовой ямы, обусловленные наличием диэлектрического контраста и наличием экситонного резонанса [19]. Согласно (2), равенство нулю коэффициента отражения от одной ямы приводит к обращению в нуль коэффициента отражения от N таких же ям, т.е. $\tilde{r}_N(\omega'_+) = 0$. Поэтому амплитудный коэффициент отражения от всей структуры $r(N, \omega'_+)$ равен r_{01} и не зависит от N.

Значение частоты ω'_+ удовлетворяет неравенствам $|\omega'_+ - \omega_0| \gg \Gamma_0, \Gamma$. Это позволяет пренебречь затуханиями $\bar{\Gamma}_0$ и Γ в знаменателе выражения (17) для r_{exc}. Кроме того, ввиду близости показателей преломления n_a и n_b выполняется неравенство $|r_{ab}| \ll 1$. В пренебрежении поправками порядка r_{ab}^2 в выражениях для $r^{(0)}$ и $t^{(0)}$ и отличием $\bar{\Gamma}_0$ от Γ_0 условие $r_1(\omega'_+) = 0$ выполняется на частоте

$$\omega'_+ = \omega_0 + \frac{\Gamma_0}{2r_{ab}\sin k_a^{(0)} a}, \qquad (19)$$

где $k_a^{(0)} = n_a\omega/c$. Видно, что неравенства $|\omega'_+ - \omega_0| \gg \Gamma_0, \Gamma$ выполняются при достаточно малом коэффициенте r_{ab}. В пределе $n_a \to n_b$, когда $r_{ab} \to 0$, значение ω'_+ стремится к бесконечности, т.е. эта особая частота отсутствует для структуры с согласованными диэлектрическими константами. Для параметров структуры, использованных при расчете спектров на рис. 4, частоты ω_+ и ω'_+ случайно оказались близкими.

4. Заключение

Для резонансной брэгговской структуры с согласованными диэлектрическими проницаемостями материалов квантовых ям и барьеров дано аналитическое объяснение наличия в спектрах оптического отражения особых частот $\omega_\pm$, на которых коэффициент отражения R_N близок к r_{01}^2 и слабо зависит от числа квантовых ям в структуре. Амплитудный коэффициент отражения $r(N)$ вблизи этих частот может быть приближенно записан в виде дробно-линейной функции аргумента N, которая сопоставляет точкам на вещественной прямой точки комплексной плоскости, расположенные на окружности с центром вблизи начала координат. Это означает, что коэффициент отражения $R(\omega_\pm) = |r(\omega_\pm)|^2$ действительно почти не зависит от N, хотя фаза отраженной волны $\arg r(N)$ хорошо аппроксимируется линейной функцией N. Мы показали, что при учете нерадиационного затухания экситона $\Gamma \neq 0$ в спектрах отражения также присутствуют особые частоты, но чувствительность коэффициента отражения к N на этих частотах становится сильнее.

В спектрах оптического отражения от резонансной брэгговской структуры с диэлектрическим контрастом имеется не две, а три особые частоты. Появление двух из них может быть объяснено в терминах дробно-линейного преобразования так же, как и в случае $n_a = n_b$. На третьей частоте ω'_+ практически не происходит отражения света от одной квантовой ямы, помещенной между полубесконечными барьерами, поскольку взаимно компенсируются вклады в отражение, обусловленные диэлектрическим контрастом и наличием экситонного резонанса. Это приводит к тому, что амплитудный коэффициент отражения от структуры, содержащей произвольное количество таких ям, на частоте ω'_+ близок к r_{01}, как если бы квантовых ям не было вообще.

Список литературы

[1] Е.Л. Ивченко, А.И. Несвижский, С. Йорда. ФТТ **36**, 2118 (1994).

[2] V.P. Kochereshko, G.R. Pozina, E.L. Ivchenko, D.R. Yakovlev, A. Waag, W. Ossau, G. Landwehr, R. Hellmann, E.O. Göbel. Superlatt. Microstruct. **15**, 471 (1994).

[3] Y. Merle d'Aubigné, A. Wasiela, H. Mariette, T. Dietl. Phys. Rev. B **54**, 14 003 (1996).

[4] J. Sadowski, H. Mariette, A. Wasiela, R. André, Y. Merle d'Aubigné, T. Dietl. Phys. Rev. B **56**, 1664 (1997).

[5] M. Hübner, J. Kuhl, T. Stroucken, A. Knorr, S.W. Koch, R. Hey, K. Ploog. Phys. Rev. Lett. **76**, 4199 (1996).

[6] C. Ell, J. Prineas, T.R. Nelson, jr., S. Park, H.M. Gibbs, G. Khitrova, S.W. Koch. Phys. Rev. Lett. **80**, 4795 (1998).

[7] G.R. Hayes, J.L. Staehli, U. Oesterle, B. Deveaud, R.T. Phillips, C. Ciuti. Phys. Rev. Lett. **83**, 2837 (1999).

[8] J.P. Prineas, C. Ell, E.S. Lee, G. Khitrova, H.M. Gibbs, S.W. Koch. Phys. Rev. B **61**, 13 863 (2000).

[9] В.А. Кособукин, М.М. Моисеева. ФТТ **37**, 3694 (1995).

[10] Е.Л. Ивченко, В.П. Кочерешко, А.В. Платонов, Д.Р. Яковлев, А. Вааг, В. Оссау, Г. Ландвер. ФТТ **39**, 2072 (1997).

[11] E.L. Ivchenko, M. Willander. Phys. Stat. Sol. (b) **215**, 199 (1999).

[12] L.I. Deych, A.A. Lisyansky. Phys. Rev. B **62**, 4242 (2000).
[13] G. Malpuech, A. Kavokin, W. Langbein, J.M. Hvam. Phys. Rev. Lett. **85**, 651 (2000).
[14] T. Ikawa, K. Cho. Phys. Rev. B **66**, 85 338 (2002).
[15] L. Pilozzi, A. D'Andrea, K. Cho. Phys. Rev. B **69**, 205 311 (2004).
[16] E.L. Ivchenko, M.M. Voronov, M.V. Erementchouk, L.I. Deych, A.A. Lisyansky. Phys. Rev. B **70**, 195 106 (2004).
[17] E.L. Ivchenko. Optical spectroscopy of semiconductor nanostructures. Alpha Science International, Harrow, U.K. (2005).
[18] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. Лань, СПб (2002). 688 с.
[19] M.V. Erementchouk, L.I. Deych, A.A. Lisyansky. Phys. Rev. B **71**, 235 335 (2005).