

01;03

Рэлеевский распад сильно заряженного пузыря в диэлектрической жидкости

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, А.Н. Жаров

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 3 ноября 1997 г.)

Исходя из принципа наименьшего рассеяния энергии Онзагера, найдены размеры, заряды и общее количество дочерних пузырей, эмиттируемых при неустойчивости сильно заряженного пузыря в диэлектрической жидкости.

В различных задачах технической физики приходится сталкиваться с неустойчивостью пузырей в жидком диэлектрике по отношению к собственному или индуцированному во внешнем поле поверхностному заряду. В частности, такая задача представляет значительный интерес для теории пробоя жидкого диэлектрика [1–5]. Процесс пробоя связан с появлением у катода, ростом и распадом газового микропузырька. Один из возможных сценариев развития пробоя связан со сбросом собственного или поляризационного заряда вследствие развития неустойчивости его поверхности [6–7]. Неустойчивость газового пузыря во внешнем электрическом поле была подробно исследована экспериментальным путем в работе [1], где фотографически зафиксирован электростатический распад пузыря в диэлектрике. В процессе распада из родительского пузыря выбрасывается множество мелких дочерних пузырей, образующих два скопления — по одному в окрестности каждого эмиссионного выступа на вершинах сфероидального пузыря (равновесная форма газового пузыря в однородном внешнем электрическом поле есть сфероид). В настоящем исследовании будет проведен теоретический анализ электростатического распада сильно заряженного пузыря (по схеме, ранее использованной в [8,9] при изучении распада заряженных капель) в качестве начального этапа исследования закономерностей распада пузырей, неустойчивых по отношению к собственному или индуцированному зарядам.

1. Рассмотрим изначально сферический пузырь радиуса R в жидком диэлектрике, обладающем большой теплоемкостью (ввиду этого будем пренебрегать изменением температуры системы в процессе распада), имеющий на границе раздела газ–жидкость заряд Q , чуть больший предельного в смысле устойчивости по Рэлею. Возможны два пути развития неустойчивости пузыря: в одном случае будет происходить увеличение объема пузыря до выполнения условия баланса давлений, во втором благодаря экспоненциальному росту амплитуд капиллярных волн, связанных с тепловым движением молекул жидкой среды, пузырь может претерпеть неустойчивость, сходную с рэлеевской неустойчивостью свободной сильно заряженной капли [8,9]. При этом родительский пузырь вытягивается в фигуру, близкую

к сфероиду вращения с эксцентриситетом e_1 (в [1] найдено, что $e_1^2 \approx 0.7$). После чего на противоположных его вершинах происходит зарождение дочерних пузырей, соединенных перетяжками с материнским. После разрыва перетяжек дочерние пузыри изменяют свой объем, сжимаясь или расширяясь, в связи с изменением баланса давлений, вызванного варьированием формы дочерних пузырей после отрыва от родительского. Благодаря вязкой диссипации кинетической энергии дочерних пузырей и тормозящему влиянию электрического поля эмиттированных ранее пузырьков напротив вершин сфероида образуются скопления дочерних пузырей на расстоянии $L = ta$ (a — большая полуось материнского пузыря) от вершин родительского пузыря. В нижеследующих рассуждениях в рамках проводимого качественного анализа для упрощения расчетов электрическое поле скопления дочерних пузырей заменим полем эквивалентного точечного заряда, находящимся на расстоянии от вершины материнского пузыря L и имеющим заряд, равный суммарному заряду ранее эмиттированных дочерних пузырей.

Примем в силу симметрии задачи, что в результате n -го акта эмиссии образуются два дочерних пузыря с равными зарядами q_n ($q_n \ll Q$) и радиусами r_n ($r_n \ll R$). Будем считать также, что n -й дочерний пузырь, находясь в электрическом поле материнского пузыря и поле скопления дочерних, имеет форму эллипсоида вращения с эксцентриситетом e_2 [10], который в дальнейшем будем определять в итерационной процедуре. В процессе распада происходит изменение энергии системы, складывающееся из изменения свободной энергии сил поверхностного натяжения, изменения собственной электростатической энергии пузырей и энергии электростатического взаимодействия пузырей, а также работы, совершаемой при сжатии или расширении пузыря из-за непропорционального изменения электрического и лапласовского давления в пузырях при эмиссии.

Будем считать, что дочерний пузырь содержит в себе газ и насыщенный пар, парциальные давления которых, постоянны и соответственно равны P_2^g и P^v . Принимая температуру жидкости, суммарный электрический заряд и радиус материнского пузыря постоянными, нетрудно найти по заряду дочернего пузыря изменение энергии

системы в линейном приближении в результате n -го распада

$$\begin{aligned} \Delta U &= 8\pi\sigma r_n^2 A(e_2) - 2Q_{n-1}q_n \frac{B(e_1)}{R} \\ &+ q_n^2 \frac{B(e_2)}{r_n} + 2q_n Q_{n-1} \frac{K(\nu_n)}{R} + 2\frac{q_n}{L} \sum_{k=1}^{n-1} q_k \\ &- \frac{8\pi}{3} r_n^3 P_2^g \ln \left[\frac{r_n}{r_n^b} \right]^3 + \frac{8\pi}{3} P^v [(r_n^b)^3 - r_n^3]; \\ A(e_i) &= \frac{1}{2} \left[(1 - e_i^2)^{1/2} + \frac{\arcsin e_i}{e_i} \right] (1 - e_i^2)^{-1/\sigma}; \quad i = 1, 2; \\ B(e_i) &= \frac{(1 - e_i^2)^{1/3}}{e_i} \operatorname{arth}(e_i); \quad i = 1, 2; \\ \nu_n &= \left(1 + \frac{\xi_n}{a^2} \right)^{1/2}; \\ K(\nu_n) &= \frac{(1 - e_1^2)^{1/3}}{e_1} \operatorname{arth} \left(\frac{e_1}{\nu_n} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

σ — коэффициент поверхностного натяжения границы жидкость–газ, Q_{n-1} — заряд материнского пузыря до n -го распада, ξ_n — эллипсоидальная координата n -го дочернего пузыря, r_n^b — радиус дочернего пузыря непосредственно перед сжатием или расширением.

В выражении (1) первый член представляет собой поверхностную энергию двух дочерних пузырей, второй — изменение собственной электрической энергии материнского пузыря, третий — собственную электростатическую энергию дочерних пузырей, четвертый — энергию взаимодействия дочерних пузырей с материнским, пятый — энергию взаимодействия скопления пузырей с n -дочерним, шестой — работу газа в процессе изотермического изменения объема дочерних пузырей, седьмой — работу пара при изобарном изменении их объема. Появление последних двух слагаемых связано с тем, что поверхностная плотность заряда на эмиссионных выступах в процессе отрыва дочернего пузыря велика, а давление газа внутри всей системы порядка давления в родительском пузыре. После образования дочернего пузыря из-за его способности к изменению объема баланс давлений на поверхности пузыря будет устанавливаться за малое время.

Ясно, что, также как в задаче о диспергировании сильно заряженной капли [8,9], процесс деления пузыря будет продолжаться до тех пор пока кулоновская сила, отрывающая дочерний пузырь, превосходит лапласовскую силу $2\pi\sigma r_*$ (r_* — радиус перетяжки), удерживающую его. Принимая, что напряженность поля в точке отрыва определяется полем материнского пузыря, а также полем ранее оторвавшихся дочерних пузырей, нетрудно получить условие отрыва дочернего пузыря от

родительского [8,9]

$$\frac{\alpha X_n (1 - e_2^2)^{1/\sigma}}{8} \leq W Y_n \left\{ \left[1 - 2 \sum_{k=1}^n Y_k \right] \frac{(1 - e_1^2)^{2/3}}{(\nu_n^2 - e_1^2)} - \frac{(1 - e_1^2)^{2/3}}{m^2} \sum_{k=1}^{n-1} Y_k \right\}, \quad (2)$$

где $Y_k = q_k/Q$, $X_k = r_k/R$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — соответственно безразмерный заряд и радиус k -го дочернего пузыря, $\alpha = r_*/b_n$, b_n — малая полуось n -го дочернего пузыря, $W = Q^2/(16\pi\sigma R^3)$ — параметр Рэля исходного материнского пузыря перед первым распадом.

Следует отметить, что неустойчивость пузыря реализуется при $W + \beta \geq 1$, где $\beta = (P^g + P^v)R/2\sigma$, P^g — парциальное давление газа в материнском пузыре, перед диспергированием, в то время как неустойчивость капли реализуется при $W \geq 1$ [11]. В уравнении (2) первый член в фигурных скобках характеризует напряженность электрического поля созданного материнским пузырем в точке отрыва n -го дочернего пузыря, а второй член учитывает ослабление поля скоплением дочерних пузырей, образовавшихся ранее.

Потребуем, чтобы в силу принципа наименьшего рассеяния энергии Онзагера изменение ее было экстремальным, т.е. чтобы выполнялись условия [12] $\partial(\Delta U)/\partial q_n = 0$, $\partial(\Delta U)/\partial r_n = 0$. Находя частные производные от (1) по q_n и r_n , получим еще два уравнения в дополнение к (2) для нахождения трех неизвестных X_n , Y_n , ν_n :

$$\begin{aligned} Y_n \frac{B(e_2)}{X_n} + \left[1 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} Y_k \right] [K(\nu_n) - B(e_1)] \\ + \frac{(1 - e_1^2)^{1/3}}{m} \sum_{k=1}^{n-1} Y_k = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} X_n A(e_2) - W Y_n^2 \frac{B(e_2)}{X_n^2} - \eta \beta X_n^2 = 0, \\ \eta = \frac{P_2^g + P^v}{P^g + P^v}. \end{aligned} \quad (4)$$

2. При численном решении системы уравнений (2)–(4) выяснилось, что присутствие в окрестности эмиттирующих выступов облаков, ранее эмиттированных дочерних пузырей, существенным образом сказывается на характеристиках диспергирования. Это можно видеть на рис. 1 и 2, на которых представлены зависимости безразмерных радиуса X (кривая 1), заряда Y (кривая 2), удельного заряда Z (кривая 3) для дочерних пузырей и параметры Рэля W для материнского пузыря (кривая 4) в зависимости от порядкового номера эмиттируемого пузыря n при значениях физических параметров $W = 1$, $e_1^2 = 0.7$, $\alpha = 0.9$, $\eta = 1.1$, $\beta = 0.5$, $m = 1$ (рис. 1) и $m \gg 1$ (рис. 2). Значение $\alpha = 0.9$, принятое при расчетах, выбиралось на основе данных по

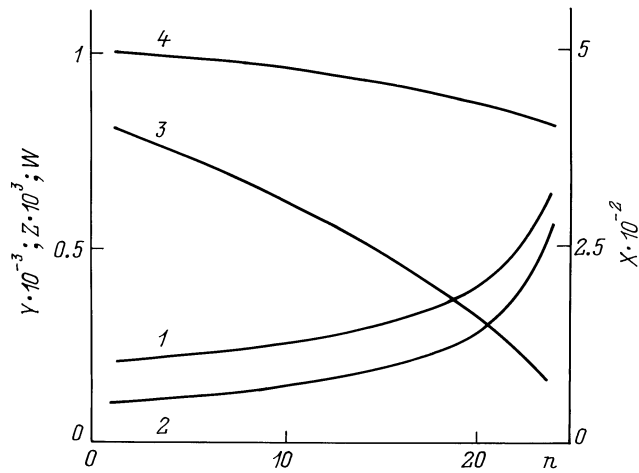


Рис. 1.

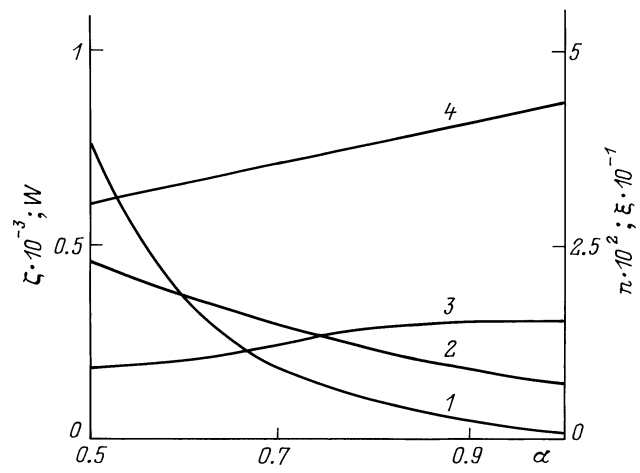


Рис. 3.

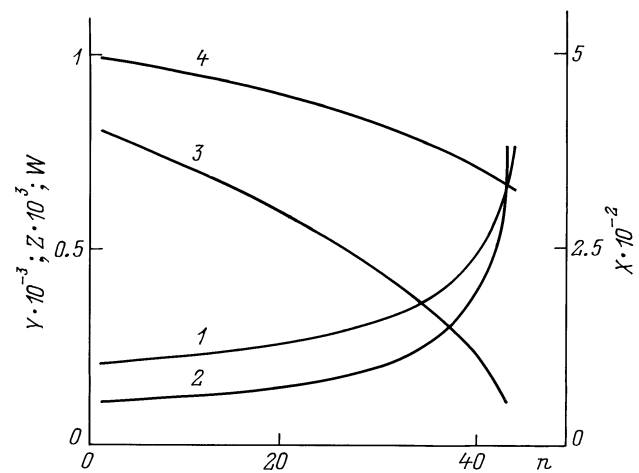


Рис. 2.

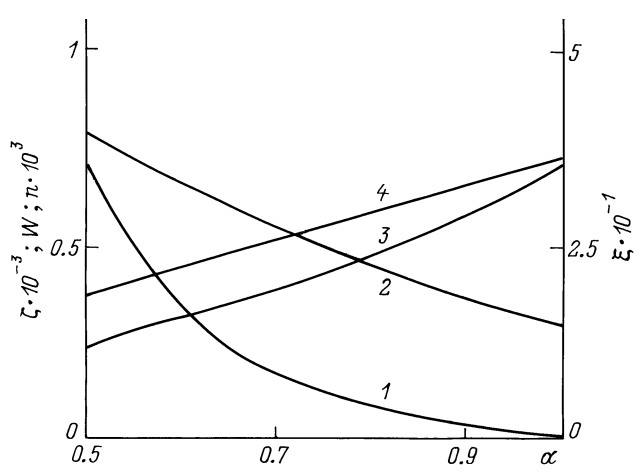


Рис. 4.

распаду сильно заряженных капель, так как именно при таком значении отмечается наилучшее согласие данных эксперимента и теории [9]. Величины эксцентриситетов дочерних пузырей во всех случаях весьма малы, т.е. форма дочерних пузырей мало отличается от сферической.

На рис. 3 и 4, для того чтобы проиллюстрировать возможные тенденции изменения параметров диспергирования, приведены зависимости от неопределенного параметра α , количества эмиттируемых пузырей n (кривая 1), относительной потери заряда материнским пузырем $\xi = \Delta Q/Q$ (кривая 2), относительной потери его массы $\zeta = \Delta M/M$ (кривая 3) и параметра Рэлея W для остатка материнского пузыря (кривая 4) при $W = 1$, $e_1^2 = 0.7$, $\eta = 1.1$, $\beta = 0.5$, $m = 1$ (рис. 3) и $m \gg 1$ (рис. 4).

В ряде ситуаций может реализоваться случай, когда заряд материнского пузыря в несколько раз превосходит критический для реализации неустойчивости. Для этого случая рассчитаны безразмерные радиусы X (кривая 1),

заряды Y (кривая 2), удельные заряды Z (кривая 3) для дочерних пузырей и величина параметра Рэлея W для материнского (кривая 4) в зависимости от номера распада n при значении физических параметров $W = 10$, $e_1^2 = 0.7$, $\alpha = 0.9$, $\eta = 1.1$, $\beta = 0.5$, $m = 1$ (рис. 5) и $m \gg 1$ (рис. 6). Видно, что увеличение исходного значения параметра W приводит к увеличению количества дочерних пузырей и к уменьшению их характерных линейных размеров и зарядов.

3. То обстоятельство, что в (1) два последних слагаемых описывают изменение размера дочернего пузыря вследствие выравнивания давлений на его поверхности, заставляет сформулировать вопрос о том, насколько существенно такое изменение размера дочернего пузыря. Если в (1) опустить эти два слагаемых и провести расчеты, аналогичные вышеприведенным, то можно найти безразмерные радиус и заряд дочернего пузыря, непосредственно перед изменением его объема вследствие выравнивания давлений. Условие равенства давлений для сферического пузыря в размерной форме легко выписы-

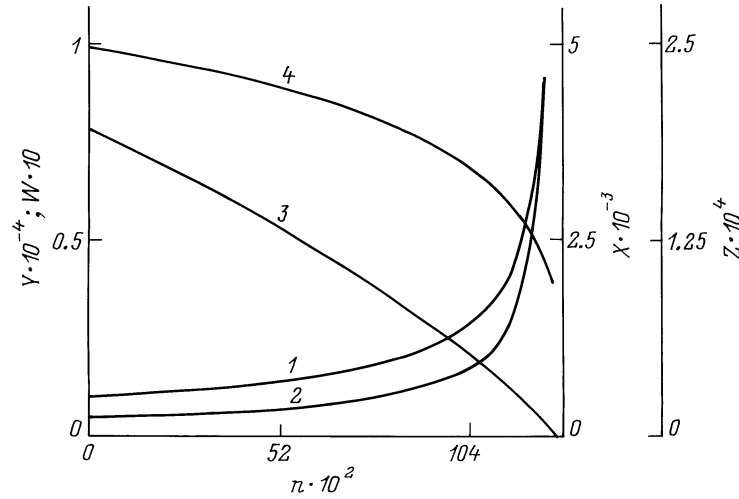


Рис. 5.

вается

$$\frac{q^2}{8\pi r^4} + (P_2^g + P^v) - \frac{2\sigma}{r} = 0. \quad (5)$$

В безразмерной форме его можно переписать в виде

$$\frac{WY^2}{X^4} + \eta\beta - \frac{1}{X} = 0. \quad (6)$$

В этих соотношениях первое слагаемое — электрическое давление, второе — суммарное давление газа и пара, третье — лапласовское давление. Проводя численные расчеты по уравнениям (2)–(4) без учета последнего слагаемого в (4), которое описывает вклад в изменение энергии от изменения объема, можно найти безразмерные радиусы и заряды дочерних пузырей. Найденные заряды подставлялись в уравнение (6), из которого находились безразмерные радиусы дочерних пузырей после установления баланса давлений. Зависимости от порядкового номера дочернего пузыря n его безразмерного радиуса X до расширения (кривая 1) и

изменения радиуса для двух различных значений отношения давления в дочернем пузыре к давлению в материнском: ΔX_2 для $\eta = 0.11$ (кривая 2) и ΔX_3 для $\eta = 1.1$ (кривая 3) приведены на рис. 7 при $e_1^2 = 0.7$, $\alpha = 0.9$, $W = 1$, $\beta = 0.5$, $m = 1$. Несложно видеть, что пузырь всегда расширяется и изменение его радиуса зависит от номера распада и отношения давления в дочернем пузыре к давлению в материнском. Но величина изменения радиуса на два порядка меньше самого радиуса.

4. В заключение отметим следующее. Рассчитаны параметры распада (размеры, заряды и количество дочерних пузырей) сильно заряженного родительского пузыря в диэлектрической жидкости. По сравнению с ситуацией распада сильно заряженной капли количество эмиттированных дочерних пузырей меньше примерно на порядок. Интегральные же характеристики распада (полная потеря заряда и массы родительского пузыря) примерно такие же, как и для капли.

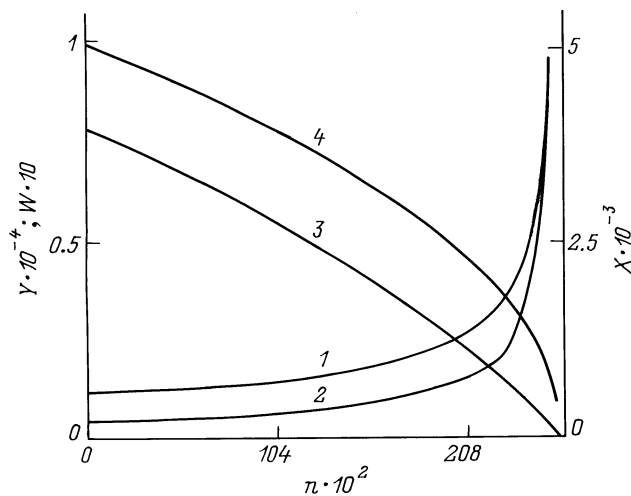


Рис. 6.

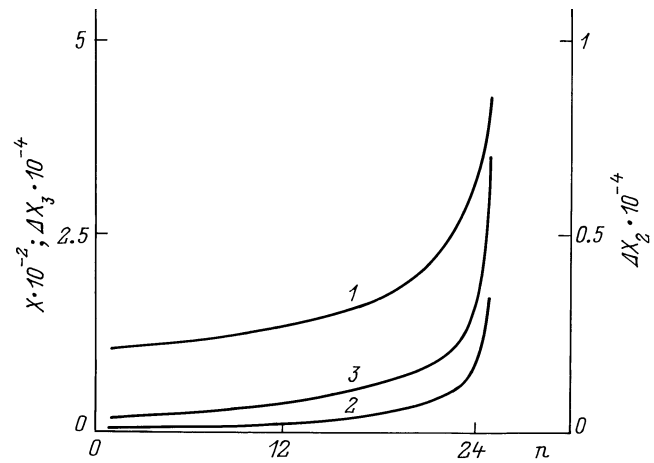


Рис. 7.

Список литературы

- [1] *Garton C.G., Krasucki Z.* // Trans. Jaraday Soc. 1964. Vol. 60. P. 211–226.
- [2] *Ogus H.N., Prosperetti A.* // J. Fluid. Mech. 1990. Vol. 219. P. 143–179.
- [3] *MacIntyre F.* // J. Geoph. Res. 1972. Vol. 77. N 27. P. 5211–5228.
- [4] *Khaleeq-Ur-Rahman M., Saunders C.P.R.* // Atom. Res. 1991. Vol. 26. P. 329–338.
- [5] *Cheng K.J., Chaddock J.B.* // Phys. Lett. 1984. Vol. 106A. N 1,2. P. 51–53.
- [6] *Глазков В.В., Синкевич О.А., Смирнов П.В.* // ТВТ. 1991. Т. 29. № 6. С. 1095.
- [7] *Пылаева И.В., Синкевич О.А., Смирнов П.В.* // ТВТ. 1992. Т. 30. № 2. С. 367.
- [8] *Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O.* // J. Phys. D. 1990. Vol. 23. N 11. P. 1361–1370.
- [9] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19.
- [10] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27.
- [11] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [12] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 2. С. 11–21.