01;04;09

Генерирование электромагнитных волн вращающейся плазмой

© В.В. Долгополов, М.В. Долгополов, Ю.В. Кириченко

Национальный научный центр, Харьковский физико-технический институт,
310108 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 8 января 1997 г.)

Теоретически исследовано генерирование электромагнитных волн кольцевым слоем плазмы, вращающимся в скрещенных радиальном электростатическом и аксиальном магнитном полях в цилиндрическом резонаторе. Получены дисперсионные уравнения, описывающие взаимодействие волн с плазмой. Показано, что генерирование волн узким слоем плазмы возможно за счет циклотронного, черенковского либо плазменного резонансов. Здесь речь идет о черенковском резонансе, когда скорости компонент плазмы и фазовые скорости волн перпендикулярны постоянному магнитному полю. Найдены частоты и инкременты волн в условиях упомянутых резонансов в однородном и неоднородном слое плазмы. Отмечены преимущества и недостатки генерирования волн в различных условиях.

Введение

В ряде теоретических работ (см. [1–4] и цитируемую там литературу) исследовались неустойчивости, возникающие во вращающейся плазме, т.е. в плазме, находящейся в постоянном электростатическом и аксиальном магнитном полях. Источником неустойчивостей, изученных в этих работах, являлось относительное движение по азимуту различных компонент плазмы, а также радиальные колебания ионов в сильном радиальном электростатическом поле. Вне рассмотрения осталось взаимодействие вращающейся плазмы (ее компонент) с собственными колебаниями нагруженного этой плазмой резонатора (металлического цилиндра, в котором находится плазма). Исследование этого взаимодействия представляет как теоретический, так и практический интерес, поскольку оно может быть использовано для генерирования электромагнитных волн. Оказывается, что неустойчивость может возникать и тогда, когда относительное движение по азимуту разных компонент плазмы отсутствует, например, в однокомпонентной плазме. В экспериментальной работе [5] описан генератор, работа которого основана на взаимодействии собственных колебаний цилиндрического резонатора с вращающимся кольцевым слоем электронов, удерживаемым радиальным электростатическим полем. Использование вращающейся плазмы вместо вращающегося слоя электронов может существенно увеличить мощность генератора.

В настоящей работе исследуется генерирование электромагнитных волн (собственных колебаний цилиндрического резонатора) кольцевым слоем вращающейся плазмы.

Основные уравнения

В качестве резонатора рассмотрим неограниченную вдоль z (используется цилиндрическая система координат r, φ, z) полость ($a \leqslant r \leqslant b$), ограниченную на поверхностях $r = a$, $r = b$ металлом. Разность потенциалов между центральным стержнем ($r < a$) и кожухом ($r > b$) определяет постоянное радиальное электростатическое поле $E_0(r)$ ($\partial E_0/\partial\varphi = 0$, $\partial E_0/\partial z = 0$). Постоянное аксиальное магнитное поле B может быть создано азимутальными токами, протекающими в катушках, окружающих резонатор.

Невозмущенная электромагнитным полем плотность заряженных частиц (компонент плазмы) n_α зависит только от одной пространственной координаты r

$$n_\alpha(r) \neq 0 \quad \text{при} \quad r_- < r < r_+,$$

$$n_\alpha(r) = 0 \quad \text{при} \quad r \leqslant r_- \quad \text{и} \quad r \geqslant r_+,$$

$$a < r_- < r_+ < b, \quad \delta r = r_+ - r_- \ll r_-. \tag{1}$$

Полагая, что поля и возмущения плотности и скорости заряженных частиц не зависят от аксиальной координаты z, а зависимость этих величин от азимутальной координаты φ и времени t определяется множителем $\exp\{i(m\varphi - \omega t)\}$, из линеаризованных уравнений движения заряженных частиц получим

$$\mathcal{V}^{(1)}_{\alpha r} = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha w_\alpha}\left\{-i\bar{\omega}_{m\alpha}\left(E_r + \frac{\mathcal{V}_\alpha}{c}H_z\right) + \left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r}\right)E_\varphi\right\}, \tag{2}$$

$$\mathcal{V}^{(1)}_{\alpha\varphi} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha w_\alpha}\left\{\left(\omega_{c\alpha} + \frac{\partial\mathcal{V}_\alpha}{\partial r} + \frac{\mathcal{V}_\alpha}{r}\right) \times \left(E_r + \frac{\mathcal{V}_\alpha}{c}H_z\right) + i\bar{\omega}_{m\alpha}E_\varphi\right\}, \tag{3}$$

где

$$\mathcal{V}_\alpha = -\frac{\omega_{c\alpha} r}{2}\left\{1 - \left(1 - \frac{4e_\alpha E_0}{m_\alpha \omega_{c\alpha}^2 r}\right)^{1/2}\right\},$$

$$\bar{\omega}_{m\alpha} = \omega_\alpha - \frac{m\mathcal{V}_\alpha}{r}, \quad \omega_\alpha = \omega + i\nu_\alpha, \quad \mathrm{Re}(\omega) > 0,$$

$$w_\alpha = \bar{\omega}^2_{m\alpha} - \left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r}\right)\left(\omega_{c\alpha} + \frac{\partial\mathcal{V}_\alpha}{\partial r} + \frac{\mathcal{V}_\alpha}{r}\right), \tag{4}$$

$\omega_{c\alpha} = Be_\alpha/m_\alpha c$ — гирочастота частиц сорта α; e_α и m_α — заряд и масса частиц сорта α; ν_α — эффективная частота столкновений частиц сорта α с частицами других сортов; c — скорость света; E_r, E_φ и H_z — составляющие электрического и магнитного полей волны; $\mathcal{V}^{(1)}_{\alpha r}$ и $\mathcal{V}^{(1)}_{\alpha\varphi}$ — составляющие возмущения скорости частиц сорта α полем волны; m — отличное от нуля целое число; $\mathcal{V}_\alpha$ — не возмущенная полем волны скорость вращения частиц сорта α.

Из линеаризованных уравнений непрерывности вытекают следующие выражения для возмущений плотности частиц сорта α n_α:

$$n^{(1)}_\alpha = \frac{1}{r\omega_{m\alpha}}\left\{mn_\alpha\mathcal{V}^{(1)}_{\alpha\varphi} - i\frac{\partial}{\partial r}\left(rn_\alpha\mathcal{V}^{(1)}_{\alpha r}\right)\right\}, \tag{5}$$

где $\omega_{m\alpha} = \omega - m\mathcal{V}_\alpha/r$.

Подставляя (2), (3), (5) в выражения для возмущений плотности заряда $\rho = \sum\limits_\alpha e_\alpha n^{(1)}_\alpha$ и плотности радиального тока $j_r = \sum\limits_\alpha e_\alpha n_\alpha \mathcal{V}^{(1)}_\alpha r$, из уравнений Максвелла получим уравнение для азимутальной составляющей электрического поля волны E_φ в области $r_- < r < r_+$

$$\frac{d}{dr}\left\{\varepsilon r\frac{d}{dr}(rE_\varphi) + mr\sum_\alpha\frac{\Omega^2_\alpha}{w_\alpha\omega_{m\alpha}}\left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r}\right)E_\varphi\right\}$$
$$= m\sum_\alpha\frac{\Omega^2_\alpha}{w_\alpha\omega_{m\alpha}}\left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\bar{\mathcal{V}}_\alpha}{r}\right)\frac{d}{dr}(rE_\varphi)$$
$$+ m^2\left\{\varepsilon - \sum_\alpha\frac{\Omega^2_\alpha}{w_\alpha\omega^2_{m\alpha}}\left(\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r} - \frac{\partial\mathcal{V}_\alpha}{\partial r}\right)\right.$$
$$\left.\times\left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r}\right)\right\}E_\varphi, \tag{6}$$

$$\varepsilon = 1 - \sum_\alpha\frac{\Omega^2_\alpha}{w_\alpha}\frac{\bar{\omega}_{m\alpha}}{\omega_{m\alpha}}, \tag{7}$$

$$2\bar{\mathcal{V}}_\alpha = \left(1 + \frac{\bar{\omega}_{m\alpha}}{\omega_{m\alpha}}\right)\mathcal{V}_\alpha + \left(1 - \frac{\bar{\omega}_{m\alpha}}{\omega_{m\alpha}}\right)r\frac{\partial\mathcal{V}_\alpha}{\partial r}, \tag{8}$$

$\Omega_\alpha = \{4\pi e^2_\alpha n_\alpha(r)/m_\alpha\}^{1/2}$ — ленгмюровская частота частиц сорта α.

В областях вакуума $a \leqslant r \leqslant r_-$ и $r_+ \leqslant r \leqslant b$ составляющие электромагнитного поля удовлетворяют уравнениям

$$E_r = -\frac{mc}{\omega r}H_z, \qquad E_\varphi = -i\frac{c}{\omega}\frac{\partial H_z}{\partial r},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_z}{\partial r}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2}{r^2}\right)H_z = 0. \tag{9}$$

Дисперсионное уравнение

Решения последнего уравнения (9) удобно записать в виде

$$H_z = A_-J(kr) + B_-N(kr) \quad \text{при} \quad a \leqslant r \leqslant r_-, \tag{10}$$

$$H_z = A_+J(kr) + B_+N(kr) \quad \text{при} \quad r_+ \leqslant r \leqslant b, \tag{11}$$

где $k = \omega/c$, $J(x) = J_{|m|}(x)$ и $N(x) = N_{|m|}(x)$ — функции Бесселя и Неймана; $A_\mp$ и $B_\mp$ — постоянные интегрирования.

Найти решения уравнения (6) аналитически в общем случае не представляется возможным. Однако в рассматриваемом нами случае узкого слоя плазмы уравнение (6) можно решить приближенно, пользуясь малостью параметра $\delta r/r_-$. Пренебрегая слагаемыми выше первого порядка малости по этому параметру, из уравнения (6) получим (подобный метод использовался в работах [6–8])

$$r_+E_\varphi(r=r_+) - r_-E_\varphi(r=r_-) = \int\limits_{r_-}^{r_+}\frac{dr}{r\varepsilon}\left\{\left(r\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi)\right)\Big|_{r=r_-}\right.$$
$$\left. - mr\sum_\alpha\frac{\Omega^2_\alpha}{w_\alpha\omega_{m\alpha}}\left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r}\right)E_\varphi\right\}, \tag{12}$$

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi)\right)\Big|_{r_+} - \left(r\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi)\right)\Big|_{r_-} = m\int\limits_{r_-}^{r_+}dr$$
$$\times\left\{\sum_\alpha\frac{\Omega^2_\alpha}{w_\alpha\omega_{m\alpha}}\left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\bar{\mathcal{V}}_\alpha}{r}\right)\frac{1}{\varepsilon r}\left[\left(r\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi)\right)\Big|_{r_-}\right.\right.$$
$$\left. - mr\sum_\beta\frac{\Omega^2_\beta}{w_\beta\omega_{m\beta}}\left(\omega_{c\beta} + 2\frac{\mathcal{V}_\beta}{r}\right)E_\varphi\right] + m\left[\varepsilon - \sum_\alpha\frac{\Omega^2_\alpha}{w_\alpha\omega^2_{m\alpha}}\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r} - \frac{\partial\mathcal{V}_\alpha}{dr}\right)\left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r}\right)\right]E_\varphi\right\}. \tag{13}$$

С помощью (9) граничные условия (12), (13) приводятся к виду

$$H_z(r=r_+) - H_z(r=r_-) = \lambda\frac{\partial H_z}{\partial r}\Big|_{r_-} + \bar{\beta}H_z(r=r_-), \tag{14}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial r}\Big|_{r_+} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\Big|_{r_-} = \bar{\alpha}\frac{\partial H_z}{\partial r}\Big|_{r_-} + \varkappa H_z(r=r_-), \tag{15}$$

где

$$\bar{\alpha} = -\frac{\delta r}{r_-} - \frac{m}{r_-}\int\limits_{r_-}^{r_+}\frac{dr}{\varepsilon}\sum_\alpha\frac{\Omega^2_\alpha}{w_\alpha\omega_{m\alpha}}\left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r}\right), \tag{16}$$

$$\bar{\beta} = m\int\limits_{r_-}^{r_+}\frac{dr}{r\varepsilon}\sum_\alpha\frac{\Omega^2_\alpha}{w_\alpha\omega_{m\alpha}}\left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\bar{\mathcal{V}}_\alpha}{r}\right), \tag{17}$$

$$\lambda = \int\limits_{r_-}^{r_+} dr \Bigg\{ \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\alpha,\beta} \frac{\Omega_\alpha^2 \Omega_\beta^2}{w_\alpha w_\beta \omega_{m\alpha} \omega_{m\beta}} \times \left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\bar{\mathcal{V}}_\alpha}{r} \right) \left(\omega_{c\beta} + 2\frac{\mathcal{V}_\beta}{r} \right) - \sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2}{w_\alpha \omega_{m\alpha}^2} \left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r} \right) \left(\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r} - \frac{\partial \mathcal{V}_\alpha}{\partial r} \right) \Bigg\}, \quad (18)$$

$$\varkappa = \frac{m^2}{r_-} \int\limits_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r\varepsilon}, \qquad |\omega| \ll \frac{|m|c}{r_-}. \quad (19)$$

Подставляя выражения (8), (9) в граничные условия (14), (15) и учитывая, что на границе с металлом ($r = a$, $r = b$) составляющая электрического поля E_φ равна нулю, можно исключить постоянные интегрирования $A_\mp$, $B_\mp$ и получить дисперсионное уравнение

$$N'(x_2)J'(x_1) - N'(x_1)J'(x_2) + \frac{\pi}{2} x N'(x_2) J'(x_1) \times \Big\{ k\delta r \Big(2N'(x)J'(x) - J(x)N''(x) - N(x)J''(x) \Big) + (\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \Big(J(x)N'(x) + N(x)J'(x) \Big) - 2k\lambda N'(x)J'(x) + 2\frac{\varkappa}{k} N(x)J(x) \Big\}$$
$$+ \frac{\pi}{2} x J'(x_1)J'(x_2) \Big\{ k\delta r \Big(N(x)N''(x) - N'^2(x) \Big) - (\bar{\alpha} - \bar{\beta}) N(x)N'(x) + k\lambda N'^2(x) - \frac{\varkappa}{k} N^2(x) \Big\}$$
$$+ \frac{\pi}{2} x N'(x_1)N'(x_2) \Big\{ k\delta r \Big(J(x)J''(x) - J'^2(x) \Big) - (\bar{\alpha} - \bar{\beta}) J(x)J'(x) + k\lambda J'^2(x) - \frac{\varkappa}{k} J^2(x) \Big\} = 0, \quad (20)$$

где $f'(x) = \partial f/\partial x$, $f''(x) = \partial^2 f/\partial x^2$, $x = kr_-$, $x_1 = ka$, $x = kb$.

Очевидно, что первые два слагаемые в уравнении (20) велики по сравнению с остальными слагаемыми. Проанализировать дисперсионное уравнение (20), не делая никаких предположений относительно аргументов функций Бесселя, сложно. Поэтому мы ограничимся рассмотрением практически важного случая, когда выполняются условия

$$|x| \ll 1, \qquad |x_2| \gg m^2/2. \quad (21)$$

Тогда дисперсионное уравнение приводится к виду

$$\omega^{(1)} + i\nu - \Delta_\nu - \Delta_{\delta r} + \frac{\pi x_1^{|m|+1} \omega^{(0)}}{2^{2|m|+1} |m|! \, (|m|-1)! \, \eta^{3|m|-1} x_2} \times \Big\{ |m| k\lambda x^{|m|-2} \left(\eta^{2|m|} - 1 \right)^2 - \frac{\varkappa x^{|m|}}{|m|k} \left(\eta^{2|m|} + 1 \right)^2 - (\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \, x^{|m|-1} \left(\eta^{4|m|} - 1 \right) \Big\} = 0, \quad (22)$$

$$\Delta_{\delta r} = -\frac{\pi \omega^{(0)} x_1^{2|m|-1} k\delta r}{2^{2|m|+1} (|m|-1)! \, |m|! \, \eta^{2|m|+1} x_2} \times \left(4|m| \, \eta^{2|m|} + 1 - \eta^{4|m|} \right),$$

$\eta = r_-/a > 1$, $\omega^{(1)} = \omega - \omega^{(0)}$, $|\omega^{(1)}| \ll \omega^{(0)}$, $\nu > 0$, $\omega^{(0)}$ — собственная частота резонатора со стержнем в отсутствие слоя плазмы и без учета потерь на излучение из резонатора и на диссипацию электромагнитного поля в стенках резонатора.

При выполнении неравенств (21) она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\pi (\omega^{(0)} a/c)^{2|m|}}{2^{2|m|} |m|! \, (|m|-1)!} + \mathrm{tg} \left(\frac{\omega^{(0)}}{c} b - \chi_m \right) = 0,$$

$$\chi_m = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} |m|, \quad (23)$$

из которого следует

$$\omega^{(0)} \simeq \frac{c}{b} (n\pi + \chi_m), \quad (24)$$

где n — целое число; согласно второму условию (21) $n \gg m^2/2\pi$.

В уравнение (22) мы ввели слагаемые $i\nu$ и $-\Delta_\nu$. Слагаемое $i\nu$ феноменологически учитывает потери на излучение из резонатора и поглощение энергии волн стенками резонатора, а слагаемое $-\Delta_\nu$ учитывает сдвиг частоты, связанный с этими потерями. Вклад слоя плазмы в дисперсионное уравнение учитывается коэффициентами $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, λ, $\varkappa$. Эти коэффициенты резко возрастают, когда знаменатели выражений (16)–(19) близки к нулю. Тогда плазма наиболее эффективно взаимодействует с электромагнитным полем. Нули знаменателей выражений (16)–(19) определяются соотношениями

$$w_\alpha = 0, \qquad \omega_{m\alpha} = 0, \qquad \varepsilon = 0. \quad (25)$$

Первое уравнение (25) соответствует циклотронному резонансу во вращающейся плазме [9] для частиц сорта α, второе — черенковскому резонансу для частиц сорта α. В этом случае угловая скорость вращения частиц сорта α совпадает с угловой фазовой скоростью волны. Наконец, третье уравнение (25) является условием плазменного резонанса, при котором частота волны равна частоте локальных собственных колебаний плазмы в лабораторной системе отсчета.

Циклотронный резонанс

При рассмотрении циклотронного резонанса мы будем предполагать выполненным условие

$$\left| \sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2 \bar{\omega}_{m\alpha}}{w_\alpha \omega_{m\alpha}} \right| \ll 1, \qquad \varepsilon \simeq 1, \quad (26)$$

так как только в этом случае циклотронный резонанс приводит к усилению взаимодействия волн с частицами.

Условие (26) означает, что плазма не должна быть плотной, а частота столкновений ν_α должна быть достаточно большой. Учитывая соотношение

$$w_\alpha \simeq 0, \tag{27}$$

из дисперсионного уравнения (22) получим

$$\mathrm{Im}(\omega) = -\nu - \frac{\pi c x_1^{2|m|}}{2^{2|m|}\big((|m|-1)!\big)^2 \eta^{2|m|} b r_-} \times \int\limits_{r_-}^{r_+} dr \left[\frac{\omega_{m\alpha} \pm \omega_{c\alpha} \pm 2\mathcal{V}_\alpha/r}{\omega_{m\alpha}} + \eta^{2|m|} \frac{\omega_{m\alpha} \mp \omega_{c\alpha} \mp 2\mathcal{V}_\alpha/r}{\omega_{m\alpha}} \right]^2 \times \frac{\Omega_\alpha^2 \omega_{m\alpha} \nu_\alpha}{(\mathrm{Re}\, w_\alpha)^2 + 4\omega_{m\alpha}^2 \nu_\alpha^2}. \tag{28}$$

Верхний знак в квадратных скобках выражения (28) соответствует положительным значениям m, нижний — отрицательным. Из соотношения (28) следует, что неустойчивость имеет место ($\mathrm{Im}\,\omega > 0$), когда $\omega_{m\alpha} < 0$, а ν не слишком велико. Следовательно, для генерирования электромагнитных волн в условиях гирорезонанса необходимо, чтобы угловая скорость заряженных частиц превосходила угловую фазовую скорость волны. Если условие (27) выполняется в узкой области слоя плазмы, выражение (28) для инкремента (декремента) волны приводится к виду

$$\mathrm{Im}(\omega) = -\nu - \frac{\pi^2 c x_1^{2|m|} \mathrm{sign}\,(\omega_{m\alpha})}{2^{2|m|+1}\big((|m|-1)!\big)^2 \eta^{2|m|} b r_-} \times \left[\frac{\Omega_\alpha^2}{\omega_{m\alpha}^2 |\partial(\mathrm{Re}\, w_\alpha)/\partial r|} \right]\Bigg|_{r=r_{c\alpha}} \left[\omega_{m\alpha} \pm \omega_{c\alpha} \pm 2\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r} + \eta^{2|m|} \left(\omega_{m\alpha} \mp \omega_{c\alpha} \mp 2\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r} \right) \right]^2 \Bigg|_{r=r_{c\alpha}}, \tag{29}$$

где точка $r = r_{c\alpha}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{Re}\big(w_\alpha(r = r_{c\alpha})\big) = 0. \tag{30}$$

Инкремент, определяемый соотношением (29), не зависит от частоты столкновений ν_α.

Черенковский резонанс

В условиях черенковского и плазменного резонансов диссипативные эффекты в плазме, в частности столкновения заряженных частиц, не оказывают столь существенного влияния на взаимодействие волн с плазмой, как в случае циклотронного резонанса. Поэтому в дальнейшем мы положим

$$\nu_\alpha = 0, \quad \omega_\alpha = \omega, \quad \bar{\omega}_{m\alpha} = \omega_{m\alpha}, \quad \bar{\mathcal{V}}_\alpha = \mathcal{V}_\alpha. \tag{31}$$

Когда угловая фазовая скорость волны близка к угловой скорости частиц сорта α ($\omega_{m\alpha} \simeq 0$), дисперсионное уравнение (22) может быть записано в виде

$$\omega_{m\alpha}^3 + (i\nu - \Delta)\omega_{m\alpha}^2 - \Delta_2^2 \omega_{m\alpha} - \Delta_3^3 = 0, \tag{32}$$

где

$$\Delta \simeq \Delta_\nu + \omega^{(0)} - \frac{m\mathcal{V}_\alpha}{r_-}, \tag{33}$$

$$\Delta_2^2 = -\frac{m}{|m|} \frac{\pi x_1^{2|m|} \left(\eta^{4|m|} - 1\right) c}{2^{2|m|}\big((|m|-1)!\big)^2 \eta^{2|m|} b r_-} \times \int\limits_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\varepsilon} \frac{\Omega_\alpha^2}{w_\alpha} \left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r} \right), \tag{34}$$

$$\Delta_3^3 = \frac{\pi x_1^{2|m|-1} \left(\eta^{2|m|} - 1\right)^2 \omega^{(0)}}{2^{2|m|+1}\big((|m|-1)!\big)^2 \eta^{2|m|+1} b} \times \int\limits_{r_-}^{r_+} dr \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\Omega_\alpha^2}{w_\alpha} \left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r} \right) \right]^2 + \frac{\Omega_\alpha^2}{w_\alpha} \left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r} \right) \left(\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r} - \frac{\partial \mathcal{V}_\alpha}{\partial r} \right) \right\}. \tag{35}$$

В последних соотношениях и в дальнейшем учитывается, что величины r, $\mathcal{V}_\alpha(r)$ и $\partial\mathcal{V}_\alpha/\partial r$ мало изменяются в слое плазмы ($r_- < r < r_+$).

Уравнение (32) является уравнением третьей степени относительно $\omega_{m\alpha}$. Мнимая часть $\omega_{m\alpha}$ совпадает с мнимой частью ω и, следовательно, представляет собой инкремент (декремент) волны.

Если $|i\nu - \Delta| \ll |\Delta_3|$, нарастающие во времени колебания возникают при выполнении условия

$$\left|\Delta_3^3/\Delta_2^3\right| > 2/3^{3/2}. \tag{36}$$

При $\Delta_3^3 \neq 0$ легко выполняется более жесткое условие, чем (36),

$$\left|\Delta_3^3\right| \gg \left|\Delta_2^3\right|. \tag{37}$$

Тогда дисперсионное уравнение принимает вид

$$\omega_{m\alpha}^3 \simeq \Delta_3^3. \tag{38}$$

Один из трех корней уравнения (38) всегда соответствует нарастающим во времени колебаниям. Инкремент в этом случае максимален (пропорционален кубическому корню из малого параметра $\delta r/b$).

При больших потерях либо расстройке резонанса, когда выполняются условия

$$\left|\Delta_2^2\right| \ll \left|\Delta_3^{3/2}(i\nu - \Delta)^{1/2}\right|, \quad |\Delta_3| \ll |i\nu - \Delta|, \tag{39}$$

решение уравнения (32) имеет вид

$$\omega_{m\alpha} \simeq \pm \left(\frac{\Delta_3^3}{i\nu - \Delta} \right)^{1/2}. \tag{40}$$

Одним из корней (40) соответствует нарастающим во времени колебаниям.

Из изложенного выше следует, что черенковский резонанс, т. е. эффективный обмен энергией между волной и компонентом плазмы в условиях, когда скорость этого компонента близка к фазовой скорости волны, возможен и тогда, когда скорости заряженных частиц и фазовая скорость волны направлены поперек постоянного магнитного поля.

Плазменный резонанс в однородном слое

Согласно (25), плазменный резонанс имеет место в области, где выполняется условие

$$\varepsilon(\omega, r) = 0. \tag{41}$$

Если плотность плазмы резко возрастает от нуля до максимального значения вблизи $r = r_-$, остается практически постоянной ($\partial\Omega_\alpha/\partial r \simeq 0$) в области $r_- < r < r_+$, а затем резко падает до нуля вблизи $r = r_+$, то условие плазменного резонанса (41) приближенно может выполняться по всей толщине узкого слоя плазмы. Тогда дисперсионное уравнение (22) приводится к квадратному уравнению относительно $\delta\omega = \omega - \omega_p$, где ω_p — корень уравнения (41). Решение этого квадратного уравнения имеет вид

$$\delta\omega = \frac{1}{2}\Big\{\Delta_p - i\nu \pm \big((\Delta_p - i\nu)^2 - 4q\big)^{1/2}\Big\}, \tag{42}$$

где

$$\Delta_p \simeq \Delta_\nu + \omega^{(0)} - \omega_p,$$

$$q = -\frac{\pi x_1^{2|m|} c\,\delta r}{2^{2|m|+1}\big((|m|-1)!\big)^{2|m|} b r_- \tau}\Bigg[\eta^{2|m|} + 1 - \frac{m}{|m|}\left(\eta^{2|m|} - 1\right)\sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2}{w_\alpha \omega_{m\alpha}}\left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r_-}\right)\Bigg]^2, \tag{43}$$

$$\tau = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}\bigg|_{\omega=\omega_p} = 2\sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2}{w_\alpha^2}\,\omega_{m\alpha}. \tag{44}$$

Мнимая часть $\delta\omega$ является инкрементом (декрементом) волны. Как следует из выражения (42), неустойчивость имеет место, когда $q > 0$, и, следовательно, согласно выражению (43), $\tau < 0$. В обычных условиях скорости вращения различных компонент плазмы различаются на величину, значительно меньшую самих скоростей. Поэтому в рассматриваемом случае, когда условия черенковского резонанса не выполняются ($\omega_{m\alpha} \neq 0$), величины $\omega_{m\alpha}$ имеют одинаковый знак для всех сортов частиц. Учитывая это и принимая во внимание выражение (44), приходим к заключению, что в условиях плазменного резонанса нарастать во времени могут колебания, угловая фазовая скорость которых меньше угловой скорости вращения плазмы.

При большой расстройке Δ_p либо больших потерях на излучение из резонатора или на диссипацию энергии в стенках инкремент волны, согласно (42), определяется выражением

$$\mathrm{Im}(\omega) \simeq \frac{q\nu}{\Delta_p^2 + \nu^2}, \tag{45}$$

из которого следует, что увеличение расстройки либо потерь приводит к уменьшению инкремента. Однако при $\Delta_p^2 > 4q$ именно потери ($\nu \neq 0$) обусловливают генерирование волн.

Плазменный резонанс в неоднородном слое

Очевидно, что в эксперименте очень трудно добиться того, чтобы плотность плазмы в слое слабо зависела от r ($\partial(\Omega_\alpha^2)/\partial r \simeq 0$). Поэтому целесообразно исследовать возмоность генерирования электромагнитных волн в условиях плазменного резонанса в неоднородной плазме.

Пусть плотность плазмы плавно возрастает от нуля в точке $r = r_-$ до некоторого максимального значения, а затем плавно спадает до нуля в точке $r = r_+$. Плазменный резонанс будет иметь место в окрестностях точек $r = r_1$ и $r = r_2$ ($r_- < r_1 < r_2 < r_+$), удовлетворяющих уравнению (41) $\omega_p(r_1) = \omega_p(r_2) \simeq \omega$. Необходимо отметить, что в случае плазменного резонанса в неоднородном слое плазмы используемый нами метод, в котором предполагается, что зависимость всех возмущений и полей от времени вблизи точек $r = r_1$ и $r = r_2$ определяется множителем $\exp(-i\omega t)$, где $\partial\omega/\partial r = 0$, неприменим и следует прибегнуть к преобразованию Лапласа по времени t [8]. Однако можно получить правильный результат и используемым нами методом, если при вычислении интегралов в правых частях выражений (16)–(19) нули знаменателя обходить так, как если бы мнимая часть частоты ω была положительна. Тогда дисперсионное уравнение (22) приводится к уравнению первой степени относительно $\omega^{(1)}$, из которого для инкремента (декремента) $\mathrm{Im}(\omega)$ вытекает следующее выражение:

$$\mathrm{Im}(\omega) = -\nu - \frac{\pi^2 x_1^{2|m|} c h}{2^{2|m|+1}\left((|m|-1)!\right)^2 \eta^{2|m|} b\, r_-} \times \Bigg\{\Bigg[\eta^{2|m|} + 1 - \frac{m}{|m|}\left(\eta^{2|m|} - 1\right) \times \sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2}{w_\alpha \omega_{m\alpha}}\left(\omega_{c\alpha} + 2\frac{\mathcal{V}_\alpha}{r}\right)\Bigg]^2 \times \mathrm{sign}\left(\sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2 \omega_{m\alpha}}{w_\alpha^2}\right)\Bigg\}\Bigg|_{\substack{r=r_1 \\ \text{или } r_2}}, \tag{46}$$

где $h = |\partial\varepsilon/\partial r|^{-1}_{r=r_1} + |\partial\varepsilon/\partial r|^{-1}_{r=r_2}$.

Из соотношения (46) следует, что, как и в случае однородного слоя плазмы, нарастание во времени электромагнитного поля имеет место тогда, когда угловая скорость вращения плазмы больше угловой фазовой скорости волны. Если скорости вращения различных компонент плазмы отличаются существенно, условием неустойчивости, согласно (46), является выполнение неравенства

$$\left\{\sum_{\alpha}\frac{\Omega_\alpha^2\omega_{m\alpha}}{w_\alpha^2}\right\}\bigg|_{r=r_1}\simeq\left\{\sum_{\alpha}\frac{\Omega_\alpha^2\omega_{m\alpha}}{w_\alpha^2}\right\}\bigg|_{r=r_2}<0.$$

Вторым условием нарастания электромагнитного поля является незначительность потерь на излучение из резонатора и диссипацию энергии в стенках резонатора — второе слагаемое в правой части соотношения (46) по модулю должно быть больше первого.

Отметим, что для генерирования волн неоднородным слоем плазмы в условиях плазменного резонанса не требуется выполнение точных резонансных условий, как в случае циклотронного и черенковского резонанса либо плазменного резонанса в однородном слое. Достаточно, чтобы в слое плазмы имелась область, где $\varepsilon(\omega, r) < 0$.

Поскольку в условиях плазменного резонанса в неоднородном слое энергия волны возрастает за счет резонансного взаимодействия не со всей плазмой, а только с той, что находится в окрестностях точек $r = r_1$ и $r = r_2$, то инкременты здесь меньше, чем в случае плазменного резонанса в однородном слое.

Заключение

Из предыдущего следует, что генерирование волн в рассматриваемой системе возможно за счет циклотронного, черенковского либо плазменного резонансов.

Циклотронный резонанс эффективен, когда диссипативные эффекты в плазме существенны, а плотность плазмы невелика. Черенковский резонанс (совпадение скорости вращения компонента плазмы с фазовой скоростью волны) здесь приводит к эффективному взаимодействию волны с плазмой, когда скорость плазмы и фазовая скорость волны перпендикулярны постоянному магнитному полю. В условиях черенковского резонанса инкремент волны может достигать максимального значения, когда, согласно соотношениям (35), (38), он пропорционален кубическому корню из малого параметра $\delta r/b$. В случае плазменного резонанса в однородном слое, согласно выражениям (42), (43), максимальное значение инкремента пропорционально квадратному корню из $\delta r/b$.

В условиях плазменного резонанса в неоднородном слое инкремент, согласно (46), при малых потерях на излучение из резонатора и диссипацию энергии на стенках пропорционален первой степени малого параметра h/b. Однако генерирование волн за счет плазменного резонанса в неоднородном слое обладает рядом преимуществ. Передавая энергию волне, компонент плазмы изменяет свою скорость и радиус. Это приводит к нарушению условий черенковского резонанса и плазменного резонанса в однородном слое. Условия плазменного резонанса в неоднородном слое при этом не нарушается до тех пор, пока в слое найдется область, где $\varepsilon < 0$.

В случаях черенковского резонанса и плазменного резонанса в однородном слое частоты нарастающей и затухающей волн близки. Поэтому слабые нелинейные эффекты могут перевести волну из нарастающей в затухающую. В условиях плазменного резонанса в неоднородном слое дисперсионное уравнение (22) для ω_1 имеет одно решение. Поэтому в этом случае слабые нелинейные эффекты, по-видимому, не могут воспрепятствовать усилению волн. Отметим также, что за счет плазменного резонанса в неоднородном слое одновременно может усиливаться много волн.

Список литературы

[1] *Долгополов В.В., Сизоненко В.Л., Степанов К.Н.* // Укр. физ. журн. 1973. Т. 18. № 1. С. 18–28.

[2] *Демьянов В.Г., Елисеев Ю.Н., Кирочкин Ю.А.* и др. // Физ. плазмы. 1988. Т. 14. Вып. 7. С. 840–850.

[3] *Елисеев Ю.Н., Кирочкин Ю.А., Степанов К.Н.* // Физ. плазмы. 1991. Т. 7.17. Вып. 9. С. 1072–1082.

[4] *Елисеев Ю.Н., Кирочкин Ю.А., Степанов К.Н.* // Физ, плазмы. 1992. Т. 18. Вып. 12. С. 1575–1583.

[5] *Alexeff I., Dyer F.* // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. N 5. P. 351–354.

[6] *Степанов К.Н.* // ЖТФ. 1965. Т. 35. Вып. 6. С. 1002–1014.

[7] *Степанов К.Н.* // ЖТФ. 1965. Т. 35. Вып. 8. С. 1349–1358.

[8] *Долгополов В.В., Омельченко А.Я.* // ЖЭТФ. 1970. Т. 5. Вып. 4. С. 1384–1394.

[9] *Долгополов В.В.* // ЖТФ. 1967. Т. 37. Вып. 1. С. 23–27.