01;02

Стохастическая ионизация релятивистского водородоподобного атома

© Д.У. Матрасулов

Отдел теплофизики АН Узбекистана,
700135 Ташкент, Узбекистан

(Поступило в Редакцию 28 апреля 1997 г. В окончательной редакции 13 марта 1998 г.)

Исследована стохастическая ионизация релятивистского водородоподобного атома, находящегося в монохроматическом поле. С помощью критерия стохастичности Чирикова получена аналитическая формула для критического значения внешнего поля, при котором происходит стохастическая ионизация релятивистского атома.

Введение

Детерминированные классические системы с хаотической динамикой и их квантовая динамика являются предметом интенсивного излучения на протяжении последних десятилетий. Среди таких проблем важное место занимает задача о поведении высоковозбужденного атома в монохроматическом поле. Этой проблеме посвящено большое число работ, как теоретических (см. например, [1–4]), так и экспериментальных [2, 5].

С общефизической точки зрения эта проблема находится на пересечении нескольких различных направлений исследования, так что различные области находят здесь общее применение. Первым и, по-видимому, самым важным из этих тем является хаос. Действительно, даже простейшая теоретическая модель — классический одномерный кеплеровский атом в монохроматическом поле показывает, что появление хаотического движения дает существенный вклад в классический процесс возбуждения. С другой стороны, ридберговский атом является в значительной степени квантовым объектом. Поэтому изучение его хаотической динамики позволяет исследовать возможность существования квантовых хаотических явлений.

К настоящему времени большинство работ по хаотической динамике и перекрытию резонансов ограничивалось рассмотрением нерелятивистских систем. Однако, как показывают результаты недавних работ, хаотическую динамику могут проявлять также и некоторые релятивистские системы [6–9], такие как релятивистские электроны, распространяющиеся в пространственно неоднородном поле электронного лазера, релятивистский электрон в электрическом поле электростатического волнового пакета [6], релятивистский электрон в поле двух неподвижных кулоновских центров [8], релятивистский гармонический осциллятор при наличии биений [9].

В настоящей работе мы обобщаем упомянутые выше результаты по стохастической ионизации нерелятивистского водородоподобного атома на релятивистский случай на примере релятивистского одномерного водородоподобного атома. Как известно [1–3], в случае нерелятивистского атома водорода, взаимодействующего с оциллирующем полем, одномерная модель позволяет достаточно хорошо описать динамику стохастизации движения электрона, а также получить значение порога ионизации, очень близкое экспериментальным, т. е. справедливое также для трехмерного атома водорода. В случае же релятивистского атома применение одномерной модели позволяет избежать трудностей, связанных с незамкнутостью траекторий в релятивистком кеплеровом движении [10] и возникновением дополнительных степеней свободы [11]. Подробное обоснование применения одномерной модели для исследования стохастической ионизации атома водорода можно найти в работе [2].

Применяя критерий Чирикова к релятивистскому гамильтониану, мы получаем в аналитическом виде выражение для критического значения внешнего поля, при котором происходит стохастическая ионизация релятивистского атома. В работе использована система единиц $m_e = h = c = 1$.

Гамильтониан в переменных действие–угол

Рассмотрим релятивистский электрон, движущийся в одномерном кеплеровом поле — $(Z\alpha/x)$ заряда Z $(\alpha = 137^{-1})$. Импульс этого электрона записывается в виде

$$p = \sqrt{\left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{x}\right)^2 - 1},$$

где ε — полная энергия электрона.

Введем действие по стандартному определению

$$n = \int\limits_{x_2}^{x_1} p dx = \pi a \sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

где

$$a = \frac{\varepsilon Z\alpha}{1 - \varepsilon^2},$$

x_1 и x_2 — точки поворота.

Выражая ε через n невозмущенного гамильтониана имеем

$$H_0 = \varepsilon = \frac{n}{\sqrt{n^2 + \pi^2 Z^2 \alpha^2}}. \tag{1}$$

Собственная частота, соотвествующая этому гамильтониану, определяется как

$$\omega_0 = \frac{dH_0}{dn} = \frac{\pi^2 Z^2 \alpha^2}{(n^2 + \pi^2 Z^2 \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (2)$$

Нетрудно убедиться, что в пределе малых Z гамильтониан (1) и частота (2) переходят в известные нерелятивистические выражения для гамиольтониана и частоты соответственно [1, 3].

Рассмотрим теперь взаимодействие нашего атома с монохроматическим полем возмущения, которое имеет вид

$$V(x,t) = \varepsilon x \cos(\omega t), \qquad (3)$$

где ε и ω — соответственно амплитуда и частота поля.

Запишем (3) в переменных действие–угол. Для этого $V(x,t)$ разложим в ряд Фурье

$$V(x,t) = \varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} x_k(n) \cos(k\theta - \omega t), \qquad (4)$$

где фурье-компонента координаты определяется интегралом

$$x_k = \int_0^{2\pi} d\theta e^{ik\theta} x(\theta, n)$$

$$= -\frac{a}{k} J'(\xi k) = -\frac{n\sqrt{n^2 + Z^2}}{k} J'_k(\xi k), \qquad (5)$$

$J'_k(y)$ — производные функций Бесселя по y,

$$\xi = \frac{\sqrt{n^2 + Z^2\alpha^2}}{n}.$$

Таким образом, полный гамильтониан релятивистского водородоподобного атома, взаимодействующего с полем возмущения (3), в переменных действие–угол может быть записан в виде

$$H = \frac{n}{\sqrt{n^2 + \pi^2 Z^2 \alpha^2}} + \varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} x_k(n) \cos(k\theta - \omega t). \qquad (6)$$

Перекрытие резонансов

Для достаточно малых электрических полей в силу теоремы Колмогорова–Арнольда–Мозера большинство траекторий движения электрона в пространстве действие–угол будут слегка искажены под воздействием возмущения. Максимальное искажение орбит происходит при резонансах, т. е там, где фаза $k\theta - \omega t$ стационара [12]. Поэтому резонансные значения частоты и действия связаны соотношением

$$k\omega_0 - \omega = 0. \qquad (7)$$

Используя уравнения (2) и (7), получаем резонансное значение действия, соответствующее k-ой субгармонике,

$$n_k = \left[\left(\frac{\pi^2 k Z^2 \alpha^2}{\omega^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \pi^2 Z^2 \alpha^2\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (8)$$

Как известно, хаотическая динамика систем с гамильтонианом в виде (5) может быть исследована приближенно с помощью критерия Чирикова [12, 13]. Согласно этому критерию, хаотическое движение возникает, когда перекрываются два соседних резонанса, т. е. при выполнении условия

$$\frac{\Delta n_k}{\delta n_k} > 1, \qquad (9)$$

где Δn_k — ширина k-го резонанса, $\delta n_k = n_{k+1} - n_k$ — расстояние между k-м и $k+1$-м резонансами.

Используя (8), для расстояния между резонансами имеем

$$\delta n_k = \left(\frac{kZ^2}{\omega}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3kn_k}.$$

Согласно [6–8, 13], ширина k-го резонанса определяется как

$$\Delta n_k = 4\left(\frac{\varepsilon x_k}{\omega'_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (10)$$

где

$$\omega'_0 = \frac{d\omega_0}{dn} = \frac{3n_k Z^2 \alpha^2}{(n_k^2 + Z^2\alpha^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Заметим, что выражения для Δn_k и δn_k в нерелятивистском пределе переходят в известные выражения для нерелятивистских Δn_k и δn_k соответственно [1–3].

Учитывая выражения для a и используя для производной функции Бесселя асимптотическую формулу [3] $J'_k(ek) \approx 0.411 k^{-\frac{5}{2}}$ (при $k \gg 1$), для ширины резонанса имеем

$$\Delta n_k \approx [\varepsilon k^{-\frac{8}{3}} Z^{-3} (n_k^2 + \pi^2 Z^2 \alpha^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

Подставляя выражения для Δn_k и δn_k в (9), имеем

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{3}} Z^{-\frac{3}{2}} n_k (n_k^2 + \pi^2 Z^2 \alpha^2)^{\frac{1}{2}} > 1.$$

Это неравенство дает нам критическое значение амплитуды поля, при котором происходит стохастическая ионизация релятивистского электрона, движущегося в кулоновском поле заряда $Z\alpha$,

$$\varepsilon_{\rm cr} = k^{\frac{2}{3}} (\pi Z \alpha)^3 n_k^{-2} (n_k^2 + \pi^2 Z^2 \alpha^2)^{-1}.$$

Для малых Z последняя формула может быть разложена в ряд по степеням $Z\alpha/n_k$ следующим образом:

$$\varepsilon_{\rm cr} = k^{\frac{2}{3}} Z^3 n_k^{-4} \left(1 - \frac{Z^2\alpha^2}{n_k^2} + \ldots\right)$$

или

$$\varepsilon_{\rm cr} = \varepsilon_{\rm un} \left(1 - \frac{Z^2\alpha^2}{n_k^2} + \ldots\right),$$

где $\varepsilon_{\rm un}$ — критическое значение поля, соответствующее нерелятивистскому случаю [1].

Как видно из этой формулы, критическое значение поля, необходимое для стохастической ионизации релятивистского водородоподобного атома, меньше, чем в нерелятивистском случае.

Таким образом, мы получили аналитическую формулу для критического поля, необходимого для стохастической ионизации релятивистского водородоподобного атома в виде функции от заряда Z и действия n_k. Поскольку водородоподобный атом является существенно квантовым объектом, то изучение его возбуждения монохроматическим полем позволяет исследовать возможности существования явлений релятивистского квантового хаоса. Более подробный анализ рассмотренной выше проблемы должен быть основан на решении нестационарного уравнения Дирака и классических уравнений движения.

Автор выражает глубокую благодарность В.И. Матвееву за обсуждение и полезные замечания.

Список литературы

[1] *Jensen R.V.* // Phys. Rev. A. 1984. Vol. 30. P. 386–397.
[2] *Jensen R.V., Susskind S.M., Sanders M.M.* // Phys. Rep. 1991. Vol. 201. P. 1–44.
[3] *Casati G., Guarneri I., Shepelyansky D.L.* // IEEE J. Quant. Electronics. 1988. Vol. 24. P. 1420–1443.
[4] *Делоне Н.Б., Крайнов В.П., Шепелянский Д.Л.* // УФН. 1983. Т. 140. С. 355–392.
[5] *Bayfield J.E., Koch P.M.* // Phys. Rev. Lett. 1974. Vol. 33. P. 258–262.
[6] *Chernikov A.A., Tel T., Vattay G., Zaslavsky G.M.* // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 40. P. 4072–4076.
[7] *Luchinsky D.G., McClintock P.V., Neiman A.B.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4240–4241.
[8] *Drake S.P. , Dettmann C.P., Cornish N.J.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 1351–1361.
[9] *Kim, Jung-Hoon and Lee, Hai-Woong.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4242.
[10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Теория поля. М.: Наука, 1988.
[11] *Борн М.* // Лекции по атомной механике. Харьков: ОНТИ, 1934.
[12] *Chirikov B.V.* // Phys. Rep. 1979. Vol. 52. P. 265–320.
[13] *Заславский Г.М., Чириков Б.В.* // УФН. 1971. Т. 105. С. 3–55.