

# Краткие сообщения

01;09;10

## Эффект Вавилова–Черенкова в киральном волноводе

© К.А. Барсуков, А.А. Смирнова

Санкт-Петербургский электротехнический университет,  
197376 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 25 марта 1997 г.)

Рассматривается излучение Вавилова–Черенкова в круглом регулярном идеальном волноводе с киральным заполнением. Исследуются особенности спектра излучения, возбуждаемого движущимся вдоль оси волновода зарядом. Получены выражения для потери энергии движущегося заряда.

В последнее время активно обсуждается электродинамика киральных сред (см., например, [1] и указанную там литературу). Особый интерес здесь отмечается к применению киральных сред в СВЧ диапазоне. Так, в [2–4] исследовались особенности распространения электромагнитных волн в волноводах различных конфигураций. В связи с этим возникает вопрос о различных способах возбуждения киральных волноводов. Одним из эффективных способов возбуждения является использование эффекта Вавилова–Черенкова [5]. Ниже на примере круглого волновода с киральным заполнением исследуются особенности этого способа возбуждения волноводов.

Рассмотрим регулярный волновод с круглым поперечным сечением радиуса  $a$ , ось которого совпадает с осью  $Oz$ , а поперечное сечение расположено в плоскости  $xOy$ . Стенки волновода обладают бесконечной проводимостью и его объем заполнен киральной средой, материальные уравнения которой можно записать в виде [1]

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} - i\chi \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + i\chi \mathbf{E}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon, \mu$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды;  $\chi$  — параметр киральности.

По оси волновода движется с постоянной скоростью  $v$  точечный заряд  $q$ , создающий плотность заряда и тока вида  $\rho = q\delta(z - vt)\delta(x)\delta(y)$ ;  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  или в фурье-представлении по времени

$$\rho_\omega = \frac{q}{2\pi v} \exp\left(-i\frac{\omega}{v}z\right) \delta(x)\delta(y), \quad \mathbf{j}_\omega = \rho_\omega \mathbf{v}. \quad (2)$$

Удобным аппаратом для представления полей оказывается введение потенциалов [3], связанных с источниками поля уравнением

$$\Delta \Psi_{1,2\omega} + k^2 n_{1,2}^2 \Psi_{1,2\omega} = 4\pi \sqrt{\varepsilon/\mu} i \times \left\{ -1/n_{1,2}\omega/v\rho_\omega + k/cn_{1,2}j_{\omega z} \right\}, \quad (3)$$

где  $k = \omega/c$ ,  $n_{1,2} = n \pm \chi$ ,  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ , и индекс 1 относится к верхнему значку, 2 — к нижнему, зависимость же всех величин от  $z$  в виде фактора  $\exp(-i(\omega/v)z)$  здесь и ниже опускается.

Тогда из-за симметрии задачи  $\Psi_{1,2} = \Psi_{1,2}(r)$  и векторы поля через потенциалы выражаются следующими соотношениями [6]:

$$\begin{aligned} E_{\omega r} &= -\frac{i\omega}{2v} \frac{\partial}{\partial r} (\Psi_{1\omega}/\chi_1^2 + \Psi_{2\omega}/\chi_2^2), \\ H_{\omega r} &= \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon/\mu} \frac{\omega}{v} \frac{\partial}{\partial r} (\Psi_{1\omega}/\chi_1^2 - \Psi_{2\omega}/\chi_2^2), \\ E_{\omega\varphi} &= \frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial r} (-n_1 \Psi_{1\omega}/\chi_1^2 + n_2 \Psi_{2\omega}/\chi_2^2), \\ H_{\omega\varphi} &= -\frac{ik}{2} \sqrt{\varepsilon/\mu} \frac{\partial}{\partial r} (n_1 \Psi_{1\omega}/\chi_1^2 + n_2 \Psi_{2\omega}/\chi_2^2), \\ E_{\omega z} &= (\Psi_{1\omega} + \Psi_{2\omega})/2, \\ H_{\omega z} &= i\sqrt{\varepsilon/\mu} (\Psi_{1\omega} + \Psi_{2\omega})/2, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\chi_{1,2} = (\omega/v)\sigma_{1,2}$ ,  $\sigma_{1,2} = \sqrt{\beta^2 n_{1,2}^2 - 1}$ ,  $\beta = v/c$ .

Решение задачи будем искать в виде суммы частного решения неоднородной системы уравнений (3) для безграничной киральной среды и общего решения однородной системы (3), предполагая, что  $\beta n_1 > 1$ ,  $\beta n_2 > 1$ ,

$$\begin{aligned} \Psi_{1,2\omega} &= iq/\pi \sqrt{\mu/\varepsilon} \chi_{1,2}/\omega n_{1,2}^2 K_0(\chi_{1,2}r) \\ &+ \alpha_{1,2} J_0(\chi_{1,2}r). \end{aligned} \quad (5)$$

Первое слагаемое в (5) описывает поле заряда в безграничной киральной среде и находится аналогично тому, как это делается для обычных акиральных сред (см., например, [6]), коэффициент же  $\alpha_{1,2}$  определяется из граничных условий на стенках волновода

$$E_{\omega\varphi} = 0, \quad E_{\omega z} = 0 \quad \text{при } r = a. \quad (6)$$

Соответствующая постановка (5) в (6) позволяет удовлетворить условиям (6) и определить неизвестные коэффициенты  $\alpha_{1,2}$  в виде

$$\alpha_{1,2} = \Delta_{1,2}/\Delta, \quad (7)$$

где

$$\Delta = J_0(\chi_1 a) J_1(\chi_2 a) n_2/\chi_2 + J_0(\chi_2 a) J_1(\chi_1 a) n_1/\chi_1, \quad (8)$$

$$\Delta_1 = -iq/\pi\sqrt{\mu/\varepsilon}1/\omega \left[ \left\{ \varkappa_1^2/n_1 K_0(\varkappa_1 a) + \varkappa_2^2/n_2 K_0(\varkappa_2 a) \right\} J_1(\varkappa_2 a) n_2/\varkappa_2 + \left\{ \varkappa_1 K_1(\varkappa_1 a) - \varkappa_2 K_1(\varkappa_2 a) \right\} J_0(\varkappa_2 a) \right],$$

0mmes

$$\Delta_2 = -iq/\pi\sqrt{\mu/\varepsilon}1/\omega \left[ \left\{ \varkappa_1^2/n_1 K_0(\varkappa_1 a) + \varkappa_2^2/n_2 K_0(\varkappa_2 a) \right\} J_1(\varkappa_2 a) n_1/\varkappa_1 + \left\{ \varkappa_1 K_1(\varkappa_1 a) + \varkappa_2 K_1(\varkappa_2 a) \right\} J_0(\varkappa_1 a) \right]. \quad (9)$$

Излучение Вавилова–Черенкова в киральном волноводе, как и в обычном случае, обладает дискретным спектром, определяемом из условия  $\Delta = 0$  или из (8),

$$\varkappa_1 n_2 J_0(\varkappa_1 a) J_1(\varkappa_2 a) + \varkappa_2 n_1 J_0(\varkappa_2 a) J_1(\varkappa_1 a) = 0. \quad (10)$$

Полное выражение для потенциалов  $\Psi_{1,2}$  находятся с помощью обратного преобразования Фурье

$$\Psi_{1,2}(r, z) = \int_c \Psi_{1,2\omega}(r) \exp(-i\omega/v(z - vt)) d\omega, \quad (11)$$

где контур интегрирования  $c$  выбирается вдоль действительной оси  $\omega$  с обходом простых полюсов, определяемых нулями соотношения (10), и с направлением обхода, диктуемом условием излучения, причем предполагается отсутствие у диэлектрика дисперсии, что обычно хорошо выполняется в радиочастотной области.

Выполняя это интегрирование путем подстановки в (12) (5) и вычисления вычетов, получим

$$\Psi_1(r, z) = \sum_m F_m \left( \frac{J_0(\varkappa_{2m} a)}{J_0(\varkappa_{1m} a)} - 1 \right),$$

$$\Psi_2(r, z) = \sum_m F_m \left( \frac{J_0(\varkappa_{1m} a)}{J_0(\varkappa_{2m} a)} - 1 \right), \quad (12)$$

где

$$F_m = \frac{q}{a^2 \varepsilon \{ J_1(\varkappa_{1m} a) J_1(\varkappa_{2m} a) (\beta^2 n_1 n_2 - 1) / \sigma_1 \sigma_2 - J_0(\varkappa_{1m} a) J_0(\varkappa_{2m} a) \}}$$

и суммирование производится по всем  $m$  — номерам корней уравнения (10), и в (12) для  $\Psi_1$  берется первый индекс, для  $\Psi_2$  — второй.

Выражение (13) вместе с (4) полностью определяет поле движущегося заряда в киральном волноводе. Для случая  $\beta n_1 > 1$ ,  $\beta n_2 < 1$  в формулах (5)–(12) необходимо заменить  $\varkappa_2$  на  $\varkappa'_2 = i\varkappa_2$  и  $\sigma_2$  на  $\sigma'_2 = i\sigma_2$ .

Как видно из (10), в общем случае движущийся в волноводе заряд возбуждает гибридные волны, которые можно разбить на квази-ТЕ-волны с продольной компонентой электрического поля, пропорциональной  $\chi$  при его малых значениях, и квази-ТМ-волны с аналогичной особенностью у продольной компоненты магнитного поля.

При малых  $\chi$  вдали от резонанса для квази-ТМ-поля (10) можно разложить по  $\chi$  в ряд, учитывая близость черенковских частот к акиральному случаю, и с точностью до  $\chi^4$  имеем

$$\omega_m = \omega_{0m} \left( 1 - \frac{\beta^2(\beta^2 n^2 + 1)}{2\sigma^4} \chi^2 \right), \quad (13)$$

где

$$\omega_{0m} = \frac{\nabla \nu_{0m}}{a\sigma}, \quad \sigma = \sqrt{\beta^2 n^2 - 1}, \quad (14)$$

$\nu_{0m}$  —  $m$ -й корень уравнения  $j_0(\nu_{0m}) = 0$ .

Аналогично для второй группы мод (квази-ТМ-моды) соотношение (13) имеет вид

$$\omega'_m = \omega'_{0m} \left( 1 + \frac{\beta^2(\beta^2 n^2 + 3)}{2\sigma^4} \chi^2 \right), \quad (15)$$

где  $\omega'_{0m} = \nabla \mu_{0m}/a\sigma$ ,  $\mu_{0m}$  —  $m$ -й корень уравнения  $J_1(\mu_{0m}) = 0$ .

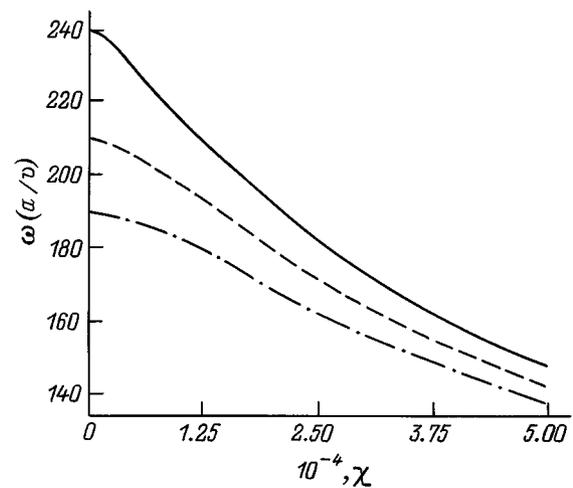


Рис. 1.

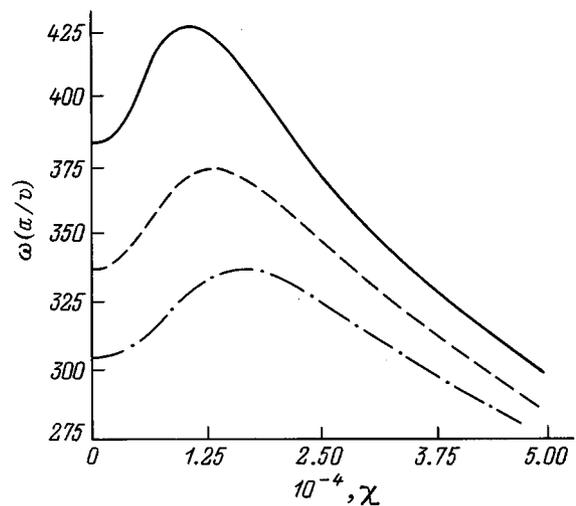


Рис. 2.

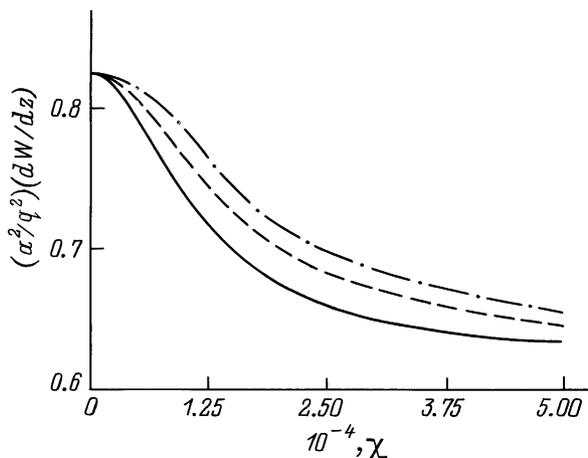


Рис. 3.

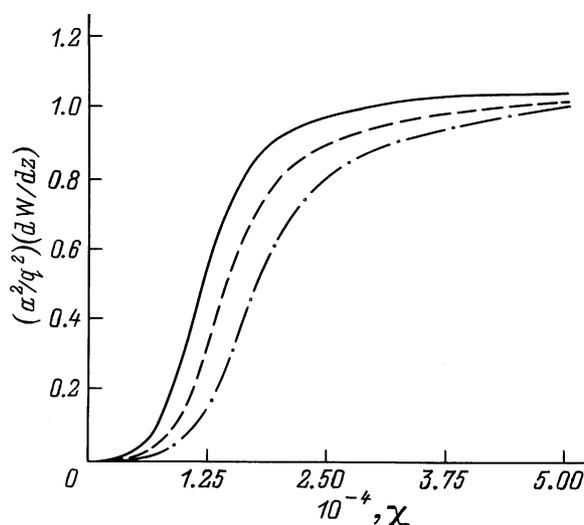


Рис. 4.

Решение уравнения (10) на ЭВМ позволяет найти зависимость от  $\chi$  частот квази- $TM$ - и квази- $TE$ -волн. Для малых значений  $\chi$  киральный эффект будет замечен на пороге излучения при  $\beta n = 1$ . В качестве иллюстрации на рис. 1 и 2 приведены зависимости частоты излучения Вавилова–Черенкова от параметра киральности  $\chi$  для низших квази- $TM$ - и  $TE$ -мод соответственно при  $n = 3$  и  $\sigma = 1 \cdot 10^{-2}$  (сплошная кривая),  $1.14 \cdot 10^{-2}$  (штриховая кривая),  $1.26 \cdot 10^{-2}$  (штрихпунктир).

Потери энергии заряда, приходящиеся на единицу длины его траектории, как обычно, проще всего можно найти по тормозящей силе, действующей на заряд со стороны поля излучения:  $dW/dz = qE_z \Big|_{z=vt}^{r=0}$ . Здесь также надо выделить два случая. В первом, определяемом условием  $\beta n_1 > 1$ ,  $\beta n_2 > 1$ , соответствующим двум черенковским конусам в случае неограниченной

киральной среды, выражение для потерь имеет вид

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{q}{2} \sum_m F_m \frac{(J_0(\chi_{1m}a) - J_0(\chi_{2m}a))^2}{J_0(\chi_{1m}a)J_0(\chi_{2m}a)}. \quad (16)$$

Во втором случае  $\beta n_1 > 1$ ,  $\beta n_2 < 1$ , когда в неограниченной среде генерируется только один черенковский конус, имеем

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{q}{2} \sum_m F'_m \frac{(J_0(\chi_{1m}a) - J_0(\chi'_{2m}a))^2}{J_0(\chi_{1m}a)J_0(\chi'_{2m}a)},$$

$$F'_m = \frac{q}{a^2 \varepsilon \{ J_1(\chi_{1m}a)I_1(\chi'_{2m}a)(\beta^2 n_1 n_2 - 1) / \sigma_1 \sigma'_2 - J_0(\chi_{1m}a)I_0(\chi'_{2m}a) \}}, \quad (17)$$

а  $\chi_{1m}a$ ,  $\chi_{2m}a$  — корни уравнения

$$J_0(\chi_1 a)I_1(\chi'_2 a)n_2/\chi'_2 + I_0(\chi'_2 a)J_1(\chi_1 a)n_1/\chi_1 = 0.$$

На рис. 3,4 приведена зависимость величины  $a^2 dW/q^2 dz$  от параметра киральности низших квази- $TM$ - и квази- $TE$ -мод от  $\chi$  для  $n = 3$ ,  $\sigma = 1 \cdot 10^{-2}$  (сплошная кривая),  $1.14 \cdot 10^{-2}$  (штриховая кривая),  $1.26 \cdot 10^{-2}$  (штрихпунктир). Видно, что при переходе к акиральному случаю при  $\chi \rightarrow 0$   $TE$ -поле исчезает и остается только поле  $TM$ .

В предельном случае при  $\chi \rightarrow 0$  формулы (16), (17) переходят в известные выражения для акиральной среды [7]

$$\frac{qW}{dz} = \sum_m \frac{2q^2}{a^2 \varepsilon J_1^2(\chi_m a)},$$

где  $m$  — номер корня уравнения  $J_0(\chi_m a) = 0$ .

## Список литературы

- [1] Nader Engheta, Dwight L. Jaggard, Marek W. Kowarz. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1992. Vol. 40. N 4. P. 367–374.
- [2] Jan A.M. Skein. // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1990. Vol. 38. N 10. P. 1488–1496.
- [3] Cornel Eftimiu, L. Wilson Pearson. // Radio Sci. 1989. Vol. 24. N 3. P. 351–359.
- [4] Richard Hollinger, Vasundara V. Varudan, Vijay K. Varadan. // Radio Sci. 1991. Vol. 26. N 5. P. 351–359.
- [5] Канавец В.И., Сандапов А.Н. // Итоги науки и техники. ВИНТИ. 1985. № 17. С. 82–168.
- [6] Khan T.P. // J. Phys. A. 1970. Vol. 3. P. 246–250.
- [7] Muzikar C. // Czech. J. Phys. 1955. Vol. 5. N 1. P. 9.